

THESE DOCTORALE

LV. L. 16192



***LES THEOREMES DE HAHN-BANACH ET DE MACKEY
SE TRANSPORTENT PAR ADJONCTION A LA CATEGORIE
DES ESPACES QUASI-LOCALEMENT CONVEXES .***

Francis Borceux

INTRODUCTION

L'ensemble des applications linéaires continues entre deux espaces localement convexes ne se munit pas de manière canonique d'une structure d'espace localement convexe. Ceci fait, dans certains cas, la richesse de la théorie, en ce sens que l'on est amené à considérer sur l'espace en question des structures assez diversifiées ; mais parfois aussi cette lacune crée un réel problème, par exemple dans l'élaboration d'un calcul différentiel dans les espaces localement convexes.

Divers auteurs ont cherché à surmonter cette difficulté en généralisant la notion de topologie en celle de quasi-topologie : on axiomatise cette fois la notion de filtre convergeant plutôt que celle de partie ouverte. Je montrerai à la fin de ces notes (§5) comment cette démarche permet en fait d'obtenir sur la catégorie des espaces quasi-localement convexes un bifoncteur interne et un produit tensoriel qui en font une catégorie fermée monoïdale symétrique au sens de Eilenberg-Kelly.

Les quatre premiers paragraphes s'attachent quant à eux à donner un sens - et une démonstration - à la thèse proposée. L'exposé est assez succinct : une étude plus détaillée de la question se trouve déposée à la bibliothèque de l'Institut de Mathématique dans un travail que j'ai réalisé sur dix catégories fermées monoïdales symétriques au sens de Eilenberg-Kelly, fréquemment utilisées en analyse supérieure. (Séminaire d'Algèbre Catégorique sous la direction de R.Laverdhomme - Exemples de catégories - par Francis Borceux - Louvain 1970-1971)

Le paragraphe premier décrit la notion de quasi-topologie et caractérise celle de quasi-topologie localement convexe par des propriétés des filtres convergeant vers l'origine.

Cette caractérisation a comme conséquence immédiate le fait que la catégorie QLC des espa-

ces quasi-localement convexes a des structures initiales et finales (§2) ; des résultats obtenus dans ma dissertation (§X-5) me permettent alors d'affirmer que QLC est complète à gauche et à droite, a des générateurs et des cogénérateurs, des objets injectifs et projectifs, etc...

Les espaces localement convexes et les espaces bornologiques convexes sont trivialement des cas particuliers d'espaces quasi-localement convexe (§3) et l'algèbre catégorique (essentiellement le chapitre neuvième de ma dissertation) nous apprend cette fois que les injections canoniques admettent respectivement des adjoints à gauche et à droite qui sont en fait des rétractions .

L'existence des transformations naturelles liées aux adjonctions permet alors (§4) de caractériser les formes linéaires quasi-continues vérifiant la propriété d'extension de Hahn-Banach ainsi que les espaces quasi-localement convexes vérifiant la relation sur les bornés décrite par le théorème de Mackey .

Monsieur Boël m'a rendu le grand service de lire avec attention la première forme de ce travail et ses suggestions judicieuses m'ont permis de l'améliorer beaucoup . Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude .

1: Caractérisation des QLC

Définition 1

Un espace quasi-topologique est un couple (E, π) où

(1) E est un ensemble

(2) $\pi: E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ est une application telle que pour tout x de E

i : $x \in \pi(x)$

ii : $F \in \pi(x)$ et $F' \supseteq F \Rightarrow F' \in \pi(x)$

iii : $F \in \pi(x)$ et $F' \in \pi(x) \Rightarrow F \vee F' \in \pi(x)$

où $\mathcal{F}(E) = \{F \mid F \text{ est un filtre sur l'ensemble } E\}$

$x \in$ est le filtre des sur-ensembles de x

$F \vee F'$ est la borne inférieure des filtres F et F' , c'est-à-

dire le filtre dont les éléments sont les $A \cup A'$ où $A \in F$ et $A' \in F'$.

L'ensemble $\pi(x)$ est l'ensemble des filtres convergeant vers x .

Définition 2

Soient (E, π) et (E', π') deux espaces quasi topologiques.

