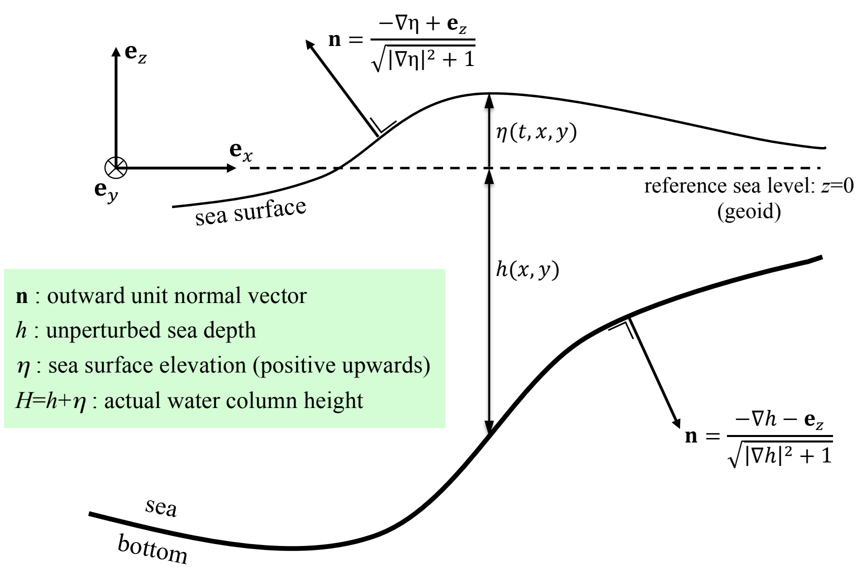
Sur la condition d'imperméabilité de la surface de la mer

Eric Deleersnijder, 9 décembre 2014

Motivation

A tout instant t et en tout point $\mathbf{x}$, la vitesse de l'eau s'écrit $\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) + w(t,\mathbf{x})\mathbf{e}_z$, où $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, $w(t,\mathbf{x})$ et $\mathbf{e}_z$ désignent respectivement la vitesse horizontale, la composante verticale de la vitesse et un vecteur unitaire pointant vers le haut. Comme l'illustre la figure ci-dessous, la surface de l'océan est située en $z = \eta(t,x,y)$, où x et y sont des coordonnées cartésiennes horizontales, tandis que z est la coordonnée verticale qui croît vers le haut. La condition d'imperméabilité de la surface de l'océan s'écrit

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \bullet \nabla \eta - w\right]_{z=\eta(t,x,y)} = 0 \quad . \tag{1}$$



Dans la présente note de travail on va montrer comment déduire cette relation de la condition d'imperméabilité générale d'une surface mobile. On insistera, en particulier, sur les ambiguïtés liées à la détermination de la vitesse de la surface mobile.

Vitesse et imperméabilité d'une surface mobile

Aucune particule fluide ne traverse une surface imperméable, que celle-ci soit mobile ou non. Si $\mathbf{v}^\Gamma$ désigne la vitesse d'un point de la surface imperméable Γ, alors de chaque côté de cette surface la vitesse du fluide satisfait la condition d'imperméabilité

$$\left[(\mathbf{v} - \mathbf{v}^\Gamma) \bullet \mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = 0 \quad , \tag{2}$$

où le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ est normal à Γ. Il reste à déterminer la vitesse $\mathbf{v}^\Gamma$.

Une surface est un objet bidimensionnel. Donc, le vecteur-position d'un point d'une surface peut être vu comme une fonction de deux paramètres, que l'on notera χ et ξ ci-après. Si la surface est mobile, il est nécessaire d'ajouter un troisième paramètre, le temps. Ainsi, le vecteur-position de tout point d'une surface mobile peut s'écrire sous la forme générique $\mathbf{r}(t,\chi,\xi)$. La vitesse d'un point de la surface vaut alors

$$\mathbf{v}^{\Gamma}[t,\mathbf{r}(t,\chi,\xi)] \;=\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \;, \tag{3}$$

tandis que la normale unitaire est[1]

$$\mathbf{n} \;=\; \pm \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|} \quad . \tag{4}$$

On peut décomposer la vitesse $\mathbf{v}^{\Gamma}$ en une partie normale à la surface Γ,

$$\mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp} \;=\; (\mathbf{v}^{\Gamma} \bullet \mathbf{n})\mathbf{n} \;, \tag{5}$$

et une partie tangente,

$$\mathbf{v}^{\Gamma}_{//} \;=\; \mathbf{v}^{\Gamma} - \mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp} \;, \tag{6}$$

avec $\mathbf{v}^{\Gamma} = \mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp} + \mathbf{v}^{\Gamma}_{//}$. Le relation suivante est identiquement vraie:

$$\mathbf{v}^{\Gamma} \bullet \mathbf{n} \;=\; \mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp} \bullet \mathbf{n} \quad . \tag{7}$$

La démonstration est triviale. L'interprétation physique s'avère relativement simple: la vitesse $\mathbf{v}^{\Gamma}_{//}$ rend compte d'un déplacement de points “à l'intérieur de la surface Γ” elle-même, ce qui ne correspond pas à un mouvement de la surface Γ dans l'espace physique. En d'autres termes, le champ de vitesse représentant le mouvement d'une surface dans l'espace physique n'est pas univoquement défini. On peut donc choisir la vitesse qui minimise les efforts de calculs dans le cadre du problème en cours de traitement.

