

Chapitre 3

Description statistique d'une surface rugueuse aléatoire

3.1 Introduction

La surface de la mer a été étudiée au chapitre 2, comme une surface déterministe. Mais son comportement spatio-temporel est aléatoire et une approche statistique est requise. L'approche déterministe est utile pour la compréhension des phénomènes physiques, tandis que l'approche statistique fournit le matériel nécessaire à la théorie électromagnétique de la diffusion. Nous décrirons les variations aléatoires de la surface, par les fonctions de densité de probabilité des déplacements et des pentes et par le spectre des déplacements.

Nous centrons ce chapitre sur la clarification des définitions des fonctions de densité de probabilité, des corrélations et des spectres. Ceci est nécessaire parce qu'il existe, dans la littérature, plusieurs définitions et plusieurs approches différentes et, dès lors, les spectres qui en résultent sont, eux aussi, différents (en nombre d'onde, en fréquence, directionnel en nombre d'onde, en module de nombre d'onde, en fréquence, directionnel en fréquence, ... : tableau 3.1). Après avoir opéré cette clarification, nous mettrons en évidence les relations entre ces différents spectres (figure 3.2 et tableau 3.2).

3.2 Paramètres descriptifs de la surface

La surface de la mer n'est pas plate mais présente une forme complexe et changeante. La distance entre un point de la surface et sa position moyenne est le déplacement de la surface. Il sera noté $\zeta(x,y,t)$. Si on mesure le déplacement de la surface en un point donné, (x_0,y_0) , on peut écrire $\zeta_0(t) = \zeta(x_0,y_0,t)$ et on obtient $\zeta_0(t_1), \dots, \zeta_0(t_n)$ en observant le déplacement de la surface au point (x_0,y_0) au cours du temps. Un histogramme peut être construit grâce à la connaissance de $\zeta_0(t_1), \dots, \zeta_0(t_n)$ (figure 3.1 (a)).

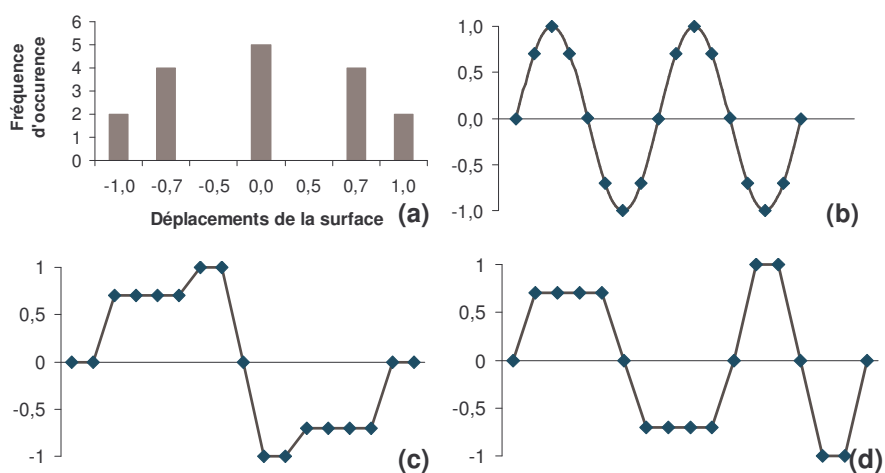


Figure 3.1 : Différentes surfaces (b), (c) et (d) qui proviennent du même histogramme (a)

Avec un simple histogramme, une partie des informations contenues dans les données est perdue. Considérons l'exemple suivant où la surface de la mer est supposée être sinusoidale (figure 3.1 (b)) avec l'histogramme donné à la figure 3.1 (a). Cet histogramme est le même pour les surfaces présentées aux figures 3.1 (c) et (d) ainsi que pour toutes les séries obtenues en permutant les déplacements de la surface en un point donné.

Il est clair que ces surfaces sont très différentes de la surface sinusoidale et que leurs pentes sont aussi différentes. Par ailleurs, la connaissance du déplacement de la surface en un point donné est insuffisante pour connaître la pente en cet endroit. La pente selon la

direction X est définie par :

$$\zeta_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\zeta(x+\Delta x, y_0, t) - \zeta(x, y_0, t)] / \Delta x$$

Il faut donc connaître la relation entre $\zeta(x+\Delta x, y_0, t)$ et $\zeta(x, y_0, t)$ pour obtenir la pente. Cette relation existe car la valeur de $\zeta(x, y_0, t)$ est physiquement liée à la valeur de $\zeta(x+\Delta x, y_0, t)$, mais elle a été perdue par la méthode utilisée pour les mesures de déplacement de la surface. Dès lors, les méthodes de mesure fournissent soit les propriétés statistiques des déplacements de la surface, soit celles des pentes de la surface.

3.3 Propriétés statistiques de la surface

La surface de la mer sera considérée comme un processus aléatoire. On la décrira donc par ses propriétés statistiques, en considérant le déplacement vertical $\zeta(x, y, t)$ en un point donné à un instant donné comme une variable aléatoire. Les propriétés statistiques comme la fonction de densité de probabilité, la fonction de densité de probabilité jointe, la covariance et le spectre sont définies dans cette section.