Une application $f: E \rightarrow E'$ est quasi continue ssi

$\forall x \in E \quad F \in \pi(x) \Rightarrow f(F) \in \pi'(f(x))$

Définition 3

Un espace quasi-localement convexe (en abrégé un QLC)

est un couple (E, π) tel que

(1) E est un espace vectoriel réel .

(2) π est une quasi-topologie sur E telle que

i : l'addition $+: E \times E \rightarrow E$ est quasi continue

ii : la multiplication scalaire $\cdot: R \times E \rightarrow E$ est quasi-continue

iii : $F \in \pi(x) \Rightarrow \hat{F} \in \pi(x)$

où $\hat{F}$ désigne le filtre engendré par les enveloppes convexes des éléments du filtre F .

R est muni de sa quasi-topologie habituelle et $E \times E$ et $R \times E$ des quasi-topologies produits . (cfr. rapports de séminaire mentionnés dans l'introduction) .

Nous noterons encore QLC la catégorie des espaces quasi-localement convexes et des applications linéaires quasi-continues .

Théorème 1

Dans un QLC, les translations sont quasi-continues .

Soient (E, π) un QLC et a un point de E .

Notons $t_a : E \rightarrow E$ où $t_a(b) = a + b$ la translation correspondante .



L'identité sur E et l'application constante sur a sont quasi-continues, d'où une unique factorisation quasi-continue θ à travers le produit ; $\theta(b) = (b, a)$.

Comme $t_a = + \circ \theta$, t_a est quasi-continue .

//

Théorème 2

Dans un QLC, les homothéties sont continues .

Soient (E, π) un QLC et α un nombre réel .

Notons $h_\alpha : E \rightarrow E$ où $h_\alpha(a) = \alpha a$ l'homothétie correspondante .



L'identité sur E et l'application constante sur α sont quasi-continues, d'où une unique factorisation quasi-continue θ à travers le produit ; $\theta(a) = (\alpha, a)$

Comme $h_\alpha = \cdot \circ \theta$, h_α est quasi-continue .

//

Théorème 3

Soient (E, π) et (E, π') deux QLC .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\pi \leq \pi'$ (c-à-d : $\forall x \in E \quad \pi(x) \leq \pi'(x)$)
- (2) $\pi(0) \leq \pi'(0)$

$$\text{car } F \in \pi(x) \Rightarrow t_{-x}(F) \in \pi(0) \quad \text{th.1}$$

$$\Rightarrow t_{-x}(F) \in \pi'(0)$$

$$\Rightarrow F = (t_x \circ t_{-x})(F) \in \pi'(x) \quad \text{th.1}$$

//

Théorème 4

Soient E un espace vectoriel réel

π_0 une famille de filtres de E telle que

- (1) $F \in \pi_0$ et $F' \supseteq F \Rightarrow F' \in \pi_0$
- (2) $F \in \pi_0$ et $F' \in \pi_0 \Rightarrow F \cap F' \in \pi_0$

- (3) $F \in \pi_0 \Rightarrow \widehat{F} \in \pi_0$
- (4) $F \in \pi_0 \Rightarrow \nu_R^0(0) \cdot F \in \pi_0$
- (5) $x \in E \Rightarrow \nu_R^0(0) \cdot x \in \pi_0$
- (6) $F \in \pi_0$ et $\alpha \in R \Rightarrow \alpha \cdot F \in \pi_0$

Alors il existe une unique structure de QLC sur E telle que

$$\pi(0) = \pi_0$$

Ces conditions sont évidemment nécessaires ; il nous faut prouver qu'elles sont suffisantes .

