

La loi des chocs chez Descartes¹

La loi des chocs occupe une place importante dans la physique cartésienne. Pour Descartes en effet, tous les changements dans la nature résultent en définitive de collisions, et de collisions seulement. Mais si la loi des chocs - et les sept règles qui la suivent dans les *Principes de la philosophie*² - sont claires en elles-mêmes, l'argumentation développée par Descartes en leur faveur continue de susciter la perplexité des commentateurs. Je tenterai, en m'inspirant principalement des travaux de Gabbey (1980) et Garber (1999), de dégager les principes sur lesquels reposent les sept règles déterministes des chocs. Je montrerai que ces sept règles peuvent être déduites de trois conditions. J'examinerai ensuite les fondements dynamiques de ces trois conditions et de la théorie cartésienne des chocs pour en relever les difficultés.

1. Les lois de la nature

Pour Descartes, on le sait, la première cause du mouvement est Dieu « qui de sa toute puissance a créé la matière avec le mouvement et le repos, et qui conserve maintenant en l'univers, par son concours ordinaire, autant de mouvement et de repos qu'il en a mis en le créant » (*Pr* II §36, OL p. 632). Dieu est la cause première de l'existence des corps étendus d'abord, de leur mise en mouvement initiale ensuite, et enfin de la conservation d'une grandeur, qui n'est autre que la quantité de mouvement totale de l'univers ou encore la sommation, en un moment du temps, des produits de la vitesse et du volume de tous les corps dont le monde se compose. Il ne suit pas de ce principe de conservation de la totalité de la quantité de mouvement, ou principe de conservation *globale*, que la quantité de mouvement se conserve lorsque l'on considère le repos ou le mouvement d'un seul corps, ou encore la rencontre de plusieurs d'entre eux. Il faut ajouter que seul un choc est susceptible de modifier la quantité de mouvement d'un corps et qu'un choc entre deux corps est indépendant de ce qui se passe dans le reste de l'univers. Comme Dieu agit toujours de la même manière, « nous pouvons parvenir à la connaissance de certaines règles, que je nomme les lois de la nature, et qui sont les causes secondes des divers mouvements que nous remarquons en tous les corps » (*Pr*. II §37, OL p. 633). Le principe de la conservation de la quantité *globale* de mouvement, de même que les trois lois de la nature qui suivent, sont, pour Descartes, aussi bien quant à leur existence que quant à la connaissance que nous pouvons en avoir, fondées sur la perfection et l'immutabilité divines³. Ce principe et ces lois sont immuables, c'est-à-dire invariants dans le temps. Les trois lois du mouvement expriment, comme on va le voir, l'invariance temporelle de différentes grandeurs mécaniques. Les lois de la mécanique sont des lois de conservation. Cette conception des lois comme exprimant l'invariance de grandeurs physiques est un apport majeur dont on ne saurait exagérer la portée et l'importance, encore aujourd'hui.

Un corps, c'est-à-dire un fragment d'étendue, possède deux propriétés, ou, selon Descartes, deux « modes » : sa forme géométrique et son mouvement (ou son repos). Dans le mouvement, il faut également distinguer deux propriétés ou deux modes : sa grandeur, c'est-à-dire sa vitesse, et sa direction ou, selon le terme

¹ Il m'est particulièrement agréable de dédier ce travail au Professeur Claude Troisfontaines qui, le premier, m'a fait découvrir la mécanique cartésienne lors d'un cours sur la « querelle des forces vives ». Je remercie vivement Anastasios Brenner et Arne Vagheluwe pour leurs précieuses remarques et suggestions sur une première version de cet article.

² Je ferai presque exclusivement usage de la version française des *Principes* où l'on trouve les lois cartésiennes sur l'impact sous leur forme la plus élaborée.

³ Pour des discussions serrées du lien entre la perfection divine et les lois de conservation, on peut consulter Guérout (1954) et Garber (1999).

employé par Descartes, sa « détermination ». Il existe une différence cruciale entre « le mouvement d'une chose, et sa détermination d'un côté plutôt que vers un autre ; laquelle différence est cause que cette détermination peut être changée sans qu'il y ait rien de changé au mouvement » (*Pr.* II §41, OL p. 637). Dans ce passage, comme dans beaucoup d'autres, Descartes utilise le terme « mouvement » pour se référer à la grandeur de la vitesse seule. Remarquons que lorsqu'un corps est au repos, il n'a pas de détermination ; mais il en acquiert une lorsqu'il est mis en mouvement.

La *première loi* du mouvement stipule que « chaque chose en particulier continue d'être dans le même état autant qu'il se peut, et jamais elle ne le change que par la rencontre des autres » (*Pr.* II §37, OL p. 633). L'état mécanique d'un corps demeure invariant en l'absence de collision. Dans le commentaire à la première loi, Descartes précise que les grandeurs d'état sont la *forme géométrique* (l'étendue), la *vitesse* et le *repos*. Le repos et le mouvement d'un corps ne sont pas pour Descartes des notions relatives définies uniquement en référence à d'autres corps, mais des notions absolues : le repos est un état physique, mécanique, distinct en soi de l'état de mouvement (voir Garber 1999, ch. VI).

Il paraît légitime d'inclure dans les grandeurs d'état la *direction* du mouvement dont la conservation fait l'objet de la *deuxième loi* : « chaque partie de la matière, en son particulier, ne tend jamais à se mouvoir suivant des lignes courbes, mais suivant des lignes droites » (*Pr.* II §39, OL p. 634).

La *troisième loi* de la mécanique, ou loi des chocs, s'énonce : « (...) si un corps qui se meut en rencontre un autre plus fort que soi, il ne perd rien de son mouvement, et s'il en rencontre un plus faible qu'il puisse mouvoir, il en perd autant qu'il lui en donne » (*Pr.* II §40, OL p. 636).

