

CHAPITRE 3

Structure de $F(M; 2)$ pour une variété M monogène

Dans ce chapitre, nous étudions les variétés compactes, simplement connexes, sans bord et monogènes. Nous déterminons le type d'homotopie rationnel de $F(M; 2)$, en calculant le modèle minimal de Sullivan $m_{F(M; 2)}$. Nous déterminons aussi le type d'homotopie rationnel de la fibre homotopique de l'inclusion $F(M; 2) \hookrightarrow M \times M$.

L'algèbre de cohomologie d'une variété monogène possède l'une des deux formes suivantes :

Soit

$$H^*(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]/x^k \text{ avec } |x| = 2l,$$

soit

$$H^*(M; \mathbb{Q}) = \Lambda(x) \text{ avec } |x| = 2l + 1.$$

Nous allons traiter ces deux cas séparément.

3.1. $H^*(M; \mathbb{Q}) = \Lambda(x)$

Dans ce premier cas, la variété M a le type d'homotopie rationnel de S^{2l+1} . D'après P.Lambrechts et D.Stanley [15], nous en déduisons que

$$F(M; 2) \approx_0 F(S^{2l+1}; 2) \approx S^{2l+1}.$$

Notons F la fibre homotopique de l'inclusion $F(S^n; 2) \hookrightarrow S^n \times S^n$ et $p_1 : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ la projection sur le premier facteur. Notons encore $i : S^n \rightarrow S^n \times S^n : x \mapsto (x, -x)$.

Rappelons aussi que si on note F_g la fibre homotopique d'une application g , alors pour tout couple d'applications composables (f, g) , on a une fibration homotopique

$$F_f \rightarrow F_{g \circ f} \rightarrow F_g.$$

Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & S^n \times S^n \\ & \searrow Id & \downarrow p_1 \\ & & S^n \end{array}$$

entraîne donc la fibration homotopique

$$F_i \rightarrow F_{p_1 \circ i} \approx * \rightarrow F_{p_1} = S^n.$$

Par conséquent, $F_i \approx \Omega S^n$.

D'autre part, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\bar{\beta}} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n & \xrightarrow[\approx]{\beta} & F(S^n; 2) \\ \downarrow i & \nearrow & \\ S^n \times S^n & & \end{array}$$

l'application $\bar{\beta}$ est une équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexes et donc une équivalence d'homotopie.

Nous concluons que $F \approx \Omega S^n$.

$$3.2. \quad H^*(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]/x^k, \quad |x| = 2l$$

Nous nous intéressons uniquement au cas $k \geq 3$, le cas $k = 2$ ayant été traité précédemment. Choisissons un cocycle $\psi \in A_{PL}(M)$ tel que $[\varphi] = x$. Notons

$$\theta : (\Lambda(a), 0) \rightarrow A_{PL}(M)$$

le morphisme de dga défini par $\theta(a) = \psi$. Introduisons un second générateur b de degré $2lk - 1$, tel que $d(b) = a^k$. Comme φ^k est un cocycle et que $x^k = 0$, il existe $\psi \in A_{PL}(M)$ avec $d\psi = \varphi^k$. Dès lors, l'extension de θ ,

$$\bar{\theta} : (\Lambda(a, b), d) \rightarrow A_{PL}(M)$$

définie par $\bar{\theta}(b) = \psi$ est un quasi-isomorphisme et $(\Lambda(a, b), d)$ est donc le modèle minimal de M .

Pour rappel, l'homologie de $M \setminus m_0$ a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} H_p(M \setminus m_0; \mathbb{Q}) &\cong H_p(M; \mathbb{Q}) \text{ pour } q \neq 2l(k-1) \text{ et} \\ H_{2l(k-1)}(M \setminus m_0; \mathbb{Q}) &= 0. \end{aligned}$$

L'algèbre de Sullivan $(\Lambda(a', c), d')$ définie par $|a'| = 2l$ et $d'(c) = (a')^{k-1}$ est donc le modèle minimal de Sullivan de $M \setminus m_0$.