3.3.1 Fonction de densité de probabilité unidimensionnelle

Soit Z une variable aléatoire continue. La fonction de densité de probabilité (p.d.f.) de Z, $P(z)$, est définie par

$P(z) dz$ = probabilité que la variable aléatoire Z se trouve entre les valeurs z et $z+dz$

3.3.2 Moments de la p.d.f.

Le moment d'ordre n ($0 \leq n$) d'une variable aléatoire donnée Z est défini par

$$\alpha_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} z^n P(z) dz \quad (3.1.a)$$

et est noté

$$\alpha_n = E(z^n) = \langle z^n \rangle \quad (3.1.b)$$

où E est l'espérance mathématique ou la moyenne statistique, aussi symbolisée par $\langle \rangle$. Le moment d'ordre 1 (n=1) est une constante appelée la moyenne de la variable aléatoire Z :

$$\alpha_1 = \langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z P(z) dz = \mu \quad (3.2)$$

La variable aléatoire centrée est définie par :

$$y = z - \mu$$

et les moments centrés d'ordre n :

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^n P(z) dz = \langle y^n \rangle \quad (3.3)$$

Le moment centré d'ordre 1 est nul. Le moment centré d'ordre 2 (n=2) est la variance, σ^2 ,

$$\mu_2 = \sigma^2 = \langle y^2 \rangle \quad (3.4)$$

et σ est la déviation standard ou la valeur r.m.s. (root mean squared).

3.3.3 Cumulants de la p.d.f.

Si les moments centrés existent jusqu'à l'ordre n pour une p.d.f. unidimensionnelle donnée, les n premiers cumulants $K_1, \dots, K_n$ de la p.d.f. existent et sont définis comme (Kendall & Stuart, 1976) :

$$K_1 = 0$$

$$K_2 = \mu_2$$

$$K_3 = \mu_3$$

$$K_4 = \mu_4 - 3 \mu_2^2$$

$$K_5 = \mu_5 - 10 \mu_3 \mu_2$$

$$K_6 = \mu_6 - 15 \mu_4 \mu_2 - 10 \mu_3^2 + 30 \mu_2^3$$

$$K_7 = \mu_7 - 21 \mu_5 \mu_2 - 35 \mu_4 \mu_3 + 210 \mu_3 \mu_2^2$$

$$K_8 = \mu_8 - 28 \mu_6 \mu_2 - 56 \mu_5 \mu_3 - 35 \mu_4^2 + 420 \mu_4 \mu_2^2 + 560 \mu_3^2 \mu_2 - 630 \mu_2^4$$

Le coefficient d'obliquité (en anglais, skewness), γ_3 , est défini par :

$$\gamma_3 \equiv K_3 / K_2^{3/2}$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_3 = \mu_3 / \mu_2^{3/2} = \mu_3 / \sigma^3 \quad (3.5)$$

γ_3 est le moment ou cumulant d'ordre 3 pour la variable aléatoire normalisée centrée $(Z-\mu)/\sigma$. Le coefficient d'obliquité est une mesure de l'asymétrie de la p.d.f. de Z (ou $(Z-\mu)$ ou $(Z-\mu)/\sigma$).

Le coefficient d'escarpement (en anglais, kurtosis), γ_4 , est défini par :

$$\gamma_4 \equiv K_4 / K_2^2$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_4 = (\mu_4 / \mu_2^2) - 3 = (\mu_4 / \sigma^4) - 3 \quad (3.6)$$

Ce coefficient est une mesure du caractère plus pointu de la p.d.f., comparée à une gaussienne.

3.3.4 Fonction de densité de probabilité jointe

Soient 1 et 2, deux positions en deux temps différents : $\vec{r}_1, t_1$ et $\vec{r}_2, t_2$. Soit $\zeta(\vec{r}, t)$ une variable aléatoire spatio-temporelle comme, par exemple, le déplacement vertical de la surface ou la pente, et ζ_i sa valeur en i , c'est-à-dire $\zeta_i = \zeta(\vec{r}_i, t_i)$ pour $i = 1$ ou 2 . Dès lors, $P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2)$ est la fonction de densité de probabilité jointe de ces deux variables et elle est définie par :

$P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) d\zeta_1 d\zeta_2 =$ probabilité que ζ_1 en $(\vec{r}_1, t_1)$ et ζ_2 en $(\vec{r}_2, t_2)$ se

trouvent entre ζ_1 , $\zeta_1+d\zeta_1$ et ζ_2 , $\zeta_2+d\zeta_2$ respectivement.

Le processus $\zeta(\vec{r}, t)$ peut être

1. homogène au sens large, si la p.d.f. d'ordre deux est invariante par rapport à une translation dans l'espace :

$$P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1 + \vec{a}, \vec{r}_2 + \vec{a}, t_1, t_2) = P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) \quad (3.7)$$

2. stationnaire au sens large, si la p.d.f. d'ordre deux est invariante par rapport à une translation dans le temps :

$$P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1 + \tau, t_2 + \tau) = P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) \quad (3.8)$$

De plus, la fonction de densité de probabilité marginale de $P(\zeta_1, \zeta_2)$ est définie par :

$$P(\zeta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_j \quad i, j = 1 \text{ ou } 2$$

et la p.d.f. jointe est normalisée à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = 1$$

Si on considère les deux variables aléatoires au même moment, on parle de variables instantanées, c'est-à-dire de $\zeta_1(r_1, t_0)$ et $\zeta_2(r_2, t_0)$. Si on considère les variables au même endroit pendant un certain laps de temps, on parle de variables en un endroit fixé au cours du temps, c'est-à-dire de $\zeta_1(r_0, t_1)$ et $\zeta_2(r_0, t_2)$.