Pour tout x de E posons $\pi(x) = x + \pi_0$

On obtient de la sorte une structure de QLC sur E car

- (1) $x \in \pi = x + 0 \in \pi = x + \nu_R^0(0) \cdot 0 \in \pi(x)$
- (2) $F \in \pi(x)$ et $F' \in \pi \Rightarrow \exists F_0 \in \pi_0$ tel que $F = x + F_0$ et $F' \in \pi$
 $\Rightarrow F' - x \in \pi - x = F_0$ et $F_0 \in \pi_0$
 $\Rightarrow F' - x \in \pi_0$
 $\Rightarrow F' = x + (F' - x) \in \pi(x)$
- (3) $F \in \pi(x)$ et $F' \in \pi(x) \Rightarrow \exists F_0, F'_0 \in \pi_0$ tels que $F = x + F_0$ et $F' = x + F'_0$
 $\Rightarrow (F - x) \wedge (F' - x) = F_0 \wedge F'_0 \in \pi_0$
 $\Rightarrow F \wedge F' = x + ((F - x) \wedge (F' - x)) \in \pi(x)$
- (4) $F \in \pi(x) \Rightarrow \exists F_0 \in \pi_0$ tel que $F = x + F_0$
 $\Rightarrow \widehat{F - x} = \widehat{F} - x = \widehat{F_0} \in \pi_0$
 $\Rightarrow \widehat{F} = x + (\widehat{F} - x) \in \pi(x)$
- (5) π_0 est stable pour l'addition car
 $F \in \pi_0$ et $F' \in \pi_0 \Rightarrow F + F' \in (F \wedge F') + (F \wedge F') \in \widehat{(F \wedge F')} + \widehat{(F \wedge F')} = 2\widehat{F \wedge F'} \in \pi_0$
 $\Rightarrow F + F' \in \pi_0$
- (6) l'addition est quasi-continue car
 $F \in \pi(x)$ et $F' \in \pi(y) \Rightarrow \exists F_0, F'_0 \in \pi_0$ tels que $F = x + F_0$ et $F' = y + F'_0$
 $\Rightarrow (F - x) + (F' - y) = F_0 + F'_0 \in \pi_0$
 $\Rightarrow F + F' = (x + y) + ((F - x) + (F' - y)) \in \pi(x + y)$
- (7) la multiplication scalaire est quasi-continue car
 $F \in \pi(x)$ et $\alpha \in R \Rightarrow \alpha \in R$ et $\exists F_0 \in \pi_0$ tel que $F = x + F_0$
 $\Rightarrow \nu_R^0(\alpha) \cdot F = (\alpha + \nu_R^0(0)) \cdot (x + F_0)$
 $= \alpha x + \nu_R^0(0) \cdot x + \alpha F_0 + \nu_R^0(0) \cdot F_0$
 $\in \alpha x + \pi_0 + \pi_0 + \pi_0$
 $\in \alpha x + \pi_0$
 $\Rightarrow \nu_R^0(\alpha) \cdot F \in \pi(x)$
- (8) $\pi(0) = 0 + \pi_0 = \pi_0$
- (9) L'unicité découle du théorème 3 .

Théorème 5

Soient (E, π) et (E', π') deux QLC .

$f: E \rightarrow E'$ une application linéaire .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est quasi-continue
- (2) $\forall F \quad F \in \pi(0) \Rightarrow f(F) \in \pi'(0)$

$$F \in \pi(x) \Rightarrow F - x \in \pi(0)$$

$$\Rightarrow f(F - x) = f(F) - f(x) \in \pi'(0)$$

$$\Rightarrow f(F) \in f(x) + \pi'(0) = \pi'(f(x))$$

//

2: Structures initiales et finales

Notons $\mathcal{E}_R$ la catégorie des espaces vectoriels réels .

$D: \text{QLC} \rightarrow \mathcal{E}_R$ où $D(E, \pi) = E$ le foncteur de déstructuration .

La théorie développée dans le paragraphe X-5 de ma dissertation trouve dans ce contexte une application particulièrement efficace, les diverses affirmations annoncées étant en effet des conséquences directes des théorèmes de X-5 .

Théorème 6

QLC possède des structures initiales au-dessus de $\mathcal{E}_R$
modulo le foncteur de déstructuration D .

Soient $(E_i, \pi_i)_{i \in I}$ une famille de QLC

E un espace vectoriel réel

$(f_i: E \rightarrow E_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires

En appliquant le théorème 4 on obtient une structure de QLC

sur E - visiblement initiale pour la famille des f_i - en posant

$\pi_0 = \{F \mid F \text{ est un filtre sur E tel que : } \forall i \in I, f_i(F) \in \pi_i(0)\}$ //

Théorème 7

QLC possède des structures finales au-dessus de $\mathcal{E}_R$
modulo le foncteur de déstructuration D .