La première partie de la loi porte sur la rencontre d'un corps en mouvement et d'un corps au *repos*. C'est ce que montre le commentaire qui suit. « Si un corps qui se meut et qui en rencontre un autre, a moins de force, pour continuer de se mouvoir en ligne droite que cet autre pour lui résister, il perd sa détermination sans rien perdre de son mouvement » (*Pr.* II §40, OL p. 636). Dans ce qu'il appelle la « preuve » de la première partie de cette loi, Descartes remarque qu'un corps peut changer sa détermination sans rien perdre de son mouvement (vitesse) « car, de ce que chaque chose, telle qu'est le mouvement, continue d'être toujours en soi simplement, et non pas comme elle est au regard des autres, jusques à ce qu'elle soit contrainte de changer par la rencontre de quelque autre ; il faut nécessairement qu'un corps qui en se remuant, en rencontre un autre sur son chemin, si dur et si ferme qu'il ne saurait le remuer en aucune façon, perde entièrement sa détermination qu'il avait à se mouvoir de ce côté-là (...) mais il ne faut point qu'il perde rien pour cela de son mouvement (...) » (*Pr.* II, §41, OL p. 637). Bien qu'il soit difficile de voir dans ce commentaire une « preuve » de la première partie de la troisième loi, il apparaît que cette première partie ne vaut que pour un corps en mouvement qui en rencontre un autre *au repos* et suffisamment « fort » pour lui résister et conserver son état de repos. C'est ce qui se passe dans la règle 4 où le corps plus faible rebondit sans rien perdre de sa vitesse (voir le tableau à la fin de cet article). Mais on peut sans doute étendre cette première partie de la loi à la règle 7b. Là aussi, le corps plus faible change sa détermination, mais sans diminuer sa vitesse.

La seconde partie de la troisième loi traite du choc d'un corps en mouvement et d'un corps - toujours au repos - qui n'est pas « dur et ferme » mais « mol », c'est-à-dire susceptible d'être mis en mouvement. « S'il [le corps qui se meut] a plus de force, il meut avec soi cet autre corps, et perd autant de mouvement

qu'il lui en donne » (*Pr.* II §40, OL p. 636). C'est ce qui se produit dans la règle 5. Le corps « plus fort » conserve sa direction après le choc et se meut de conserve avec le corps plus « faible ». Dans la preuve de la seconde partie de la loi, Descartes s'appuie sur l'immutabilité divine pour défendre la conservation de la grandeur de la quantité de mouvement lors d'un choc.

La troisième loi ne couvre pas toutes les situations de collision envisagées dans les sept règles. En effet, si l'on s'en tient à la lettre du texte, elle ne concerne que les règles 4 et 5, où les grandeurs des corps sont différentes et où l'un des corps est au repos. En interprétant l'expression « qu'il puisse mouvoir » par « dont il puisse modifier le mouvement », la troisième loi peut toutefois être étendue aux autres règles, à l'exception des règles 1, 6 et 7c où aucun des deux corps n'est plus fort que l'autre. Malgré cela, il est permis de tirer de la troisième loi des conclusions applicables à toutes les situations de collision.

La première conclusion est que dans une collision nous assistons à un *combat*⁴ entre deux corps, ou plus exactement, entre deux forces : une force de résistance et une force de continuation du mouvement dans la même direction, que Descartes considère plus loin comme une force d'action (*Pr.* II §43). Le résultat d'une collision dépend des valeurs relatives de ces forces.

La deuxième conclusion, et certainement la plus importante, est que la somme des valeurs absolues des quantités de mouvement est la même avant et après le choc. Cette contrainte de la *conservation de la quantité de mouvement*, que nous appellerons la condition I, peut être exprimée mathématiquement de la manière suivante (où *m* désigne non pas la masse mais l'étendue, c'est-à-dire le volume) :

Condition I : $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$

Cependant, Descartes avait bien réalisé que la conservation de la quantité de mouvement ne suffisait pas pour déterminer sans ambiguïté le résultat d'une collision, même colinéaire, c'est-à-dire où les trajectoires initiales et finales sont toutes parallèles entre elles. La conservation de la grandeur de la quantité de mouvement seule ne permet pas de fixer de manière univoque les états finaux à partir des états initiaux. Or, l'obtention de lois déterministes est bien l'objectif poursuivi par Descartes, ainsi que l'atteste le titre de la section 45 qui constitue le paragraphe introductif à la formulation des sept règles : « Comment on peut déterminer combien les corps qui se rencontrent, changent les mouvements les uns des autres, par les règles qui suivent ». (*Pr.* II §49, OL p. 639). Ce déterminisme n'implique certainement pas que nous soyons capables en pratique de prédire le résultat d'une collision car, dans les faits, ces lois ne sont pas vérifiées. Comme Descartes nous en avertit, « (...) il arrive souvent que l'expérience peut sembler d'abord répugner aux règles que je viens d'expliquer (...) car elles présupposent que les deux corps soient parfaitement durs, et tellement séparés de tous les autres, qu'il n'y en a aucun autour d'eux qui puisse aider ou empêcher leur mouvement ; et nous n'en voyons point de tels en ce monde. » (*Pr.* II §53, OL p. 643). Dans un monde rempli de corps, il n'y a pas à s'étonner que nous ne puissions pas effectivement prédire les états finaux à partir des états initiaux, même si les premiers sont déterminés par ces derniers. Toutefois, l'impossibilité de prédire les états finaux est parfaitement compatible avec l'existence de lois déterministes⁵.

⁴ Cette analogie du combat (« contest ») a été introduite par Herivel (1965, p. 49) et ensuite reprise par Gabbey ((1980) et Garber (1999)).

⁵ Il est regrettable que de nombreux auteurs contemporains (comme Ilya Prigogine) estiment que l'impossibilité en pratique de faire des prédictions implique l'absence

2. La dynamique du choc

Comme de nombreux commentateurs l'ont souligné⁶, ce sont les forces en conflit lors de l'impact qui sont les causes des changements de mouvement, en grandeur ou/et en direction. Le problème consiste alors pour Descartes à préciser la nature de ces forces et à les évaluer quantitativement. Sur ces points, les deux premières lois fournissent des indications précieuses. Les changements de mouvement dus aux chocs résultent de la présence dans les corps d'une *force de résistance*. Par cette force de résistance, un corps s'oppose à toute tentative extérieure de modifier la grandeur de son mouvement et la détermination de celui-ci. La force de résistance peut aussi être considérée comme une *force d'action*, par laquelle la force exercée par le corps qui résiste tend à modifier le mouvement d'un autre corps. Ces forces sont identiques et ne diffèrent que par le point de vue que l'on prend⁷.