3.3.5 Généralisation des moments pour une p.d.f. bidimensionnelle

Soient Z_1 et Z_2 , deux variables aléatoires avec comme valeurs moyennes, respectivement, μ' et μ'' . Les moments d'ordre n_1+n_2 sont définis par :

$$\alpha_{n_1 n_2} = \langle Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} \rangle \quad (3.9)$$

et les moments centrés d'ordre (n_1+n_2) par

$$\mu_{n1n2} = \langle (z_1 - \mu')^{n1} (z_2 - \mu'')^{n2} \rangle \quad (3.10)$$

Pour les moments centrés d'ordre 2, on a :

$$\mu_{20} = \langle (z_1 - \mu')^2 \rangle = \sigma_1^2 \quad \text{et} \quad \mu_{02} = \langle (z_2 - \mu'')^2 \rangle = \sigma_2^2 \quad (3.11)$$

qui sont les variances de z_1 et z_2 , c'est-à-dire σ_1^2 et σ_2^2 respectivement et

$$\mu_{11} = \langle (z_1 - \mu') (z_2 - \mu'') \rangle = \Gamma(z_1, z_2) \quad (3.12)$$

qui est la covariance de (z_1, z_2) , notée $\Gamma(z_1, z_2)$.

Le coefficient de corrélation de z_1 et z_2 , ρ , est défini par :

$$\rho = \mu_{11} / \sigma_1 \sigma_2 = \langle (z_1 - \mu') / \sigma_1 (z_2 - \mu'') / \sigma_2 \rangle \quad (3.13)$$

De façon similaire, les moments centrés d'ordre 3 sont μ_{30} , μ_{21} , μ_{12} et μ_{03} ; les moments centrés d'ordre 4 sont μ_{40} , μ_{31} , μ_{22} , μ_{13} et μ_{04} et ainsi de suite.

3.3.6 Covariance

Supposons que la variable aléatoire ζ est une variable aléatoire centrée, c'est-à-dire dont la moyenne est nulle, $\langle \zeta \rangle = 0$. La covariance de $\zeta(\vec{r}, t)$ est définie par

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1 \zeta_2 P(\zeta_1, \zeta_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle \quad (3.14)$$

Si les hypothèses d'homogénéité et de stationnarité sont vérifiées, on a que :

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \Gamma(\vec{r}, t) \quad (3.15)$$

avec

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

et

$$t = t_2 - t_1$$

Ces hypothèses sont réalistes pour la surface de la mer, car la covariance varie plus rapidement avec les variables de séparation spatiale, r , et temporelle, t , qu'avec les variables de position spatiale, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, et temporelle, t_1 et t_2 .

On peut parler de la covariance de variables

1. instantanées

$$\Gamma(\vec{r}, 0) = \Gamma(\vec{r}) = \Gamma(r, \phi) = \langle \zeta(\vec{r}_1, t_0) \zeta(\vec{r}_2, t_0) \rangle \quad \forall t_0 \quad (3.16)$$

2. en un endroit fixé

$$\Gamma(\vec{0}, t) = \Gamma(t) = \langle \zeta(\vec{r}_0, t_1) \zeta(\vec{r}_0, t_2) \rangle \quad \forall \vec{r}_0 \quad (3.17)$$

Comme le champ de vagues est homogène, la covariance d'une variable instantanée, $\Gamma(\vec{r})$, est une fonction paire en $\vec{r}$:

$$\Gamma(\vec{r}) = \Gamma(-\vec{r}) \quad \text{par homogénéité} \quad (3.18)$$

Comme le champ de vagues est stationnaire, la covariance d'une variable en un endroit fixé, $\Gamma(t)$, est une fonction paire en t :

$$\Gamma(t) = \Gamma(-t) \quad \text{par stationnarité} \quad (3.19)$$

3.3.7 Spectres

Si les hypothèses d'homogénéité et de stationnarité sont satisfaites, on peut associer un spectre à la fonction de covariance (3.15).

a) Spectre en fréquence et nombre d'onde

Le spectre en fréquence et nombre d'onde, $\chi(\vec{K}, \omega)$, est défini comme la transformée de Fourier (FT) de $\Gamma(\vec{r}, t)$:

$$\Gamma(\vec{r}, t) = \text{FT}(\chi(\vec{K}, \omega))$$

où FT signifie qu'il s'agit d'une paire de transformée de Fourier, c'est-à-dire :

$$\chi(\vec{K}, \omega) = \int_t \int_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r}, t) e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{r} dt \quad (3.20.a)$$

$$\Gamma(\vec{r}, t) = 1/(2\pi)^3 \int_{\omega} \int_{\vec{K}} \chi(\vec{K}, \omega) e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{K} d\omega \quad (3.20.b)$$

b) Spectre en nombre d'onde

Le spectre en nombre d'onde, $\gamma(\vec{K})$, est défini comme la transformée de Fourier (FT) de la covariance d'une variable instantanée :

$$\gamma(\vec{K}) = \iint_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r}) e^{-j\vec{K} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (3.21.a)$$

$$\Gamma(\vec{r}) = 1/(2\pi)^2 \iint_{\vec{K}} \gamma(\vec{K}) e^{j\vec{K} \cdot \vec{r}} d\vec{K} \quad (3.21.b)$$

C'est en intégrant les fréquences du spectre en fréquence et nombre d'onde que $\gamma(\vec{K})$ est obtenu :

$$\gamma(\vec{K}) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\vec{K}, \omega) d\omega \quad (3.22)$$

c) Spectre en fréquence

Le spectre en fréquence, $\hat{\phi}(\omega)$, est défini comme la transformée de Fourier (FT) de la covariance d'une variable en un endroit fixé :

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t) e^{j\omega t} dt \quad (3.23a)$$

$$\Gamma(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (3.23b)$$

C'est en intégrant les nombres d'onde du spectre en fréquence et nombre d'onde que $\hat{\phi}(\omega)$ est obtenu

$$\hat{\phi}(\omega) = 1/(2\pi)^2 \iint_{\vec{K}} \chi(\vec{K}, \omega) d\vec{K} \quad (3.24)$$

