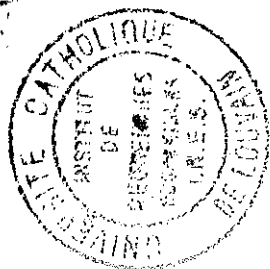


**EVALUATION DES TITRES FINANCIERS
EN RELATION AVEC LES ALEAS
DE LA PRODUCTION**

par

**J. CAMPAGNE-IBARCO (*)
Ph. MICHEL (*)**

Working Paper n° 8116



(*) Centre de Mathématiques Economiques, Université de Paris I,
12 Place du Panthéon - 75005 PARIS (FRANCE).

**INSTITUT DES SCIENCES ECONOMIQUES
UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN**
3, Place Montesquieu, B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE (Belgique)

Introduction

La construction de modèles d'évaluation des actifs financiers risqués est étroitement dépendante des techniques d'optimisation auxquelles elle fait appel ; au Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers, modèle statique unipériode de Sharpe, Lintner et Mossin, a succédé le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers Multipériode de Merton, modèle multipériode résolu par la programmation dynamique appliquée à des processus stochastiques d'Itô, processus markoviens particuliers. Malgré la progression qu'elle a permise dans la compréhension du problème, cette méthode reste difficile à mettre en oeuvre puisqu'elle nécessite l'introduction de la fonction d'utilité indirecte avant de pouvoir déterminer les demandes individuelles d'actifs risqués et la formule d'évaluation de leur rendement espéré (en fonction de variables économiques déterminées au cours de la résolution du programme d'optimisation). La seconde caractéristique de ce type de modèle est qu'ils se situent dans le contexte d'une économie d'échange. Des tentatives de construction de modèle intégrant les décisions de production se sont révélées décevantes essentiellement parce que la programmation dynamique était impuissante à résoudre des problèmes trop complexes (Cox, Lucas, Richard and Sundaresan,...)

Le problème de l'évaluation multipériodique des titres financiers est abordé ici à l'aide d'une méthode d'optimisation nouvelle et simple, la théorie des programmes mixtes (P. Michel, 1980). Après l'étude classique du cas d'un bien de consommation unique, on généralise les résultats obtenus dans le cas d'une économie qui comporte plusieurs biens de consommation et on établit une formule simple d'évaluation des actifs risqués susceptible de vérifications empiriques. Dans une seconde partie, on étudie un modèle complet simple avec production, consommation et gestion des actifs et on montre que le taux de rendement de l'actif sans risque, habituellement supposé exogène, est alors endogène.

I. Evaluation multipériodique du rendement de titres financiers

Description du problème

Soit $S = (s_1, s_2, \dots, s_T)$ une suite d'états élémentaires s_t de l'économie se rapportant à des instants t différents ; on suppose que la chronique d'événements ainsi définie a une probabilité d'occurrence $\Pi(s)$ strictement positive.

On notera E l'ensemble de suites S possibles ; l'avenir est donc appréhendé par la donnée d'un nombre fini d'états possibles à des instants différents et peut être visualisé sous une forme arborescente puisque la probabilité d'occurrence de l'un de ces événements en t est fonction des réalisations en $t-1, t-2, \dots$.

Pour tout $t \geq 1$ et tout $S \in E$, on notera S_t la suite partielle $(s_1, s_2, \dots, s_t)$ composée des t premiers termes de S .

Dans un premier temps, nous considérerons une économie dans laquelle la production n'est pas présente de manière explicite.

On suppose que les prix anticipés par les agents intègrent les aléas technologiques des unités de production, tels qu'ils sont perçus par le marché.

Les investisseurs prendront leurs décisions en fonction seulement des variables de prix qui apparaissent donc comme des "indicateurs d'information" d'un niveau plus agrégé que les risques visualisés en termes d'aléas sur les quantités produites. Il existe dans cette économie $n+1$ actifs financiers distincts (n actifs risqués et un actif sans risque le $(n+1)^{\text{ième}}$) et N agents ; nous supposerons que le marché de ces actifs vérifie les hypothèses classiques suivantes :

- il n'y a ni coût de transaction, ni taxes, ni problème d'indivisibilité des actifs.
- il y a un nombre suffisant d'investisseurs pour que chacun puisse acheter ou vendre sans limitation au prix du marché.
- Le marché est toujours en équilibre (c'est à dire qu'il n'y a pas de transaction hors prix d'équilibre).

- d) Le rendement r de l'actif sans risque, qu'il soit prêteur ou emprunteur, est unique
- e) Les ventes à découvert d'actifs sont permises
- f) Les transactions ont lieu de façon discrète dans le temps.