« (...) la force dont un corps agit contre un autre corps ou résiste à son action, consiste en cela seul, que chaque chose persiste autant qu'elle peut à demeurer au même état où elle se trouve, conformément à la première loi qui a été exposée ci-dessus. (...) lorsqu'il est au repos, il a de la force pour demeurer en ce repos et résister à tout ce qui pourrait le faire changer. De même que, lorsqu'il se meut, il a de la force pour continuer de se mouvoir avec la même force et vers le même côté. Mais on doit juger de la quantité de cette force par la grandeur du corps où elle est (...), par la vitesse du mouvement et les façons contraires dont plusieurs corps se rencontrent (*Pr.* II §43, OL p.638) »

L'évaluation des forces d'action et de résistance devra se baser sur les grandeurs, les vitesses et les façons contraires dont les corps se rencontrent, soit leurs directions. Malheureusement, ces indications sont trop succinctes pour pouvoir calculer les valeurs précises des forces en opposition lors d'un impact, et, *a fortiori*, pour permettre de déterminer les états des corps après une collision. Il est dès lors contestable d'ériger ces indications en principes d'une déduction des valeurs des forces d'abord, et des états de mouvement finaux ensuite, comme Descartes le prétend dans le passage suivant :

« (...) afin que nous puissions déduire de ces principes comment chaque corps en particulier augmente ou diminue ses mouvements, ou change leur détermination à cause de la rencontre des autres corps, il faut seulement calculer combien il y a de force en chacun de ces corps, pour mouvoir ou pour résister au mouvement, parce qu'il est évident que celui qui en a le plus, doit toujours produire son effet, et empêcher celui de l'autre » (*Pr.* II §45, OL p. 639).

Comme Descartes ne nous dit pas d'entrée de jeu comment évaluer quantitativement les forces, nous sommes contraints de regarder leurs effets, énoncés dans les règles elles-mêmes. Chaque règle en effet stipule quel corps gagne le combat ou s'il y a match nul, et précise les grandeurs et les directions des vitesses après le choc. Comme nous allons le montrer, il est possible de dégager trois conditions dont ces règles découlent. Nous avons déjà vu une première condition, celle de la conservation de la quantité de mouvement. Une fois les deux autres conditions obtenues, nous pourrions revenir au problème dynamique de l'évaluation quantitative des forces.

de déterminisme. Cette inférence est injustifiée. L'indéterminisme implique l'impossibilité de prédire, mais non l'inverse.

⁶ Par exemple Guérault (1954).

⁷ Sur ce point (comme sur d'autres) Descartes anticipe Newton (voir Gabbey 1980).

3. Les règles des chocs

Les sept règles se subdivisent naturellement en trois catégories. Elles concernent exclusivement les collisions colinéaires. Descartes examine successivement trois cas où les deux corps sont en mouvement l'un vers l'autre, puis trois cas où l'un des corps, le corps 2, est au repos, et enfin quatre situations où les deux corps se meuvent dans la même direction de manière à ce que le corps 1 rattrape l'autre. En définitive, Descartes énonce non pas sept règles, mais dix.

Un examen attentif des règles des chocs et des commentaires qui les suivent dans les *Principes* nous permettent de tirer une série de conclusions (voir la figure et le tableau). La première est que le choc se traduit toujours par un changement : soit en direction, soit en vitesse, soit les deux à la fois, pour l'un des corps ou les deux en même temps. Cependant, un corps en mouvement avant le choc est toujours en mouvement après celui-ci ; le choc n'est pas susceptible de mettre au repos un corps en mouvement. Il ressort également de cet examen que le corps 1 gagne le combat dans les cas 2, 3, 5, 7a', 7a'' et qu'il le perd dans les cas 4 et 7b. Il y a égalité des forces pour les règles 1, 6 et 7c.

Ensuite, on constate que lorsqu'un corps qui est en mouvement gagne le combat, il conserve toujours la *direction* de son mouvement après le choc (règles 2, 3, 5, 7a', 7a'', 7b). Si c'est le corps au repos qui gagne, il reste immobile et le perdant inverse la direction de son mouvement (règle 4). Le corps le plus faible change sa détermination (règles 2, 3, 4, 7b) ou en acquiert une (règle 5), sauf si l'impénétrabilité et la conservation de la direction du mouvement du corps plus fort oblige le corps plus faible à conserver sa détermination (règles 7a', 7a''). L'impénétrabilité impose une contrainte supplémentaire sur les résultats du choc puisqu'un corps ne peut pas en dépasser un autre. En cas de match nul, les directions des mouvements après le choc sont opposées (règles 1, 6, 7c). Nous sommes ainsi amenés à énoncer une deuxième condition, que nous appellerons la *condition directionnelle*.

Condition II : Lors d'un choc, le corps qui gagne le combat (c'est-à-dire celui dont la force d'action ou de résistance est la plus grande), conserve la *direction* de son mouvement ou son état de *repos*. Le corps le plus faible modifie sa détermination ou en acquiert une sauf si le corps le plus fort l'en empêche en vertu de l'impénétrabilité. En cas de match nul, les directions des mouvements après le choc sont opposées.

Cette condition permet de déterminer les directions finales pour tous les cas *pourvu que* nous sachions au préalable quel corps gagne le combat ou s'il y a match nul.

Si nous continuons à passer le tableau en revue, nous voyons que *si l'un des corps gagne le combat*, aucun des deux corps ne modifie la *grandeur* de sa quantité de mouvement, *à moins qu'ils n'y soient forcés par l'impénétrabilité*. Dans les règles 2, 4 et 7b, les corps conservent la grandeur de leur vitesse après le choc. Mais dans les règles 3, 5, 7a' et 7a'', l'impénétrabilité force le corps gagnant à diminuer sa vitesse car il ne peut dépasser le corps qui perd.