Soient $(E_i, \pi_i)_{i \in I}$ une famille de QLC

E un espace vectoriel réel

$(f_i: E_i \rightarrow E)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires

En appliquant le théorème 4 on obtient une structure de QLC

sur E - visiblement finale pour la famille des f_i - en posant

$\pi_0 = \left\{ F \mid \begin{array}{l} F \text{ est un filtre sur E} \\ \exists F_1 \dots F_n \text{ filtres sur E tels que pour tout } j \in \{1, \dots, n\} \\ (\exists x_j \in E \text{ tel que } F_j = \pi_j(0) \cdot x_j) \text{ ou } (\exists F'_j \in \pi_j(0) \text{ tel que } F_j = f_{1_j}(F'_j)) \\ F \supseteq F_1 \wedge \dots \wedge F_n \end{array} \right\}$

d'où le résultat . //

Théorème 8

| D est fidèle

//

Théorème 9

| D possède un adjoint à gauche L tel que $D \circ L = 1_{E_R}$

//

On se rappellera que $L(X)$ est la plus fine structure de QLC sur l'espace vectoriel X .

Théorème 10

| D possède un adjoint à droite M tel que $D \circ M = 1_{E_R}$

//

On se rappellera que $M(X)$ est la moins fine structure de QLC sur l'espace vectoriel X .

Théorème 11

| Sur tout espace vectoriel réel, il existe une plus fine
et une moins fine structure de QLC .

//

Théorème 12

| QLC est complète et D commute aux limites .

//

Théorème 13

| Les monomorphismes de QLC sont exactement les injections
linéaires quasi-continues .

//

Théorème 14

| Les épimorphismes de QLC sont exactement les surjections
linéaires quasi-continues .

//

Théorème 15

| Tout espace vectoriel réel muni de sa plus fine structure
de QLC est un objet projectif de QLC .

//

Théorème 16

| Tout espace vectoriel réel muni de sa structure grossière
de QLC est un objet injectif de QLC .

//

Théorème 17

| Tout espace vectoriel réel non nul muni de sa plus fine
| structure de QLC est un générateur de QLC . //

Théorème 18

| Tout espace vectoriel réel non nul muni de sa moins fine
| structure de QLC est un cogénérateur de QLC . //

Théorème 19

| QLC possède un objet zéro . //

3: Cas des ELC et des QLC

Théorème 20.

La catégorie ELC des espaces localement convexes est une sous-catégorie pleine de QLC.

Si $(E, \mathcal{C})$ est un ELC, les filtres convergents pour $\mathcal{C}$ constituent visiblement une quasi-topologie localement convexe. En outre une application étant continue ssi elle transforme tout filtre convergent en un filtre convergent, il suit qu'une application linéaire entre deux ELC est continue ssi elle est quasi-continue, d'où le caractère plein. //

Théorème 21

Le foncteur inclusion canonique $Q: \text{ELC} \rightarrow \text{QLC}$ admet un adjoint à gauche τ tel que $\tau \circ Q = 1_{\text{ELC}}$, $D \circ Q = D$, $D \circ \tau = D$.

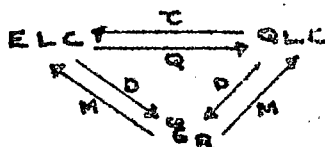
ELC a des structures initiales (cfr. théorie des ELC) donc est complète à gauche et a des cogénérateurs.

Les définitions des structures initiales de ELC et QLC montrent que Q commute trivialement aux structures initiales, donc en particulier aux limites à gauche.

Dès lors Q admet un adjoint à gauche et - si l'on remarque que la situation ci-dessus se relativise de manière évidente dans $\mathcal{E}_R$ - le théorème IX-6 de ma dissertation indique que l'adjonction se relativise également dans $\mathcal{E}_R$.

Q étant pleinement fidèle, nécessairement $\tau \circ Q = 1_{\text{ELC}}$.