Comme le champ de vagues est stationnaire, la covariance d'une variable en un endroit fixé, $\Gamma(t)$, est une fonction paire et, dès lors, le spectre en fréquence est réel et symétrique autour de $\omega = 0$. Un autre spectre en fréquence, $\phi(\omega)$, peut être défini et celui-ci ne prend des valeurs non nulles que pour les fréquences positives :

$$\phi(\omega) = 2 \hat{\phi}(\omega) \quad \text{si } \omega \geq 0$$

$$0 \quad \text{si } \omega < 0 \quad (3.25)$$

et

$$\phi(\omega) = 4 \int_0^{\infty} \Gamma(t) \cos(\omega t) dt \quad (3.26a)$$

$$\Gamma(t) = 1/2\pi \int_0^{\infty} \phi(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (3.26b)$$

3.4 Relations entre les spectres de surface

Le spectre bidimensionnel en nombre d'onde et le spectre unidimensionnel en fréquence ont été définis comme la transformée de Fourier des covariances correspondantes. Il est possible de définir d'autres spectres à partir de ceux-là ou des nouveaux spectres. Le but de cette section est d'interpréter tous les spectres et d'établir les relations simples entre eux.

3.4.1 Quelques autres spectres

a) Spectre en module de nombre d'onde

Le spectre en module de nombre d'onde, $S(K)$ est défini par :

$$\begin{aligned} S(K) &\equiv 1/(2\pi) \int_{|\vec{K}|=K} \gamma(\vec{K}) d\alpha \\ &= 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(K, \alpha) K d\alpha \quad (3.27) \end{aligned}$$

où $\vec{K} = (K \cos \alpha, K \sin \alpha)$ est le vecteur nombre d'onde de module K et α l'angle caractérisant la direction du nombre d'onde.

Ce spectre est la valeur moyenne selon toutes les directions de $\gamma(\vec{K})$ fois K . Il est unidimensionnel et caractérise la distribution d'énergie selon K , sans tenir compte de la direction du nombre d'onde. On l'appelle aussi le spectre radial en nombre d'onde.

b) Spectre en nombre d'onde pour une direction donnée

Un autre spectre en nombre d'onde unidimensionnel peut être défini comme la transformée de Fourier unidimensionnelle de la covariance d'une variable instantanée dans une direction donnée, φ_0 :

$$V(K, \varphi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(r, \varphi_0) \cos(Kr) dr \quad (3.28.a)$$

$$\Gamma(r, \varphi_0) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} V(K, \varphi_0) \cos(Kr) dK \quad (3.28.b)$$

$V(K, \varphi_0)$ est obtenu à partir de mesures le long d'une direction particulière sur la surface : avec une distribution en ligne d'instruments de mesures.

c) Coupe du spectre en nombre d'onde

Le dernier spectre en nombre unidimensionnel qui peut nous intéresser est défini par une coupe dans le spectre en nombre d'onde bidimensionnel $\gamma(K, \alpha)$:

$$\gamma^0(K, \alpha_0) \equiv \gamma(K, \alpha) \text{ pris en } \alpha = \alpha_0 \text{ où } \alpha_0 \text{ est un angle fixé} \quad (3.29)$$

d) Spectre en fréquence directionnel

Un spectre en fréquence bidimensionnel peut aussi être défini, le spectre en fréquence directionnel, $\phi_0(\omega, \alpha)$:

$$\phi_0(\omega, \alpha) = 1/(2\pi)^2 \int_0^{\infty} \chi(K, \alpha, \omega) K dK \quad (3.30.a)$$

Remarquons que Irani et al. (1981) le définissent par :

$$\phi_0(\omega, \alpha) = 2\pi/\omega \int_0^{\infty} \chi(K, \alpha, \omega) K dK$$

sans aucune justification du facteur $2\pi/\omega$. Le seul avantage à introduire ce facteur est que la covariance obtenue par les équations (3.23.a), (3.30.b) et (3.21.b) ont des formes similaires :

$$\Gamma(0) = 2/(2\pi)^4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\omega, \alpha) \omega d\omega d\alpha$$

$$\Gamma(0) = 2/(2\pi)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(K, \alpha) K dK d\alpha$$

e) Résumé

Symbole	Définition	Nom	Dim
$\chi(\vec{K}, \omega)$	$\int_t \int_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r}, t) e^{j(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})} d\vec{r} dt$	En nombre d'onde et fréquence	3-D
$\gamma(\vec{K})$	$\int_{\vec{r}} \Gamma(\vec{r}) e^{-j\vec{K} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$	Directionnel en nombre d'onde	2-D
$\gamma^0(K, \alpha_0)$	$\gamma(K, \alpha)$ en $\alpha = \alpha_0$ où α_0 est un angle fixé	Coupe du spectre en nombre d'onde	1-D
$S(K)$	$1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(K, \alpha) K d\alpha$	En module de nombre d'onde	1-D
$V(K, \varphi_0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(r, \varphi_0) \cos(Kr) dr,$ où φ_0 est fixé	En nombre d'onde pour une direction donnée	1-D
$\hat{\phi}(\omega)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t) e^{j\omega t} dt$	En fréquence	1-D
$\phi_0(\omega, \alpha)$	$1/(2\pi)^2 \int_0^{\infty} \chi(K, \omega, \alpha) K dK$	Directionnel en fréquence	2-D