Si le corps qui gagne est obligé de diminuer sa quantité de mouvement, et donc sa vitesse puisque les volumes restent inchangés, il la diminue *le moins possible*. Ceci nécessite que les deux corps se meuvent après le choc à la *même*

vitesse⁸, dont la valeur est déterminée par la conservation de la quantité de mouvement (condition I). Le transfert minimal de quantité de mouvement, et donc de vitesse, de la part du corps qui gagne lors de l'impact implique que les vitesses finales soient égales.

Bien que Descartes ne le dise pas explicitement dans les *Principes*, on voit ici à l'œuvre le *principe de minimum* de changement dans les modes du mouvement énoncé dans une lettre à Clerselier, probablement écrite le 17 février 1645, au moment où Descartes travaillait à la version française des *Principes* :

« elles [ces sept règles] ne dépendent que d'un seul principe, qui est que, lorsque deux corps se rencontrent, qui ont entre eux des modes incompatibles, il se doit véritablement faire quelque changement en ces modes, pour les rendre compatibles, mais que ce changement est toujours le moindre qu'il puisse être, c'est-à-dire que, si, certaine quantité de ces modes était changée, ils peuvent devenir compatibles, il ne s'en changera point une plus grande quantité. Et il faut considérer dans le mouvement deux divers modes : l'un est la motion seule ou la vitesse, et l'autre est la détermination de cette motion vers certain autre côté, lesquels deux modes se changent aussi difficilement l'un que l'autre » (AT IV 183-187).

Ce principe de minimum de changement⁹, que Garber appelle le « principe du minimum de changement modal (PMCM) »¹⁰, permet de justifier que le corps plus faible rebondisse en gardant sa vitesse dans le cas qui préoccupe Clerselier, à savoir lorsqu'un corps plus petit en rencontre un autre plus grand qui est au repos. Dans ce cas (règle 4), seul le corps plus petit modifie la détermination de son mouvement mais pas sa grandeur, ce qui est un changement moins important qu'une diminution de vitesse du corps en mouvement accompagnée d'une mise en mouvement du corps au repos. Mais comme le relève Garber, le PMCM ne donne pas les résultats attendus dans tous les cas. Selon ce principe, un corps au repos devrait toujours demeurer au repos. De plus, lorsque des corps égaux sont en mouvement l'un vers l'autre et que le premier est plus rapide (règle 3), le minimum de changement serait réalisé par une simple inversion de la direction du mouvement du premier corps sans que le corps plus lent ne modifie son état. Sans doute est-il manifeste que le corps 1 est plus fort et qu'il doit altérer le mouvement du corps 2, plus faible. Toujours est-il que, pour évidente qu'elle soit, cette considération est indépendante du PMCM : les règles ne dépendent certainement pas toutes d'« un seul principe », comme Descartes le prétend dans sa lettre à Clerselier. Il me semble qu'il faut y voir la raison principale pour laquelle le PMCM n'est pas repris comme tel dans les *Principes*¹¹.

Par contre, si l'on suppose que le corps qui gagne conserve sa direction ou son repos, comme le prescrit la condition II, le PMCM, assorti de l'impénétrabilité, permet de déterminer l'issue de la collision lorsque l'un des deux corps remporte la victoire. La condition directionnelle conduit ainsi à envisager une restriction du principe de moindre changement modal à la seule *grandeur* de la quantité de mouvement et donc de la vitesse. Une fois que les directions après le choc sont déterminées par la condition II, il ne reste plus qu'à se préoccuper des grandeurs des vitesses finales. Le PMCM peut alors être remplacé

⁸ Soit X la perte de vitesse ($v_1 - v'_1$) du corps 1 et Y le gain de vitesse ($v'_2 - v_2$) du corps 2. Puisque, vu l'impénétrabilité, $v'_2 \geq v'_1$ on a : $Y \geq (v_1 - v_2) - X$. Pour que X prenne la valeur minimale, il faut l'égalité ; donc, $v'_2 = v'_1$.

⁹ Qui est aussi un principe d'économie (Costabel 1967).

¹⁰ Gabbey (1980) l'appelle le « Principe de moindre mutation modale ».

¹¹ Je ne pense pas le caractère finaliste du PMCM soit la raison de son absence des *Principes*, comme le supposent Gabbey (1980) et Garber (1999), puisque des considérations finalistes apparaissent implicitement dans la justification des règles que l'on trouve dans les *Principes*, comme Garber lui-même le reconnaît.

par un principe de minimum de changement quantité de mouvement, et donc de vitesse¹², en grandeur, soit PMCV.

Passons maintenant à l'analyse des cas d'égalité 1, 6 et 7c. Là aussi, l'utilisation du PMCM est problématique, comme le révèle l'examen de la règle 7c. Comparer les changements de vitesses est facile. Mais comment estimer l'importance d'un changement de direction par rapport à un changement de grandeur de la vitesse ? On ne trouve chez Descartes aucune réponse à cette question qui fait déjà l'objet d'une critique de Leibniz dans le *Specimen Dynamicum*. Ici encore la condition directionnelle peut nous aider à y voir plus clair. Puisque cette condition impose que les directions après le choc soient opposées dans les cas d'égalité, on peut se concentrer sur les grandeurs des vitesses et appliquer le principe du minimum de changement de vitesse (PMCV).

Dans la règle 1, les deux corps gagnent (ou perdent) et chacun modifie la direction de son mouvement après le choc. Chaque corps diminue sa vitesse le moins possible, c'est-à-dire la conserve. Le PMCV s'applique simplement : les vitesses finales sont égales aux vitesses initiales, seules les directions changent.