Si maintenant D désigne indifféremment le foncteur de destruction sur QLC ou sa restriction à ELC, et si M désigne à la fois le foncteur $M: \mathcal{E}_R \rightarrow \text{QLC}$ et sa corestriction à ELC, on a $D \circ Q = D$ par construction et $M \circ Q = M$. En outre $D \circ M$ et $D \circ \tau \circ Q \Rightarrow D \circ \tau \circ M \circ Q = M$, d'où $D \circ \tau = D$ vu l'unicité de l'adjoint.



//

Théorème 22

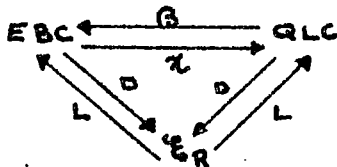
La catégorie EBC des espaces bornologiques convexes est une sous-catégorie pleine de QLC.

Si $(E, \mathcal{B})$ est un espace bornologique convexe, on pose $(\chi \mathcal{B})_0 = \{F \mid F \text{ est un filtre sur } E \text{ et } \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } F \supseteq \mathcal{V}_R(0) \cdot B\}$. Le théorème 4 permet de conclure que l'on obtient de la sorte un QLC $(E, \chi \mathcal{B})$; en outre si $(E', \mathcal{B}')$ est un autre EBC et si $f: E \rightarrow E'$ est linéaire, il est clair que f est bornée pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ssi elle est quasi-continue pour $\chi \mathcal{B}$ et $\chi \mathcal{B}'$. χ s'agence donc en un foncteur $\chi: \text{EBC} \rightarrow \text{QLC}$ injectif et pleinement fidèle. //

Théorème 23

Le foncteur inclusion canonique $\chi: \text{EBC} \rightarrow \text{QLC}$ admet un adjoint à droite β tel que $\beta \cdot \chi = 1_{\text{EBC}}$, $D \cdot \chi = D$, $D \cdot \beta = D$.

la démonstration est absolument analogue à celle du théorème 21 mais en partant cette fois des structures finales.



On peut décrire explicitement les foncteurs τ et β : soit (E, π) un QLC ;

On choisit comme système fondamental de voisinages de l'origine de $\tau(E, \pi)$ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{L}_\pi = \{D \mid D \text{ est un disque non vide tel que : } \forall x \in D \quad \forall F \in \pi(x) \quad D \in F\}$$

On choisit comme bornés de $\beta(E, \pi)$ les parties B de E telles que $\mathcal{V}_R(0) \cdot B \in \pi(0)$.

Notons que les descriptions explicites de τ et de β ne nous seront pas utiles dans la suite de ces notes.

Théorème 24

Le foncteur $B = \beta \cdot \chi$ est adjoint à droite du foncteur $T = \tau \cdot \chi$.

En vertu des théorèmes 21 et 23 ; on retrouve ainsi un résultat classique dû à Waelbroeck. //

Théorème 25

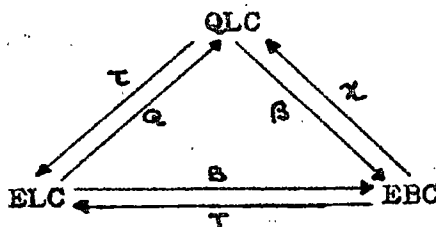
La structure initiale de QLC pour une famille d'applications linéaires à valeurs dans des ELC est en fait une structure de ELC .

c'est l'expression du fait que Q commute avec les structures initiales . //

Théorème 26

La structure finale de QLC pour une famille d'applications définies sur des EBC est en fait une structure de EBC .

c'est l'expression du fait que χ commute aux structures finales //



4: Théorèmes de Hahn-Banach et Mackey

Théorème 27 (de Hahn-Banach)

Soient (E, π) un QLC

E' un sous-espace vectoriel de E

π' la quasi-topologie induite sur E'

$f': E' \rightarrow R$ une forme linéaire quasi-continue pour π'

$(\tau\pi)'$ la topologie induite par $\tau\pi$ sur E'