Le problème que nous posons est celui de l'évaluation du rendement des actifs risqués (et donc du prix de ces actifs) anticipé par le marché en fonction de variables restant à définir. Dans le cas où il n'existe qu'un seul bien de consommation dans l'économie, une réponse à cette question a été apportée par Rubinstein.

Nous nous proposons de traiter le problème en utilisant une technique d'optimisation encore peu usitée, la théorie des programmes mixtes ; elle nous permettra de retrouver, par une voie différente, le résultat de Rubinstein puis de généraliser le dit résultat au cas où il existe plusieurs biens de consommation dans l'économie.

Evaluation du rendement des actifs risqués dans une économie à un seul bien

Nous considérons qu'un investisseur i maximise l'espérance de son utilité sous une contrainte de richesse ; il détermine à chaque instant $t, t+1, \dots$ la composition de son portefeuille optimal et sa consommation de bien. Soient :

U^i	la fonction d'utilité courante de i ;
$W_t^i (S_t)$	la richesse de i en t dépendant de la suite S_t qui s'est réalisée dans le passé ;
B^i	sa fonction d'utilité terminale ;
$C_t^i (S_t)$	sa consommation en t ;
$w_t^{ji} (S_t)$	la richesse investie par i dans l'actif j , en t ,
$\alpha_t^j (S_{t+1}) = \alpha_t^j (S_t, s_{t+1})$	variable aléatoire discrète égale au rendement de l'actif j dans le cas où l'état s_{t+1} se réalise en $t+1$; $\alpha_t^j (S_{t+1})$ est égal à la variation relative du prix de l'actif, dividendes compris ;
$r_t (S_t)$	est le taux de l'actif sans risque en t .

Dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté nous abandonnerons l'indice i , étant bien entendu que le programme d'optimisation qui suit est celui d'un investisseur i :

$$\text{Max}_{w^j, C} \sum_{S \in E} \Pi(S) \left[\sum_{t=0}^{T-1} U(C_t(S_t), t) + B(W_T(S), T) \right]$$

$$W_{t+1}(S_{t+1}) - W_t(S_t) = \underbrace{\sum_{j=1}^n w_t^j(S_t) [\alpha_t^j(S_{t+1}) - r_t(S_t)] + [W_t(S_t) - C_t(S_t)] r_t(S_t) - C_t(S_t)}_{\text{rendement du capital investi } W_t(S_t) - C_t(S_t)}$$

Pour que le problème proposé soit mixte en tout point, il suffit que pour $0 \leq t < T$ et pour tout S appartenant à E , le problème obtenu en fixant toutes les variables à l'exception de $W_t(S_t)$, de $w_t^j(S_t)$ et de $C_t(S_t)$, j variant de 1 à n , vérifie les conditions suivantes :

- l'ensemble des commandes est un ensemble convexe d'un espace vectoriel sur R
- la fonction d'utilité courante et terminale sont respectivement concaves par rapport à la consommation et à la richesse.
- les contraintes sont linéaires.

Le programme ci-dessus vérifiant ces conditions, nous pouvons définir l'hamiltonien stochastique du programme d'optimisation et appliquer les conditions nécessaires d'optimalité de Michel :

$$H(W, w, C, a, q_{t+1}, t, S_t) = E_{S_t} \left[a U(c, t) + q_{t+1} \left[\sum_{j=1}^n w^j (\alpha_t^j - r_t) + (W - C) r_t - C \right] \right]$$

où E_{S_t} est l'opérateur d'espérance conditionnelle à S_t : Si X est une variable aléatoire discrète alors $E_{S_t}(X) = \sum_{s_{t+1}} \frac{\Pi(S_t, s_{t+1})}{\Pi(S_t)} X(S_t, s_{t+1})$.

Si $(\bar{W}, \bar{w}, \bar{C})$ est une solution optimale du problème posé, alors il existe des nombres a et q_{t+1} (.) non tous nuls et tels que :

$$(i) \quad a \geq 0$$

$$(ii) \quad q_t(S_t) - E_{S_t} \left[q_{t+1} \right] = \frac{\partial H}{\partial W}(\bar{W}, \bar{w}, \bar{C}, a, q_{t+1}, t, S_t)$$

$$(iii) \quad q_T(S) = a \frac{\partial H}{\partial W}(\bar{W}(S), T)$$

(iv) pour $0 \leq t \leq T-1$, l'hamiltonien en (t, S_t) atteint son maximum sur l'ensemble des commandes réalisables en $\bar{w}_t(S_t)$ et $\bar{c}_t(S_t)$

La condition (ii) peut alors s'écrire

$$q_t(S_t) - E_{S_t} [q_{t+1}] = E_{S_t} [q_{t+1} r_t] - r_t(S_t) E_{S_t} [q_{t+1}]$$

$$\text{Soit} \quad q_t(S_t) = E_{S_t} [q_{t+1} (1+r_t)] \quad 0 \leq t \leq T-1 \quad (1)$$

L'équation (1) et la condition (iii) constituent un système de récurrence ; si a était nul alors tous les $q_t(\cdot)$ seraient nuls ; on en déduit : $a > 0$ et on peut choisir $a = 1$.