Dans la règle 6, la condition directionnelle impose que le corps 1 en mouvement rebondisse et que le corps au repos se mette en mouvement. Le minimum de changement de vitesse serait réalisé si, après le choc, le corps 2 se déplaçait avec une vitesse infiniment petite. Mais cette possibilité n'est pas envisagée par Descartes. Les corps doivent se déplacer avec des vitesses finales définies. Lesquelles ? Quoiqu'il arrive, nous dit Descartes, le corps 1 ne peut pas perdre plus de la moitié de sa vitesse, c'est-à-dire celle qu'il perdrait, en accord avec le PMCV, s'il gagnait le combat pour entraîner le corps 1 avec lui (*Pr. II* §51, OL p. 642). Comme il y a match nul, la répartition de la vitesse susceptible d'être cédée doit se faire de manière égale. Si le corps 1 possède quatre degrés de vitesse, la moitié, c'est-à-dire deux degrés, doit être répartie également entre les deux corps. Donc, le corps qui était au repos acquiert une vitesse égale à un degré, soit le quart de la vitesse initiale du corps en mouvement. Bien entendu, il ne s'agit plus ici de l'application d'un principe de changement minimum de vitesse seulement, mais d'un principe de répartition équilibrée de la quantité maximale de vitesse qui *pourrait* être cédée en vertu du PMCV, ou encore d'un *principe de moyenne ou de symétrie*¹³.

Le dernier cas d'égalité sur lequel nous devons nous pencher est celui de la règle 7c. Le texte de la section 52 du deuxième livre des *Principes* ne contient pas d'exemple chiffré pour les valeurs des vitesses finales. Mais, par analogie avec le raisonnement suivi pour la règle 6, on peut conjecturer que la quantité de mouvement finale du corps qui garde la direction de son mouvement est augmentée de la moitié de la quantité de mouvement qui pourrait être cédée par le corps 1 s'il était victorieux, soit la moitié de la quantité de mouvement cédée par le corps plus rapide dans les cas 7a' et 7a'', c'est-à-dire la quantité de mouvement $\frac{1}{2} m_1 m_2 (v_1 - v_2) / (m_1 + m_2)$ (voir tableau)¹⁴.

¹² Puisque les volumes sont constants dans les chocs élastiques, la variation de la quantité de mouvement est égale au produit du volume par la variation de vitesse. En notation moderne on a : $d(mv) = m dv$.

¹³ Gabbey (1980), Garber (1999).

¹⁴ Dans la règle 7c, la conservation de la quantité de mouvement implique que la diminution de vitesse du corps 1 plus rapide et plus petit est plus grande que l'augmentation de vitesse du corps 2 plus grand. Mon estimation s'écarte de celle de Garber (1999, p. 388).

Nous pouvons conclure de cette analyse que le principe de minimum de changement des grandeurs des vitesses (PMCV), allié à un principe de symétrie (pour les cas d'égalité 6 et 7c), permet de déterminer les *grandeurs* des vitesses après le choc. On est ainsi conduit à énoncer une troisième condition que nous appellerons la *condition de minimum* :

Condition III : Lors d'un choc, la grandeur de la quantité de mouvement, et donc de la vitesse, du corps qui gagne le combat est modifiée le moins possible, tout en respectant les conditions I et II de même que l'impénétrabilité des corps. Dans les cas d'égalité 6 et 7c, la quantité minimale de vitesse qui aurait été cédée au corps lent si le corps plus rapide avait gagné le combat est également répartie entre les deux corps.

Le lecteur pourra s'assurer que les conditions I, II et III permettent de déduire les sept règles déterministes des chocs formulées par Descartes, *pourvu que l'on sache d'entrée de jeu le résultat du combat entre les corps*. Il faut souligner que, par elles-mêmes, ces conditions ne sauraient servir de fondement à une explication dynamique des collisions. Si la conservation de la quantité de mouvement peut sans doute être considérée comme une condition dynamique qui trouve sa raison dans la façon dont s'exerce l'action créatrice de Dieu, l'application des deux autres conditions suppose que l'issue du combat soit déjà connue. Les conditions directionnelles et de minimum qui permettent de déterminer respectivement les directions et les grandeurs des vitesses après le choc dépendent, en réalité et en raison, de l'opération de certaines causes sur lesquelles elles restent muettes. Or, c'est sur ces causes, à savoir les forces d'action et de résistance, et leur évaluation quantitative, que doit reposer une explication mécanique complète des règles des chocs. De surcroît, la troisième condition présente l'inconvénient d'être une contrainte à caractère finaliste alors qu'en mécanique seules les causes efficientes sont recevables. En ne gouvernant que les effets, sans remonter aux causes efficientes qui les produisent, les conditions II et III ne sauraient réaliser le projet cartésien d'une explication dynamique des phénomènes naturels.

4. L'évaluation des forces

Nous pouvons à présent reprendre la problématique de l'évaluation quantitative des forces d'action et de résistance. Pour Descartes, les forces sont certainement proportionnelles à l'étendue et à la vitesse. Dès lors, la première idée qui vient naturellement à l'esprit est d'évaluer les forces d'action ou de résistance d'un corps lors de l'impact à l'aide du produit de son volume et de sa vitesse initiale. L'action du corps 1 est alors égale à m_1v_1 et l'action du corps 2, ou sa résistance à l'action du corps 1, vaut m_2v_2 . Si m_1v_1 est plus grand que m_2v_2 , c'est le corps 1 qui gagne ; dans le cas contraire, c'est le corps 2 qui l'emporte. Si les quantités de mouvement sont égales, il y a match nul. On obtient ainsi les résultats prescrits par les règles 1, 2, 3, 5, 7a', 7a'', 7b et 7c (voir tableau).

Mais cette évaluation des forces ne marche pas pour les règles 4 et 6 - et l'on peut douter de sa pertinence pour la règle 5 - puisque la quantité de mouvement d'un corps au repos est nulle. Or, même au repos, un corps oppose une force de résistance à un corps en mouvement, et cela en conformité avec sa tendance à maintenir son état de repos.

Lorsque le corps 1 (B) rencontre le corps 2 (C) plus « fort » et immobile, la règle 4 prescrit qu'il rebondisse sans rien perdre de la grandeur de sa vitesse. Pour quelle raison ? Parce que, nous dit Descartes, « d'autant que B ne saurait pousser C, sans le faire aller aussi vite qu'il irait soi-même par après [souligné par moi], il est certain que C doit d'autant plus résister, que B

vient plus vite vers lui ; et que sa résistance doit prévaloir à l'action de B, à cause qu'il est plus grand que lui. Ainsi, par exemple, si C est le double de B, et que B ait trois degrés de mouvement [vitesse], il ne peut pousser C, qui est en repos, si ce n'est qu'il lui en transfère deux degrés, à savoir un pour chacune de ses moitiés, et qu'il retienne seulement le troisième pour soi, à cause qu'il n'est pas plus grand que chacune des moitiés de C, et qu'il ne peut par après aller plus vite qu'elles. » (*Pr.* II §49, OL p. 640-641).