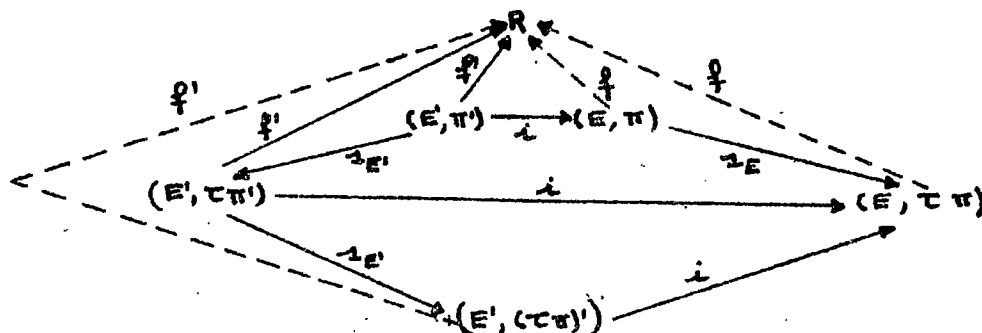
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f' s'étend en une forme linéaire quasi-continue sur (E, π)
- (2) f' est continue pour $(\tau\pi)'$.

$i: (E', \pi') \rightarrow (E, \pi)$ est quasi continue, donc $i: (E', \tau\pi') \rightarrow (E, \tau\pi)$ est continue ; or $(\tau\pi)'$ est la moins fine topologie sur E' rendant continue l'injection canonique, donc $\tau\pi'$ est plus fine que $(\tau\pi)'$ d'où l'identité $1_{E'}: (E', \tau\pi') \rightarrow (E', (\tau\pi)')$ est continue . Par ailleurs f' étant π' -quasi-continue et R étant sa propre image par τ , f' est également $\tau\pi'$ -continue .

L'adjonction $\tau \dashv Q$ nous apprend encore que $1_E: (E', \pi') \rightarrow (E', \tau\pi')$ et $1_E: (E, \pi) \rightarrow (E, \tau\pi)$ sont quasi-continues .

On a donc la situation suivante :



(1) $\implies$ (2)

Notons $f: E \rightarrow R$ l'extension quasi-continue de f' .

Vu l'adjonction $\tau \dashv Q$, f est $\tau\pi$ -continue et donc f' est $(\tau\pi)'$ -continue .

(2) $\implies$ (1)

f' étant $(\tau\pi)'$ -continue s'étend en une forme linéaire $f: E \rightarrow R$

$\tau\pi$ -continue, en vertu du théorème de Hahn-Banach pour les ELC .
Dès lors f est π -quasi-continue. //

Remarquons que la condition (2) est en particulier vérifiée lorsque $(\tau\pi)' = \tau\pi'$; Waelbroeck a montré qu'il existait des ELC ne vérifiant pas cette condition .

Définition 4

| Soit (E, π) un QLC .

| $\sigma(E, \pi)$ est la structure initiale de QLC sur E pour la famille des formes linéaires π -quasi-continues .

Théorème 28

| Soit (E, π) un QLC .

| La quasi-topologie $\sigma(E, \pi)$ est en fait une topologie .

en vertu du théorème 25 . //

Théorème 29

| Soit (E, π) un QLC .

| Les topologies $\sigma(E, \pi)$ et $\sigma(E, \tau\pi)$ coïncident .

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire .

Si f est π -quasi-continue, alors f est $\tau\pi$ -continue puisque $\tau\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Si f est $\tau\pi$ -continue, vu l'adjonction $\tau \dashv Q$, $1_E: (E, \pi) \rightarrow (E, \tau\pi)$ est quasi-continue et donc f est π -quasi-continue .

