

Chapitre II

ERRATA

4.2. Section multi-espace :

4.2.1. Analyse conforme & transformations asymptotiques

Sur film fin dénoté '0', les approximations asymptotiques et leur critère de calculabilité sont les suivants (voir annexe) :

$$\left. \begin{aligned} {}^0_x CSR^- &\approx \frac{\pi}{\ln(4\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\pi \Lambda_g / T} \\ {}^0_x CSR^+ &\approx \frac{4}{\pi} \exp(-\frac{1}{2}\pi \cdot \Lambda_g / T) \\ {}^0_{xy} CSR^+ &\approx \frac{\frac{1}{2}\Lambda_c}{T} + \frac{\ln(4)}{\pi} \\ {}^0_y CSR &\approx {}^0_{xy} CSR^+ - {}^0_x CSR^+ \end{aligned} \right| \begin{aligned} &T / \Lambda_{ID} \\ &\leq \frac{-\pi/2}{\ln(2^\xi)} \end{aligned} \quad \text{éq-II.30}$$

La table-II.0.1 énumère les seuils d'épaisseurs fines.

Précision :		Demi	Simple	Double
Support / Critère				
<i>fin</i>	$T / \Lambda_{ID} <$	1/5	9%	4%

table-II.0.1 – Multi-espace : seuils de fiabilité du calcul selon la tolérance-machine ξ (resp. 10^{-3} , 10^{-7} ou 10^{-16} en 16, 32 ou 64 bits), en monocouche fine

4.2.2. Propriétés et cartographie

4.2.3. Validations numériques (éléments finis)

Voir publication, en cours de soumission au 2019-01-16.

ANNEXES

VI. Section multi-espace

B. Équations-limites :

En utilisant la définition de $\tau^{-1} = K(\iota k)/K(\iota k') = \frac{1}{2} \Lambda_{ID}/T$ et sa limite à ${}^0\iota k \rightarrow 1$, on développe :

$$\frac{1+{}^0\iota k}{1-{}^0\iota k} = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{2} \pi \Lambda_{ID}/T\right), \quad \text{soit} \quad {}^0\iota k = \tanh\left[\pi \frac{\Lambda_{ID}}{4T} - \ln(2)\right]$$

$$\text{ou encore} \quad {}^0\iota k = \tanh\{\eta \cdot \Lambda_{ID}^e\}$$

avec $\eta = \pi/(4T)$, $\Lambda_{ID}^e = \Lambda_c + \Lambda_g^e$ et $\Lambda_g^e = [\Lambda_g - \ln(2)]/\eta$.

Le pôle 0w_4 se réécrit alors avec un terme $\ln(2)$ additionnel :

$${}^0w_2 \cong \tanh(\frac{1}{4} \pi \Lambda_c/T) \quad \text{mais} \quad {}^0w_4 = 1/{}^0\iota k = \coth\{\eta \cdot \Lambda_{ID}^e\}. \quad \text{éq-II.57}$$

Avec ce qui précède, on corrige le développement en transverse :

$$\begin{aligned} {}^0k_x &\cong \tanh(\eta \Lambda_c) \sqrt{\frac{1 - \tanh^2(\eta \Lambda_{ID}^e)}{1 - [\tanh(\eta \Lambda_{ID}^e) \tanh(\eta \Lambda_c)]^2}} \\ &\cong \tanh(\eta \Lambda_c) \sqrt{\frac{1}{\cosh^2(\eta \Lambda_{ID}^e) - [\sinh(\eta \Lambda_{ID}^e) \tanh(\eta \Lambda_c)]^2}} \\ &\cong \tanh(\eta \Lambda_c) \left\{ 1 + \sinh^2(\eta \Lambda_{ID}^e) [1 - \tanh^2(\eta \Lambda_c)] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\cong \tanh(\eta \Lambda_c) \left\{ 1 + \sinh^2(\eta \Lambda_{ID}^e) / \cosh^2(\eta \Lambda_c) \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\cong \tanh(\eta \Lambda_c) \left\{ 1 + [\tanh(\eta \Lambda_c) \cosh(\eta \Lambda_g^e) + \sinh(\eta \Lambda_g^e)]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \exp(-\eta \Lambda_g^e) \equiv \exp[-\eta \Lambda_g + \ln(2)] \end{aligned}$$