Dans cette argumentation en faveur de la règle 4, Descartes a implicitement recours au PMCV puisqu'il suppose d'entrée de jeu que les vitesses devraient être égales après le choc si le corps B l'emportait. Or, il est raisonnable de supposer que la résistance d'un corps à un changement qu'on veut lui faire subir est proportionnelle à l'importance de ce changement. Comme C résiste en proportion de la variation possible de sa quantité de mouvement $d(mv^*_2)$, et donc de sa vitesse dv^*_2 (soit un, dans l'exemple ci-dessus), sa force de résistance est égale au produit de son volume et de sa vitesse *finale* possible ou virtuelle¹⁵, soit $m_2 dv^*_2$, puisque sa vitesse initiale est nulle. Cette vitesse finale virtuelle de C est évidemment d'autant plus grande que la vitesse de B est plus grande. D'autre part, l'action de B est proportionnelle à sa taille m_1 et à la quantité de vitesse dv^*_1 – égale à dv^*_2 – qu'il *pourrait* communiquer à C, s'il gagnait le combat. Comme B est plus petit que C, l'action de B est toujours inférieure à la résistance de C, quelle que soit la vitesse de B. Formellement, on a $m_1 dv^*_1 < m_2 dv^*_2$.

Descartes n'examine pas la possibilité qu'il y ait match nul. Pour éviter toute ambiguïté, l'évaluation des forces ne peut se faire qu'à partir d'une seule éventualité quant aux résultats possibles de l'impact. Comme Descartes n'envisage ici que la possibilité où l'un des corps gagne le combat, on est amené à formuler l'hypothèse H suivante.

Hypothèse H : La force d'action exercée par un corps en mouvement lorsqu'il en rencontre un autre *au repos* est égale au produit de son volume et de la vitesse qu'il pourrait transférer s'il gagnait le combat. La force de résistance d'un corps au repos est égale au produit de son volume et de l'accroissement virtuel de sa vitesse.

Voyons à présent ce que donne l'application de l'hypothèse H à la règle 5 où le corps en mouvement est plus grand que le corps au repos. Dans ce cas tout va bien car la force d'action du corps en mouvement, égale à la quantité de mouvement transférée lorsqu'il gagne – ce qu'il fait – est plus grande que la force de résistance du corps au repos, qui est égale à son volume multiplié par la vitesse qu'il acquiert (*Pr.* II, §51). Les variations de vitesse virtuelles sont ici égales aux variations de vitesse réelles, puisque le corps 1 en mouvement gagne le combat. Formellement, on obtient $m_1 dv^*_1 > m_2 dv^*_2$.

Regardons maintenant ce qui se passe dans la règle 6 où les deux corps ont la même taille. Descartes envisage successivement les trois issues possibles de l'impact. Supposons que le corps B gagne ; il doit alors, s'il a quatre degrés de vitesse avant l'impact, en transférer la moitié, soit deux, au corps immobile et on obtient l'égalité des forces d'action et de résistance, ce qui est incompatible avec la victoire du corps B. Supposons à présent que le corps C gagne le combat. S'il gagne, il reste au repos comme dans la règle 4 tandis que le corps B rebondit avec ses quatre degrés de vitesse. Mais cela voudrait dire que la force d'action de B est nulle, puisqu'il ne communique aucune vitesse, de même que la résistance de C, car il ne gagne aucune vitesse. Donc, il y aurait égalité des forces, ce qui est contraire à la supposition de départ.

¹⁵ J'adopte ici l'interprétation de Gabbey (1980), suivie par Garber (1999).

La conclusion s'impose : il y a égalité des forces. Mais quelle est leur valeur ? L'hypothèse H permet de conjecturer que l'action et la résistance sont égales au produit du volume et de la vitesse effectivement transmise et reçue, puisque les deux corps gagnent. Comme un corps ne peut en tout état de cause transmettre plus que la moitié de sa quantité de mouvement (lorsqu'il gagne), cette moitié doit ici être répartie également entre les deux corps puisqu'il y a match nul. Cela signifie que le corps en mouvement cède le quart de sa vitesse au corps au repos. Donc, les forces d'action et de résistance sont bien égales comme on pouvait l'espérer. Les vitesses virtuelles sont égales aux vitesses réelles et l'on a, formellement, que $m_1 dv_1^* = m_2 dv_2^*$.

On rencontrera de sérieuses difficultés si l'on tente d'élargir la portée de l'hypothèse H et de l'utiliser pour évaluer les forces lorsque les deux corps sont en mouvement. Dans la règle 2 par exemple, le corps 1 gagne mais il n'y a aucun transfert de vitesse lors du choc : l'action et la résistance devraient toutes deux être nulles. Cependant, Descartes ne nous laisse aucunement supposer que les forces devraient être évaluées autrement que par les produits des volumes et des vitesses avant le choc dans tous ces cas où les deux corps sont initialement en mouvement.

5. Mérites et difficultés de la dynamique cartésienne

Plusieurs observations ressortent de cette analyse. Tout d'abord, l'évaluation des forces s'effectue différemment si, avant le choc, l'un des corps est au repos ou s'ils sont tous deux en mouvement. Ceci introduit une disparité dommageable dans la méthode de calcul des forces et porte préjudice à la cohérence de la dynamique cartésienne. Ensuite, l'évaluation des forces dans le cas où l'un des corps est au repos fait appel à la finalité puisqu'il est nécessaire de faire appel au principe du minimum de changement des vitesses (PMCV). Or, dans une explication mécanique satisfaisante, on doit faire l'économie des causes finales et se restreindre aux seules causes efficientes. Enfin, si un des corps est immobile avant l'impact, les forces sont évaluées en fonction des *changements de vitesse possibles*. Il s'agit là d'une idée très intéressante car elle postule un lien entre la force et le *changement* de vitesse et on peut y voir une anticipation de la dynamique de Newton comme l'a souligné Gabbey (1980). Par contre, on comprend mal comment la force effectivement exercée par un corps puisse dépendre d'une notion modale comme le changement de vitesse *possible* ou virtuel, et ce d'autant plus que les possibilités autorisées sont multiples. Il n'y a aucune raison *a priori* de supposer que les forces doivent être calculées à partir de la seule supposition qu'un des corps remporte le combat dans la règle 4, sans envisager la possibilité de match nul.