Table 3.1 : Résumé des différents spectres définis

3.4.2 Relation entre $\hat{\phi}(\omega)$ et respectivement $\gamma(\vec{K})$, $S(K)$ et $\phi_0(\omega, \alpha)$

Les relations les plus simples entre les spectres sont les équations intégrales. De cette façon, on peut lier $\hat{\phi}(\omega)$ avec respectivement $\gamma(\vec{K})$, $S(K)$ et $\phi_0(\omega, \alpha)$. En comparant la covariance d'une variable instantanée en un endroit fixé, $\Gamma(\vec{0}, 0)$, obtenue à partir de l'équation (3.21.b) avec $\vec{r} = \vec{0}$ ou à partir de l'équation (3.23.b) avec $t = 0$, on démontre que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = 1/2\pi \iint \vec{K} \gamma(\vec{K}) d\vec{K} \quad (3.31)$$

et dès lors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} S(K) dK \quad (3.32)$$

et, en utilisant la définition de $\phi_0(\omega, \alpha)$, on montre que :

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(\omega, \alpha) d\alpha \quad (3.33)$$

3.4.3 Relation entre $\gamma(\vec{K})$ et $S(K)$

Les équations intégrales ne sont pas très utilisables et il serait préférable d'avoir une relation plus directe entre $\gamma(\vec{K})$ et $S(K)$. Dans un premier temps, une covariance instantanée isotropique sera considérée.

a) Covariance instantanée isotropique

Soit le nombre d'onde $\vec{K}$ donné par $(K \cos \alpha, K \sin \alpha)$ et le vecteur position $\vec{r}$ donné par $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$; Dès lors :

$$\vec{K} \cdot \vec{r} = K r \cos(\varphi - \alpha)$$

Si on fait l'hypothèse que la covariance instantanée, $\Gamma(\vec{r})$, est isotropique, c'est-à-dire :

$$\Gamma(\vec{r}) = \Gamma(r, \varphi) = \Gamma(r) \quad (3.34)$$

Alors, le spectre en nombre d'onde est donné par :

$$\gamma(K, \alpha) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \Gamma(r) \cos(Kr \cos(\varphi - \alpha)) r dr d\varphi$$

En posant $\theta = \varphi - \alpha$, il devient :

$$\gamma(K, \alpha) = \int_0^\infty \Gamma(r) r dr \int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \cos(Kr \cos\theta) d\theta$$

Par les tables d'intégrales :

$$\int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \cos(Kr \cos\theta) d\theta = 2\pi J_0(Kr)$$

où $J_0(Kr)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro. Par conséquent :

$$\gamma(K, \alpha) = 2\pi \int_0^\infty \Gamma(r) J_0(Kr) r dr \quad (3.35)$$

c'est-à-dire que $\gamma(\vec{K})/2\pi$ est la transformée de Bessel de $\Gamma(r)$ et vice versa. Il s'en suit que $\gamma(K, \alpha)$ est indépendant de α et, par la définition de $S(K)$, le spectre en module de nombre d'onde, on obtient :

$$S(K) = K \gamma(K, \alpha) \quad (3.36)$$

ou

$$\gamma(K, \alpha) = S(K) / K \quad (3.37)$$

Le spectre $\gamma(K, \alpha)$ est indépendant de α ; c'est un spectre isotropique. En conclusion, l'hypothèse d'une covariance isotropique, $\Gamma(\vec{r})$, conduit à un spectre isotropique, $\gamma(\vec{K})$, simplement relié à $S(K)$. Cependant, l'expérience montre que le spectre en nombre d'onde est en général anisotropique et ce cas sera considéré ci-après.

b) Covariance instantanée anisotropique

Cette fois, la covariance instantanée est anisotropique :

$$\Gamma(\vec{r}) = \Gamma(r, \varphi) \quad (3.38)$$

et le spectre en nombre d'onde est donné par :

$$\gamma(K, \alpha) = \int_0^{\infty} r \, dr \int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \Gamma(r, \varphi) \cos(Kr \cos\theta) \, d\theta$$

où $\theta = \varphi - \alpha$. Mais $\Gamma(r, \theta + \alpha)$ est une fonction périodique, de période 2π , comme $\cos(Kr \cos\theta)$ et donc leur produit aussi et

$$\int_{-\pi-\alpha}^{\pi-\alpha} \Gamma(r, \theta + \alpha) \cos(Kr \cos\theta) \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(r, \theta + \alpha) \cos(Kr \cos\theta) \, d\theta$$

qui fournit une fonction de K , r et α , appelée β :

$$\beta(K, r, \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(r, \theta + \alpha) \cos(Kr \cos\theta) \, d\theta$$

Par conséquent :

$$\gamma(K, \alpha) = \int_0^{\infty} r \, \beta(K, r, \alpha) \, dr$$

Si on fait l'hypothèse que

$$\beta(K, r, \alpha) = G(K, r) F(K, \alpha)$$

avec

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(K, \alpha) \, d\alpha = 1$$

le spectre en nombre d'onde devient

$$\gamma(K, \alpha) = \int_0^{\infty} r \, G(K, r) \, dr F(K, \alpha) = G_1(K) F(K, \alpha)$$

où

$$G_1(K) = \int_0^{\infty} r G(K,r) dr$$

C'est-à-dire que le spectre en nombre d'onde est le produit d'une partie qui dépend de K et une autre partie qui dépend de α ainsi que de K . A nouveau, on introduit l'équation ci-dessus dans la définition de $S(K)$ et on montre que

$$G_1(K) = 2\pi S(K) / K$$

$$\gamma(K,\alpha) = 2\pi S(K)/K F(K,\alpha) \quad (3.39)$$

La dépendance angulaire du spectre change avec le nombre d'onde. Par exemple, les vagues de gravité générées par le vent se propagent dans la direction du vent tandis que les vagues courtes sont beaucoup plus isotropiques.