Le morphisme de dga $\varphi : (\Lambda(a, b), d) \rightarrow (\Lambda(a', c), d')$ défini par $\varphi(a) = a'$ et $\varphi(b) = a' \cdot c$, modélise l'inclusion $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$. Les choix $d(z) = a^{k-1}$, $d(t) = a \cdot z - b$ et $\bar{\varphi}(z) = c$, $\bar{\varphi}(a) = a$, $\bar{\varphi}(b) = a \cdot c$, $\bar{\varphi}(t) = 0$ définissent un modèle minimal relatif de φ :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(a, b), d) & \xrightarrow{\varphi} & (\Lambda(a', c), d') \\ & \searrow i \quad \nearrow \bar{\varphi} & \\ & (\Lambda(a, b, z, t), d) & \end{array}$$

En conclusion, $(\Lambda(z, t), 0)$ est le modèle minimal de la fibre homotopique de l'inclusion $M \setminus m_0 \hookrightarrow M$. Cette fibre a le type d'homotopie rationnel de $S^{2l(k-1)-1} \times K(\mathbb{Z}, 2kl - 2)$.

Enfin, la fibration $M \setminus m_0 \rightarrow F(M; 2) \rightarrow M$ implique l'existence d'une différentielle D définie sur $\Lambda(a, b) \otimes \Lambda(a', c)$ telle que $D = d$ sur $\Lambda(a, b)$, telle que la différentielle induite sur $\Lambda(a', c)$ soit d' et telle que l'adgc $(\Lambda(a, b, a', c), D)$ soit quasi-isomorphe à $A_{PL}(F(M; 2))$.

Pour des raisons de degré, il faut que $D(a') = 0$. De plus, d'après le Théorème 2.14,

$$H^*(F(M; 2); \mathbb{Q}) \cong \frac{H^*(M; \mathbb{Q}) \otimes H^*(M; \mathbb{Q})}{(\Delta)}.$$

Dès lors, en posant $D(c) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i a'^{k-i-1}$, on obtient une telle différentielle D .

Corollaire 3.1. Le modèle minimal de Sullivan de $F(M; 2)$ est l'algèbre de cochaines $(\Lambda(a, b, a', c), D)$ où $Da = Da' = 0$, $Db = a^k$ et $Dc = \sum_{i=0}^{k-1} a^i a'^{k-i-1}$.

Corollaire 3.2. Le morphisme $\pi_*(i) \otimes \mathbb{Q} : \pi_* F(M; 2) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(M^2) \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif si et seulement si $k \geq 3$, c'est-à-dire si et seulement si M n'a pas le type d'homotopie rationnel d'une sphère de dimension paire.

Remarque 3.3. Dans le cas particulier où $M = \mathbb{C}P(n)$, on peut calculer le type d'homotopie entier de la fibre F_0 de l'inclusion de $M \setminus m_0$ dans M .

On a tout d'abord la fibration de Ganea

$$S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P(n-1) \xrightarrow{j} \mathbb{C}P(\infty).$$

D'autre part, l'application j se factorise comme le composé

$$\mathbb{C}P(n-1) \xrightarrow{i} \mathbb{C}P(n) \xrightarrow{r} \mathbb{C}P(\infty).$$

Et donc on a une fibration $F_i \rightarrow F_j \rightarrow F_r$ qui donne

$$F = F_i \xrightarrow{\tau} S^{2n-1} \xrightarrow{\sigma} S^{2n+1}.$$

Comme σ est homotopiquement triviale, le morphisme $\pi_*(\tau)$ est surjectif. En relevant le générateur de $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$, on construit une section s de τ . L'espace $\Omega(S^{2n+1})$ agit sur F_i par l'holonomie h . Enfin, on remarque que l'application composée

$$\Omega(S^{2n+1}) \times S^{2n-1} \xrightarrow{1 \times s} \Omega(S^{2n+1}) \times F \xrightarrow{h} F$$

est une équivalence d'homotopie.