Même si les forces peuvent être calculées de la manière dont Descartes semble l'indiquer, le lien entre la valeur de ces forces et les états des corps après le choc est loin d'être éclairci. En fait, selon notre interprétation, il est possible d'évaluer quantitativement les forces, à condition que l'on connaisse les résultats des chocs dans certains cas. Il n'est pas possible de procéder à un calcul des forces *a priori*, indépendamment de la connaissance des trois conditions et des résultats des chocs, de telle manière que tous les modes des mouvements finaux s'en déduisent. Tout ce que l'on peut faire, c'est montrer la compatibilité des règles des chocs avec une certaine manière de calculer les forces.

Se pose à présent la question de la justification dynamique des trois conditions qui permettent de déterminer les états finaux à partir des états initiaux. La première condition, celle de la conservation de la quantité de mouvement, trouve sa justification dans l'immutabilité divine, comme nous l'avons vu.

Je vais maintenant montrer que la deuxième condition, la condition directionnelle, peut être justifiée à partir d'un principe de causalité appliqué aux forces. Puisque pour Descartes « le corps le plus fort doit toujours produire son effet et empêcher celui de l'autre » (*Pr.* II, §45, OL p. 639), il semble logique de supposer que le corps le plus fort conserve toujours sa *direction* après le choc ; et c'est effectivement ce qui se passe dans tous les cas envisagés. Le corps le plus faible quant à lui modifie toujours sa détermination, sauf si le corps le plus fort l'en empêche en vertu de l'impénétrabilité.

Qu'en est-il lorsque les forces sont égales ? Dans la règle 1, comme aucun des corps ne peut imposer la direction de son mouvement à l'autre, il est raisonnable de conclure que chaque corps doit inverser la direction de son mouvement ; l'impénétrabilité en effet interdit qu'ils poursuivent chacun leur mouvement dans la même direction. Dans la règle 6, les directions initiales des mouvements sont toutes deux modifiées puisque aucun des corps ne peut imposer la détermination de son mouvement à l'autre. On pourrait imaginer que le corps au repos se mette en mouvement vers le corps 1 après le choc. Pour écarter cette possibilité, intuitivement absurde, il suffit d'*attribuer une direction aux forces*. Sans doute Descartes ne le dit-il pas explicitement. Mais il est naturel de le conjecturer car la force est une grandeur mécanique égale au produit d'un volume et d'une vitesse (ou de sa variation) : la direction de la force est alors celle de la vitesse (ou de sa variation). Une force a tendance à produire un changement d'état dans la même direction qu'elle. Dans les règles 1 et 6, les forces produisent toutes deux leurs effets puisque les mouvements après le choc s'effectuent dans la direction où elles agissent ou résistent. Il en va de même dans la règle 7c : la force de résistance du corps 2 s'exerce dans la direction du mouvement final du corps 1 tandis que la force d'action du corps 1 s'exerce dans la direction du mouvement final du corps 2.

Voyons à présent ce qui se passe pour les grandeurs des vitesses. Comme le précise Descartes dans la lettre à Clerselier citée plus haut, les deux modes du mouvement « se changent aussi difficilement l'un que l'autre ». On pourrait alors s'attendre à ce que le corps qui gagne impose sa vitesse *finale* au corps perdant, de la même manière que la force qui l'emporte lors de l'impact détermine la direction de la vitesse finale du corps perdant. C'est effectivement ce que l'on obtient dans les règles 2, 3, 5, 7a', 7a'', où les vitesses finales des corps sont égales. (On aurait ici une façon alternative - dynamique - d'obtenir les vitesses finales, qui ne s'appuie pas sur le PMCV). Par contre, ce n'est pas ce qui se produit dans les règles 4 et 7b où il n'y a aucun changement dans les grandeurs des vitesses finales. Les cas d'égalité posent également problème puisque tantôt il n'y a aucun changement dans les vitesses (règles 1 et 4), tantôt les vitesses finales sont modifiées (règle 7c). Comme on le voit, il n'est pas possible de déduire les grandeurs des vitesses finales à partir de considérations dynamiques seulement et donc de se passer du principe du minimum.

Il est très remarquable que la méthode d'évaluation des forces proposée par Descartes permette de déterminer les directions des mouvements après le choc, même si cette méthode reste en elle-même problématique. Par contre, cette méthode d'évaluation des forces ne permet pas de déterminer les valeurs des vitesses après le choc sans avoir recours à la condition de minimum. On peut dès lors conclure que, chez Descartes, le fondement dynamique des règles des chocs reste en suspens.

6. Conclusion

Le texte des *Principes* nous montre à l'évidence que Descartes poursuit un objectif double, celui de formuler une théorie mécanique des collisions qui soit à la fois mathématique et causale. Il s'agit d'une part d'énoncer des lois mathématiques déterministes des changements d'état des corps et d'autre part d'expliquer ces changements à partir des causes, c'est-à-dire les forces, qui les produisent. Sans doute les lois des chocs sont-elles toutes fausses, sauf la première. Mais si l'on fait abstraction de ce fait, la démarche de Descartes et sa mise en oeuvre ne laissent pas d'impressionner. Les lois des chocs en ligne droite sont déterministes. De plus, elles peuvent toutes être déduites de trois conditions : la conservation de la grandeur de la quantité de mouvement, la condition directionnelle et la condition de minimum et de symétrie. En outre, les première et deuxième conditions possèdent un fondement dynamique : la première dans l'action créatrice de Dieu et la seconde dans la dynamique des forces d'action et de résistance lors de l'impact. Par contre, l'évaluation quantitative des forces ainsi que la détermination des grandeurs des vitesses finales à partir des valeurs estimées des forces soulèvent de sérieuses difficultés. Malgré toute l'ingéniosité dont Descartes fait preuve sur une question aussi délicate, l'évaluation des forces en jeu lors de l'impact, et par conséquent le fondement dynamique des lois des chocs, reste très problématique. Toutefois, ces premières tentatives de mathématisation des forces d'action et de résistance allaient se révéler extraordinairement fécondes et ouvrir la voie à la mécanique newtonienne.