L'approche plus générale pour relier $\gamma(K,\alpha)$ et $S(K)$ est de développer $\Gamma(r,\alpha)$ en séries de Fourier. Le développement complet est fait en annexe 3.1 et il mène à l'équation (3.39) avec :

$$F(K,\alpha) = 1/2\pi (1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(K) \cos(2n\alpha)) \quad (3.40.a)$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(K,\alpha) d\alpha = 1 \quad (3.40.b)$$

En conclusion, le spectre en nombre d'onde, $\gamma(\vec{K})$, est le produit de deux facteurs : le spectre en module de nombre d'onde, $S(K)$, divisé par $K/2\pi$ et la fonction angulaire qui varie avec le nombre d'onde, $F(K,\alpha)$. Deux fonctions doivent donc être déterminées expérimentalement ou empiriquement pour construire le spectre directionnel en nombre d'onde. Cela fera l'objet des chapitres 4 pour $S(K)$ et 5 pour $F(K,\alpha)$.

3.4.4 Relation entre $\gamma(\vec{K})$ et $V(K, \varphi_0)$

De façon similaire à ce qui a été fait précédemment, le spectre en nombre d'onde pour une direction donnée, $V(K, \varphi_0)$ est relié au spectre en nombre d'onde $\gamma(\vec{K})$. Comme le cas isotropique est un cas particulier du cas anisotropique, ce dernier sera examiné en premier lieu.

a) Covariance instantanée anisotropique

Si une direction particulière sur la surface est choisie, disons $\varphi = \varphi_0$, la covariance instantanée anisotropique, $\Gamma(r, \varphi_0)$, dépend uniquement de la variable unidimensionnelle r et le spectre en nombre d'onde pour une direction fixée $\varphi = \varphi_0$ a été défini par l'équation (3.28.a) et son inverse par (3.28.b). Pour lier $\gamma(K, \alpha)$ à $V(K, \varphi_0)$, la procédure de Guissard (1984) a été utilisée avec le développement en séries de Fourier de $\Gamma(r, \varphi)$, de même que le développement en séries de Fourier de $\gamma(K, \alpha)$ et $V(K, \varphi_0)$:

$$\Gamma(r, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{2n}(r) \cos(2n\varphi_0) \quad (3.41.a)$$

$$\gamma(K, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n}(K) \cos(2n\alpha) \quad (3.41.b)$$

$$V(K, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n}(K) \cos(2n\varphi_0) \quad (3.41.c)$$

et leurs coefficients de Fourier sont reliés comme suit :

$$\gamma_{2n}(K) = (-1)^n 2\pi \text{BT}_{2n}[\Gamma_{2n}(r)] \quad (3.42.a)$$

$$V_{2n}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{2n}(r) \cos(Kr) dr \quad (3.42.b)$$

où BT_{2n} est la transformée de Bessel d'ordre $2n$. Dès lors, si $V(K, \varphi_0)$ est connu pour un grand nombre de directions φ_0 , les coefficients $V_{2n}(K)$ peuvent être déterminés pour chaque valeur de K . En prenant

successivement leur transformée de Fourier inverse, les coefficients $\Gamma_{2n}(r)$ sont obtenus. Finalement, les transformées de Bessel d'ordre $2n$ de $\Gamma_{2n}(r)$ fournissent les coefficients $\gamma_{2n}(K)$ et le développement de Fourier de $\gamma(\vec{K})$ est déterminé. Cette procédure est à suivre pour une covariance instantanée anisotropique. Elle peut être simplifiée si la covariance est isotropique comme montré ci-dessous.

b) Covariance instantanée isotropique

Si la covariance instantanée est isotropique, les séries de Fourier de $\Gamma(\vec{r})$, $\gamma(\vec{K})$ et $V(K, \varphi_0)$ ne contiennent que le terme d'ordre 1, soit $\Gamma_0(r)$, $\gamma_0(K)$ et $V_0(K)$. Par conséquent $\gamma_0(K)$ est obtenu à partir de $V_0(K)$ par :

$$\gamma_0(K) = \int_0^{\infty} r J_0(Kr) dr \int_{-\infty}^{\infty} V_0(K') \cos(K'r) dK' \quad (3.43)$$

A partir de (3.37), on a aussi que :

$$S(K) = K \int_0^{\infty} r J_0(Kr) dr \int_{-\infty}^{\infty} V_0(K') \cos(K'r) dK' \quad (3.44)$$

Ce résultat indique clairement que, même dans le cas isotropique, le spectre unidimensionnel, $S(K)$, n'est pas égal au spectre unidimensionnel pour une direction donnée, $V_0(K)$: $S(K)$ peut être obtenu à partir de $V_0(K)$ par une double transformée (Fourier et Bessel) de $V_0(K)$.

3.4.5 Relation entre $\gamma(\vec{K})$ et $\gamma^\circ(K, \alpha_0)$

Un autre spectre unidimensionnel en nombre d'onde est $\gamma^\circ(K, \alpha_0)$ défini, comme une coupe dans le spectre bidimensionnel. En utilisant la définition de $\gamma^\circ(K, \alpha_0)$ et l'équation (3.40), on démontre que :

$$\gamma^\circ(K, \alpha_0) = 2\pi S(K) F(K, \alpha_0)/K \quad (3.45)$$

où

$$F(K, \alpha_0) = F(K, \alpha) \quad \text{pris en } \alpha = \alpha_0 \text{ fixé}$$

et par conséquent

$$\gamma(K, \alpha) = \gamma^o(K, \alpha_0) f(K, \alpha, \alpha_0) \quad (3.46)$$

où

$$f(K, \alpha, \alpha_0) = F(K, \alpha) / F(K, \alpha_0)$$

c'est-à-dire une fonction de K et α qui varie avec α_0 . Toutes les relations possibles entre les spectres uni et bidimensionnels ont été trouvées et, à présent, nous examinerons les relations entre les spectres unidimensionnels.