D'où les asymptotes modulaires correctes :

$$T \rightarrow 0 : \begin{cases} {}^0_t k \cong \tanh\left(\frac{\pi}{2T} \frac{1}{2} \Lambda_{ID} - \ln(2)\right) & \rightarrow 1 \\ {}^0_{xy} k \cong \tanh\left(\frac{\pi}{2T} \frac{1}{2} \Lambda_c\right) & \rightarrow 1 \\ {}^0_y k \cong \tanh\left(\frac{\pi}{2T} \frac{1}{2} \Lambda_c\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2T} \frac{1}{2} \Lambda_{ID} - \ln(2)\right) & \rightarrow 1 \\ {}^0_x k \approx 2 \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2T} \frac{1}{2} \Lambda_g\right) & \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{éq-II.58}$$

De même pour le module radial, où toujours $\eta = \pi/(4T)$:

$$\begin{aligned} {}^0_y k &\cong 1 + \left[\tanh(\eta \Lambda_c) - \tanh(\eta \Lambda_{ID}^e) \right] / \tanh(\eta \Lambda_g^e) \\ \frac{1+{}_y^0 k}{1-{}_y^0 k} &\cong -1 + 2 \tanh(\eta \Lambda_g^e) / \left[\tanh(\eta \Lambda_{ID}^e) - \tanh(\eta \Lambda_c) \right] \\ &\cong 2 \cosh^2(\eta \Lambda_c) \left[1 + \tanh(\eta \Lambda_c) \tanh(\eta \Lambda_g^e) \right] - 1 \\ &\xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{1}{2} \exp(2\eta \Lambda_c) \left[1 + \tanh(\eta \Lambda_g^e) \right] \end{aligned}$$

avant de conclure sur l'éq-II.30 corrigée :

$$T \rightarrow 0 : \begin{cases} {}^0_{xy} CSR^+ \approx \frac{\frac{1}{2} \Lambda_c}{T} + \frac{\ln(4)}{\pi} \\ {}^0_y CSR \approx \frac{\frac{1}{2} \Lambda_c}{T} + \frac{1}{\pi} \left(\ln(2) + \ln \left[1 + \tanh\left(\frac{\pi}{4T} \Lambda_g^e\right) \right] \right) \\ {}^0_x CSR^- \approx \frac{\pi}{\ln(4\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \pi \Lambda_g / T} \end{cases} \quad \text{éq-II.59}$$

La soustraction de la première à la seconde équation permet encore de dériver plus-avant :

$$\begin{aligned}
 {}^0_x CSR^+ &\approx \frac{1}{\pi} \left\{ \ln(2) - \ln \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{4} \pi \cdot \Lambda_g^e / T\right) \right] \right\} \\
 &\rightarrow \frac{1}{\pi} \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\pi}{T} \frac{1}{2} \Lambda_g^e \right) \right] \equiv \frac{1}{\pi} \ln \left\{ 1 + \exp \left(-\frac{\pi}{T} \frac{1}{2} \Lambda_g \right) \cdot e^{2 \ln(2)} \right\} \\
 \text{soit } {}^0_x CSR^+ &\approx \frac{4}{\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} \pi \cdot \Lambda_g / T \right) \text{ en fonction du } \Lambda_g \text{ initial.}
 \end{aligned}$$

C. Calculabilité des modules :

En limite film-fin, le module transverse complémentaire tend vers l'unité comme les autres modules (éq-II.58) mais la difficulté du calcul concerne d'abord le module transverse complémentaire : ${}^0_x k' \geq {}^0_t k \geq {}^0_{xy} k \geq {}^0_y k$. Dans le pire cas où $\Lambda_g \rightarrow \Lambda_{ID}$, ceci se produit au seuil suivant :

$$T \rightarrow 0 : \left({}^0_x k \leq \sqrt{2\xi} \right) \Leftrightarrow \frac{T}{\Lambda_{ID}} \leq \frac{-\pi}{2 \ln(\xi/2)}. \quad (\text{éq-II.30})$$

L'expérience montre néanmoins que la précision du calcul peut être affectée à proximité de ce seuil. Une marge d'un ou deux LSB pour le bruit de calcul améliore la situation, soit un facteur 2 ou 4 sur ξ – voir Chapitre I § 1.2.1.