En combinant (2) et (7), on obtient une nouvelle expression de la condition d'imperméabilité de la surface Γ, c'est-à-dire

$$\left[(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp}) \bullet \mathbf{n}\right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \;=\; 0 \quad . \tag{8}$$

Ainsi, puisque seule la vitesse $\mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp}$ importe réellement pour décrire les mouvements de Γ, il n'est guère étonnant que cette vitesse soit la seule qui soit pertinente pour exprimer l'imperméabilité de cette surface.

Imperméabilité de la surface océanique

Pour représenter le vecteur-position d'un point de la surface de l'océan, il est commode de choisir les paramètres susmentionnés de la manière suivante:

$$\chi = x \;,\; \xi = y \quad . \tag{9}$$

Le vecteur-position correspondant est alors

---

[1] Les vecteurs $\partial \mathbf{r} / \partial \chi$ et $\partial \mathbf{r} / \partial \xi$ sont tangents à la surface Γ. Par conséquent, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est normal à Γ.

$$\mathbf{r}(t,x,y) \;=\; x\,\mathbf{e}_x \;+\; y\,\mathbf{e}_y \;+\; \eta(t,x,y)\,\mathbf{e}_z \quad . \tag{10}$$

Il s'ensuit

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{e}_x + \frac{\partial \eta}{\partial x}\mathbf{e}_z \;,\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{e}_y + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathbf{e}_z \tag{11}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \;&=\; \left(\mathbf{e}_x + \frac{\partial \eta}{\partial x}\mathbf{e}_z\right)\times\left(\mathbf{e}_y + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathbf{e}_z\right)\\ &=\; \underbrace{\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y}_{=\mathbf{e}_z} \;+\; \frac{\partial \eta}{\partial x}\underbrace{\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_y}_{=-\mathbf{e}_x} \;+\; \frac{\partial \eta}{\partial y}\underbrace{\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_z}_{=-\mathbf{e}_y} \;+\; \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\underbrace{\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_z}_{=0}\\ &=\; -\underbrace{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathbf{e}_y\right)}_{=\nabla\eta} + \mathbf{e}_z \;=\; -\,\nabla\eta \,+\, \mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{12}$$

En vertu de (4), le vecteur unitaire normal à la surface de la mer s'écrit de la façon suivante:

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{-\nabla\eta \,+\, \mathbf{e}_z}{\sqrt{|\nabla\eta|^2+1}} \quad . \tag{13}$$

Avec la représentation de la surface de la mer adoptée ici, la vitesse d'un point de cette surface s’obtient en combinant (3) et (10):

$$\mathbf{v}^{\Gamma} \;\equiv\; \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \;=\; \frac{\partial \eta}{\partial t}\mathbf{e}_z \quad . \tag{14}$$

Les vitesses de la surface normale et tangente à la surface de la mer valent alors

$$\mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp} \;\equiv\; (\mathbf{v}^{\Gamma}\bullet\mathbf{n})\,\mathbf{n} \;=\; \frac{-\nabla\eta+\mathbf{e}_z}{|\nabla\eta|^2+1}\,\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{15}$$

et

$$\mathbf{v}^{\Gamma}_{//} \;\equiv\; \mathbf{v}^{\Gamma} \,-\, \mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp} \;=\; \frac{\nabla\eta+|\nabla\eta|^2\,\mathbf{e}_z}{|\nabla\eta|^2+1}\,\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad . \tag{16}$$

Il est alors utile d'évaluer le produit scalaire

$$\mathbf{v}^{\Gamma}_{\perp}\bullet\mathbf{n} \;=\; \frac{-\nabla\eta+\mathbf{e}_z}{|\nabla\eta|^2+1}\,\frac{\partial \eta}{\partial t}\bullet\frac{-\nabla\eta \,+\, \mathbf{e}_z}{\sqrt{|\nabla\eta|^2+1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\nabla\eta|^2+1}}\,\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad . \tag{17}$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que la vitesse $\mathbf{v}^{\Gamma}_{//}$ est bien perpendiculaire à la normale **n**:

$$\mathbf{v}^{\Gamma}_{//}\bullet\mathbf{n} \;=\; \frac{\nabla\eta+|\nabla\eta|^2\,\mathbf{e}_z}{|\nabla\eta|^2+1}\,\frac{\partial \eta}{\partial t}\bullet\frac{-\nabla\eta \,+\, \mathbf{e}_z}{\sqrt{|\nabla\eta|^2+1}} \;=\; \frac{-|\nabla\eta|^2+|\nabla\eta|^2}{\left(|\nabla\eta|^2+1\right)^{3/2}}\,\frac{\partial \eta}{\partial t} \;=\; 0 \quad . \tag{18}$$

La condition d'imperméabilité (8) s'écrit désormais comme suit

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp}^{\Gamma}) \bullet \mathbf{n} \Big]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = \Big[\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} - \mathbf{v}_{\perp}^{\Gamma} \bullet \mathbf{n} \Big]_{\mathbf{x}\in\Gamma} \\
&= \left[(\mathbf{u} + w\,\mathbf{e}_z) \bullet \frac{-\nabla\eta + \mathbf{e}_z}{\sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}} \frac{\partial\eta}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}\in\Gamma} = \left[\frac{-\mathbf{u} \bullet \nabla\eta + w - \dfrac{\partial\eta}{\partial t}}{\sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}} \right]_{\mathbf{x}\in\Gamma}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Cette expression est équivalente à la condition d'imperméabilité (1). QED.
