

Chapitre VII - Annexe 1:

les hypothèses maintenues du test exact de Fisher

Sous les hypothèses maintenues et $H_0 : p=p_1=p_2$

$$\text{et } X = X_1 + \dots + X_m \rightarrow \text{Bin}(m, p)$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \rightarrow \text{Bin}(n, p)$$

$$S = X + Y \rightarrow \text{Bin}(N, p) \text{ où } N = m + n$$

On obtient alors que :

$$P(X = x|H_0) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} : \text{probabilité qu'un nombre } x \text{ de } X \text{ affiche un certain comportement.}$$

$$P(Y = y|H_0) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} : \text{probabilité qu'un nombre } y \text{ de } Y \text{ affiche un certain comportement.}$$

$$P(X = x, Y = y|H_0) = \binom{m}{x} \binom{n}{y} p^{x+y} (1-p)^{m+n-(x+y)} : \text{probabilité d'observer simultanément } x \text{ et } y$$

$$P(S = s|H_0) = \binom{N}{s} p^s (1-p)^{N-s} : \text{probabilité d'observer la somme } s = m + n \text{ effectifs affichant un certain comportement.}$$

Test exact de Fisher

On rejette H_0 si la valeur observée de X est trop petite (trop grande) selon le cas par rapport à la valeur observée de S . c'est-à-dire si le nombre d'élève affichant un certain comportement dans l'une ou l'autre catégorie est relativement trop petite (trop grande) par rapport au nombre total d'élèves affichant ce comportement. Cela se formalise comme suit :

Pour une valeur s fixée, nous avons :

$$\begin{aligned} P(X = x|S = s, H_0) &= P(X = x, Y = s - x|S = s, H_0) \\ &= \frac{P(X = x, Y = s - x, S = s|H_0)}{P(S = s|H_0)} \\ &= \frac{\binom{m}{x} \binom{n}{s-x} p^s (1-p)^{m+n-s}}{\binom{N}{s} p^s (1-p)^{N-s}} \\ &= \frac{\binom{m}{x} \binom{n}{s-x}}{\binom{N}{s}} \end{aligned}$$

La variable aléatoire X conditionnellement à S et H_0 est une variable aléatoire hypergéométrique.

La proportion d'élèves au comportement anecdotique est faible pour les classes aux enseignants dialogiques.