3.4.6 Relation entre $S(K)$ et $V(K, \varphi_0)$, sous une hypothèse

Comme il a été vu précédemment, il n'existe pas de relation simple entre $S(K)$ et $V(K, \varphi_0)$ car $S(K)$ est un spectre « moyen », tandis que $V(K, \varphi_0)$ est un spectre « en ligne » le long d'une direction particulière φ_0 . Une hypothèse doit donc être faite pour les relier de façon simple. Si on suppose que la surface de la mer est équivalente à la superposition d'un nombre infini de surfaces cylindriques non corrélées, le long d'un nombre infini de directions, Guissard (1984) a montré que :

$$\gamma(K, \alpha) = 4\pi V_\alpha(K) / K \quad (3.47)$$

où

$$V_\alpha(K) = \Gamma_\alpha(\xi) \cos(k\xi) d\xi$$

est le spectre unidimensionnel évalué dans la direction α et ξ est la distance le long de la direction α de la surface cylindrique. Une surface rugueuse cylindrique est définie comme une surface dont la covariance $\Gamma(r)$ dépend uniquement de la distance le long d'une direction spécifiée α

$$\Gamma(\vec{r}) = \Gamma_\alpha(\xi)$$

Si on compare les équations (3.40) et (3.47), on obtient :

$$V_{\alpha}(K) = (1/2) S(K) F(K, \alpha) \quad (3.48)$$

c'est-à-dire que $S(K)$ est relié simplement à $V_{\alpha}(K)$, le spectre unidimensionnel de la composante cylindrique dans la direction α , si on fait l'hypothèse précédente pour la surface de la mer.

3.4.7 Relation entre $S(K)$ et $\hat{\phi}(\omega)$, sous deux hypothèses

A présent, tournons nous vers la relation entre les spectres unidimensionnels $S(K)$ et $\hat{\phi}(\omega)$. Deux hypothèses sont nécessaires afin d'avoir une relation simple. La première hypothèse est, comme précédemment, que la surface rugueuse de la mer est équivalente à une superposition d'un nombre infini de surfaces cylindriques non corrélées dans toutes les directions. La seconde hypothèse est que la relation de dispersion inverse (voir section 2.3) est univoque : $K = K(\omega)$. Guissard (1984) a montré que sous ces deux hypothèses :

$$2 \hat{\phi}(\omega) d\omega = S(K) dK \quad (3.49)$$

où

$$K = K(\omega)$$

La première hypothèse est nécessaire, car on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} S(K) dK = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} S(K) dK$$

et, mathématiquement,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

n'entraîne pas

$$f(x) = g(x)$$

En conclusion, il est absolument nécessaire de faire des hypothèses pour simplifier les équations intégrales entre $S(K)$ et $\phi(\omega)$.

3.4.8 Résumé

Les relations qui ont été établies entre les spectres prennent différentes formes (équation intégrale, multiplication ou séries de Fourier) et elles existent pour des cas différents (isotropique ou anisotropique). De plus, certaines d'entre elles ont été établies sous certaines hypothèses. L'ensemble de ces relations est résumé au tableau 3.2, tandis que la figure 3.2 donne une présentation schématique.

Numéro	EQUATIONS	Equat.	Cas
(1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = 1/2\pi \iint \vec{K} \gamma(\vec{K}) d\vec{K}$	3.31	A
(2)	$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} S(K) dK$	3.32	A
(3)	$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(\omega, \alpha) d\alpha$	3.33	A
(4)	$\gamma(K, \alpha) = S(K) / K$	3.37	I
(5)	$\gamma(K, \alpha) = 2\pi S(K)/K F(K, \alpha), \text{ où}$ $F(K, \alpha) = 1/2\pi \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(K) \cos(2n\alpha)\right)$	3.39	A
		3.40.a	

Table 3.2 : Résumé des relations entre les spectres en fréquence et en nombre d'onde. La lettre "A" indique le cas anisotropique tandis que "I" indique le cas isotropique (première partie)

Numéro	EQUATIONS	Equat.	Cas
(6)	$\Gamma(r, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{2n}(r) \cos(2n\varphi_0)$ $\gamma(K, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n}(K) \cos(2n\alpha)$ $V(K, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n}(K) \cos(2n\varphi_0)$ où $\gamma_{2n}(K) = (-1)^n 2\pi \text{BT}_{2n}[\Gamma_{2n}(r)]$ et $V_{2n}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{2n}(r) \cos(Kr) dr$	3.41.a à 3.42.b	A
(7)	$\gamma_0(K) = \int_0^{\infty} r J_0(Kr) dr \int_{-\infty}^{\infty} V_0(K') \cos(K'r) dK'$	3.43	I
(8)	$\gamma(K, \alpha) = \gamma^o(K, \alpha_0) f(K, \alpha, \alpha_0), \text{ où}$ $f(K, \alpha, \alpha_0) = F(K, \alpha)/F(K, \alpha_0)$	3.46	A
(9)	$\gamma(K, \alpha) = 4\pi V_{\alpha}(K)/K, \text{ où}$ $V_{\alpha}(K) = \int_0^{\infty} \Gamma_{\alpha}(\xi) \cos(k\xi) d\xi$	3.47	A
(10)	$V_{\alpha}(K) = (1/2) S(K) F(K, \alpha)$	3.48	A
(11)	$2 \hat{\phi}(\omega) d\omega = S(K) dK, \text{ où}$ $K = K(\omega)$	3.49	A

Table 3.2 : Résumé des relations entre les spectres en fréquence et en nombre d'onde. La lettre "A" indique le cas anisotropique tandis que "I" indique le cas isotropique (suite)