$\sigma(E, \pi)$ et $\sigma(E, \tau\pi)$ sont donc deux topologies initiales pour la même famille d'applications linéaires : elles coïncident . //

Théorème 30 (de Mackey)

| Soit (E, π) un QLC

| Les conditions suivantes sont équivalentes :

| (1) (E, π) et $(E, \sigma(E, \pi))$ ont les mêmes bornés

| (2) (E, π) et $(E, \tau\pi)$ ont les mêmes bornés

Du point de vue quasi-topologique - c'est-à-dire ensembles de filtres convergents - on a les inclusions suivantes :

$$\pi \subseteq \tau\pi \subseteq \sigma(E, \tau\pi) = \sigma(E, \pi)$$

d'où en appliquant le foncteur β :

$$\beta(\pi) \subseteq \beta(\tau\pi) \subseteq \beta(\sigma(E, \tau\pi)) = \beta(\sigma(E, \pi))$$

Mais le théorème de Mackey dans le cas des ELC indique que $(E, \tau\pi)$ et $(E, \sigma(E, \tau\pi))$ ont les mêmes bornés, d'où

$$\beta(\pi) \subseteq \beta(\tau\pi) = \beta(\sigma(E, \tau\pi)) = \beta(\sigma(E, \pi))$$

L'équivalence annoncée en découle aussitôt .

//

5: Convergence locale et produit tensoriel

Les résultats de ce paragraphe s'établissent par des applications élémentaires des définitions et des théorèmes 3 et 4 ; les démonstrations seront donc omises .

Théorème 31

La catégorie QLC possède un bifoncteur interne admettant R comme unité .

Définissons $H: \text{QLC} \times \text{QLC} \longrightarrow \text{QLC}$

$$((E, \pi), (E', \pi')) \rightsquigarrow (\text{Hom}_{\text{QLC}}((E, \pi), (E', \pi')), H(\pi, \pi'))$$

où $H(\pi, \pi')$ est caractérisé par le fait que :

$$H(\pi, \pi')(0) = \left\{ G \mid \begin{array}{l} G \text{ est un filtre sur } \text{Hom}_{\text{QLC}}((E, \pi), (E', \pi')) \\ \forall F \in \pi(0) \quad G(F) \in \pi'(0) \end{array} \right\}$$

Le fait que R soit une H-unité s'exprime par les isomorphismes :
pour tout QLC $(E, \pi) \quad (E, \pi) \simeq H(R, (E, \pi)) \quad //$

Théorème 32

La catégorie QLC possède un produit tensoriel associatif, symétrique et admettant R comme unité .

Soient (E, π) et (E', π') deux QLC .

Sur le produit tensoriel $E \otimes E'$ on définit une structure de QLC notée $\pi \otimes \pi'$ et caractérisée par le fait que :

$$(\pi \otimes \pi')(0) = \left\{ G \mid \begin{array}{l} G \text{ est un filtre sur } E \otimes E' \\ \exists F \in \pi(0) \quad \exists F' \in \pi'(0) \text{ tels que } G \supseteq F \otimes F' \end{array} \right\}$$

$((E \otimes E'), (\pi \otimes \pi'))$ est alors le produit tensoriel cherché . //

Théorème 33

Soient (E_1, π_1) , (E_2, π_2) , (E_3, π_3) des QLC .

On a des isomorphismes naturels :

$$H((E_1 \otimes E_2, \pi_1 \otimes \pi_2), (E_3, \pi_3)) \simeq H((E_1, \pi_1), H((E_2, \pi_2), (E_3, \pi_3)))$$

On a donc un produit tensoriel au sens de Eilenberg-Kelly //

Théorème 34

Il existe une injection bilinéaire quasi-continue

$$\alpha : (E_1, \pi_1) \times (E_2, \pi_2) \longrightarrow (E_1, \pi_1) \otimes (E_2, \pi_2)$$

on a $(x, y) = x \otimes y$.

//

Théorème 35

Toute application bilinéaire quasi-continue

$$g : (E_1, \pi_1) \times (E_2, \pi_2) \longrightarrow (E_3, \pi_3)$$

se factorise de manière unique à travers α en une application linéaire quasi-continue .

$$\begin{array}{ccc} (E_1, \pi_1) \times (E_2, \pi_2) & \xrightarrow{\quad g \quad} & (E_3, \pi_3) \\ \alpha \downarrow & & \uparrow \hat{g} \\ (E_1, \pi_1) \otimes (E_2, \pi_2) & \xrightarrow{\quad \hat{g} \quad} & (E_3, \pi_3) \end{array}$$

//

Théorème 36

La catégorie QLC est fermée monoïdale symétrique au sens de Eilenberg-Kelly .

//