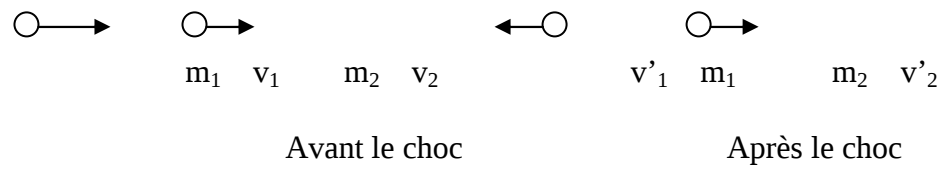


Figure : illustration de la règle 7c.

LES REGLES DES CHOCS SELON DESCARTES¹⁶

	volumes	direction s avant le choc	vitesse s avant le choc	forces en présenc e lors de l'impact	résultat du combat	direction s après le choc	vitesses après le choc
1	$m_1 = m_2$	$\rightarrow \leftarrow$	$v_1 = v_2$	$m_1 v_1 = m_2 v_2$	match nul	$\leftarrow \rightarrow$	$v'_1 = v_1$ $v'_2 = v_2$
2	$m_1 > m_2$	$\rightarrow \leftarrow$	$v_1 = v_2$	$m_1 v_1 > m_2 v_2$	victoir e du corps 1	$\rightarrow \rightarrow$	$v'_1 = v_1$ $v'_2 = v_2$
3	$m_1 = m_2$	$\rightarrow \leftarrow$	$v_1 > v_2$	$m_1 v_1 > m_2 v_2$	victoir e du corps 1	$\rightarrow \rightarrow$	$v'_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ $v'_2 = v'_1$
4	$m_1 < m_2$	$\rightarrow .$	$v_1 > 0$ $v_2 = 0$	$m_1 dv^*_1 < m_2 dv^*_2$	victoir e du corps 2	$\leftarrow .$	$v'_1 = v_1$ $v'_2 = v_2 = 0$
5	$m_1 > m_2$	$\rightarrow .$	$v_1 > 0$ $v_2 = 0$	$m_1 dv^*_1 > m_2 dv^*_2$	victoir e du corps 1	$\rightarrow \rightarrow$	$v'_1 = [m_1/(m_1+m_2)]v_1$ $v'_2 = v'_1$
6	$m_1 = m_2$	$\rightarrow .$	$v_1 > 0$ $v_2 = 0$	$m_1 dv^*_1 = m_2 dv^*_2$	match nul	$\leftarrow \rightarrow$	$v'_1 = \frac{3}{4} v_1$ $v'_2 = \frac{1}{4} v_1$
7a'	$m_1 > m_2$	$\rightarrow \rightarrow$	$v_1 > v_2$	$m_1 v_1 > m_2 v_2$	victoir e du corps 1	$\rightarrow \rightarrow$	$v'_1 = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$ $v'_2 = v'_1$
7a''	$m_1 < m_2$	$\rightarrow \rightarrow$	$v_1 > v_2$	$m_1 v_1 > m_2 v_2$	victoir e du corps 1	$\rightarrow \rightarrow$	$v'_1 = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$ $v'_2 = v'_1$
7b	$m_1 < m_2$	$\rightarrow \rightarrow$	$v_1 > v_2$	$m_1 v_1 < m_2 v_2$	victoir e du corps 2	$\leftarrow \rightarrow$	$v'_1 = v_1$ $v'_2 = v_2$
7c	$m_1 < m_2$	$\rightarrow \rightarrow$	$v_1 > v_2$	$m_1 v_1 = m_2 v_2$	match nul	$\leftarrow \rightarrow$	$v'_1 = [(2m_1 + m_2)v_1 + m_2 v_2]/2(m_1 + m_2)$ $v'_2 = [(2m_2 + m_1)v_2 + m_1 v_1]/2(m_1 + m_2)$

¹⁶ Dans ce tableau les v_i , v'_i et dv^*_i représentent des grandeurs absolues.

Références bibliographiques

- Costabel, P. (1967), « Essai critique sur quelques concepts de la mécanique cartésienne ». *Archives internationales d'histoire des sciences*, 80, pp. 235-252. Repris dans *Démarches originales de Descartes savant*. pp. 151-158. 1980. Paris : Vrin.
- Gabbey, A. (1980) « Force and Inertia in the Seventeenth Century : Descartes and Newton" in Gaukroger, S. (ed.), *Descartes : Philosophy, Mathematics and Physics*. Sussex : Harvester Press.
- Garber, D. (1999), *La physique métaphysique de Descartes*. Traduit de l'américain par Stéphane Bornhausen. Paris : PUF.
- Guérout, M. (1954), « Métaphysique et physique de la force chez Descartes et Malebranche. 1^{ère} partie : Descartes », *Revue de Métaphysique et de Morale*, LIX, pp. 1-37.
- Descartes, R. (1953), *Oeuvres et lettres (OL)*. Textes présentés par André Bridoux. Bibliothèque de la Pléiade. Paris : Gallimard.
- Descartes, R. (1989), *Oeuvres de Descartes, publiées par Adam et Tannery. Correspondance IV. Juillet 1643-avril 1647. (AT IV)*. Paris : Vrin.
- Herivel, J. (1965), *The Background to Newton's 'Principia' : A Study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664-1684*. Oxford University Press.
- Michel Ghins
 Centre de philosophie des sciences
 Institut Supérieur de Philosophie
 Place cardinal Mercier, 14
 B-1348 Louvain-la-Neuve
Michel.ghins@uclouvain.be
- "Les lois des chocs chez Descartes" in *La raison par quatre chemins. En hommage à Claude Troisfontaines*. Jean Leclercq (ed.). Bibliothèque philosophique de Louvain vol. 73, 97-115. Louvain : Peeters. 2007.