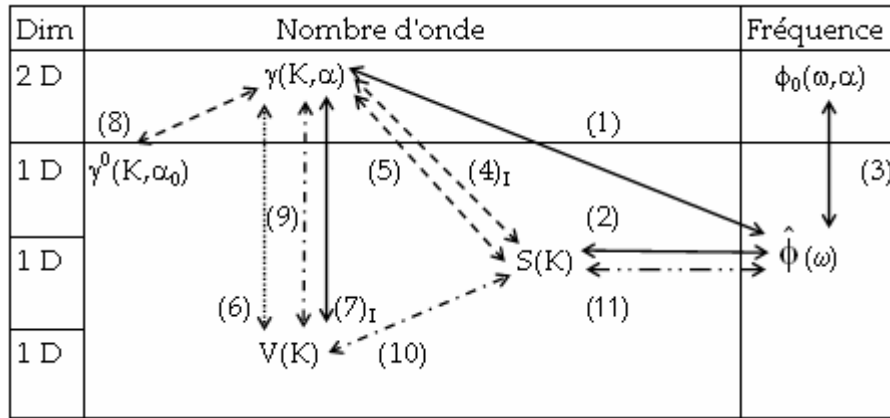


Figure 3.2 : Diagramme schématisant les relations entre les spectres en nombre d'onde et en fréquence. Les numéros se rapportent au tableau précédent et la lettre I au cas isotropique

- : équation intégrale
- : multiplication
- : séries de Fourier
- . - . - . : une hypothèse et multiplication
- .. - .. - : deux hypothèses et multiplication

3.5 Relations entre les spectres des déplacements et des pentes

Si ζ est le déplacement en surface de la surface de la mer, avec $\Gamma(\vec{r})$ la covariance instantanée, alors ζ_x et ζ_y sont les pentes de la surface de la mer dans les directions X et Y , avec les covariances instantanées $\Gamma_{sx}(\vec{r})$ et $\Gamma_{sy}(\vec{r})$ (s pour la pente et x et y pour les directions). Comme ζ peut être relié à ζ_x et ζ_y , on peut relier $\Gamma_{sx}(\vec{r})$ et $\Gamma_{sy}(\vec{r})$ à $\Gamma(\vec{r})$ par (Guissard, 1983) :

$$\Gamma_{sx}(\vec{r}) = \partial^2 \Gamma(\vec{r}) / \partial x^2 \quad (3.50.a)$$

et

$$\Gamma_{sy}(\vec{r}) = \partial^2 \Gamma(\vec{r}) / \partial y^2 \quad (3.50.b)$$

Par conséquent, les spectres en nombre d'onde des pentes dans les directions X et Y sont donnés par (Cox & Munk, 1954b) :

$$\gamma_{sx}(\vec{K}) = K_x^2 \gamma(\vec{K}) \quad (3.51.a)$$

$$\gamma_{sy}(\vec{K}) = K_y^2 \gamma(\vec{K}) \quad (3.51.b)$$

Si X est la direction perpendiculaire au vent et Y la direction avec le vent ($\alpha=0$), alors :

$$K_x = K \sin \alpha \quad (3.52.a)$$

$$K_y = K \cos \alpha \quad (3.52.b)$$

Ces relations seront très utiles pour obtenir les variances des pentes à partir du spectre en nombre d'onde des déplacements, comme développé au chapitre 6.

3.6 Conclusion

Nous avons rappelé les définitions des spectres et nous avons établi les relations entre ceux-ci. Ce travail fastidieux est très important, car il permet de préciser de quel spectre parle un auteur. Il nous permettra de les comparer et d'évaluer leurs différences, ce qui conduira à proposer un spectre plus conforme à la réalité physique, au chapitre 4.

Annexe 3.1

Développement en séries de Fourier de la fonction angulaire du spectre en nombre d'ondes

L'approche la plus générale pour relier $\gamma(K, \alpha)$ et $S(K)$ est de développer $\Gamma(r, \alpha)$ en série de Fourier (Guissard, 1984) :

$$\Gamma(r, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n'(r) e^{in\alpha}$$

Par des considérations de symétrie, ce développement peut aussi s'écrire :

$$\Gamma(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{2n}(r) \cos(2n\alpha)$$

où $\Gamma_0(r) = \Gamma_0'(r)$ et $\Gamma_{2n}(r) = 2 \Gamma_{2n}'(r)$ pour $n \neq 0$.

En développant le terme exponentiel de l'équation (3.21a) en série de Fourier, en utilisant la formule d'Anger-Jacobi, on peut montrer que :

$$\gamma(K, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n}(K) \cos(2n\alpha)$$

où

$$\gamma_{2n}(K) = (-1)^n 2\pi \text{BT}_{2n}(\Gamma_{2n}(r))$$

$$\text{BT}_m(f(r)) = \int_0^{\infty} f(r) J_m(Kr) r dr \text{ est la transformée de Bessel d'ordre } m$$

J_m est la fonction de Bessel d'ordre m .

Ainsi, on obtient le coefficient de Fourier d'ordre $2n$ de $\gamma(K, \alpha)$ en prenant la transformée de Bessel d'ordre $2n$ du coefficient de Fourier d'ordre $2n$ de $\Gamma(r, \alpha)$. Pour obtenir la relation entre $\gamma(K, \alpha)$ et $S(K)$, nous factorisons le coefficient d'ordre zéro :

$$\gamma(K, \alpha) = \gamma_0(K) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(K) \cos(2n\alpha) \right)$$

où $a_n(K) = \gamma_{2n}(K) / \gamma_0(K)$.

De l'équation (3.36), nous déduisons que :

$$S(K) = K \gamma_0(K)$$

et

$$\gamma(K, \alpha) = S(K)/K \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(K) \cos(2n\alpha) \right)$$

Par analogie avec l'équation (3.39), nous obtenons les équations (3.40).