La maximisation du hamiltonien par rapport aux variables de commande (respectivement la consommation et les parts de richesse investies dans chacune des catégories de titres) conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial C} &= E_{S_t} \left[U_C(\bar{C}(S_t), t) - q_{t+1} (1+r_t) \right] = 0 \\ \text{soit} \quad U_C(\bar{C}(S_t), t) &= E_{S_t} [q_{t+1} (1+r_t)] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w^j} = E_{S_t} [q_{t+1} (\alpha_t^j - r_t)] = 0 \quad (3)$$

Le rapprochement des équations (1) et (2) conduit à la condition d'optimalité :

$$U_C(\bar{C}(S_t), t) = q_t(S_t) \quad (2')$$

c'est à dire qu'à chaque instant t , la variable duale qui s'interprète comme l'évaluation de la richesse W_t , est égale à l'utilité marginale de la consommation sur la trajectoire optimale. De l'équation (3) on peut déduire, puisque r_t n'est pas aléatoire, que :

$$E_{S_t} \begin{bmatrix} q_{t+1} & \alpha_t^j \end{bmatrix} = r_t(S_t) E_{S_t} \begin{bmatrix} q_{t+1} \end{bmatrix}$$

Soit

$$E_{S_t} \begin{bmatrix} \alpha_t^j \end{bmatrix} = r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{q_{t+1}}{E_{S_t}(q_{t+1})}, \alpha_t^j \right] \quad (3')$$

D'où l'équation (4) déduite de (3') et (2')

$$\boxed{E_{S_t} \begin{bmatrix} \alpha_t^j \end{bmatrix} = r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}{E_{S_t} U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}, \alpha_t^j \right]} \quad (4)$$

Cette équation (4) permet donc d'évaluer pour un investisseur le rendement espéré d'un actif financier en fonction de la covariance de ce rendement avec l'utilité marginale "normalisée" de la consommation de cet agent. C'est le résultat établi par Rubinstein.

On peut remarquer que dans le cas où les ventes à découvert ne sont pas permises, l'équation (3) s'écrit

$$E_{S_t} \begin{bmatrix} q_{t+1} (\alpha_t^j - r_t) \end{bmatrix} \leq 0$$

et $w_t^j E_{S_t} \begin{bmatrix} q_{t+1} (\alpha_t^j - r_t) \end{bmatrix} = 0$

Soit donc $E_{S_t} \begin{bmatrix} \alpha_t^j \end{bmatrix} \leq r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}{E_{S_t} U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}, \alpha_t^j \right]$

et $w_t^j \left[E_{S_t} \begin{bmatrix} \alpha_t^j \end{bmatrix} - r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}{E_{S_t} U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}, \alpha_t^j \right] \right] = 0$

C'est à dire que pour tout actif j dont l'espérance de rendement est strictement inférieure à :

$$r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)}{E_{S_t} [U_C(\bar{C}(S_{t+1}), t+1)]}, \alpha_t^j \right], \text{ la demande est nulle.}$$

Le résultat obtenu s'applique à un agent particulier i et dépend de sa fonction d'utilité U^i . Pour obtenir un équilibre, on suppose généralement que tous les individus sont identiques. Ceci n'est pas nécessaire.

Remarquons d'abord que la loi d'évolution de l'évaluation subjective l'épargne (1) est déterminée par le taux de rendement de l'actif sans risque, donc qu'elle est la même pour tous les agents. Par conséquent, si l'évaluation marginale par i de sa richesse finale est constante, $\partial U^i / \partial W = b^i$, alors son évolution de l'épargne est

$$q_t^i(S_t) = b^i \bar{q}_t(S_t)$$

où $\bar{q}_t(S_t)$ est la solution de (1) de conditions terminales $\bar{q}_T(S) = 1$ pour tout S . Dans ce cas, le rendement espéré de l'actif j s'écrit pour l'agent i :

$$\begin{aligned} E_{S_t} [\alpha_t^j] &= r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{q_{t+1}^i}{E_{S_t} (q_{t+1}^i)}, \alpha_t^j \right] \\ &= r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{\bar{q}_{t+1}}{E_{S_t} (\bar{q}_{t+1})}, \alpha_t^j \right] \end{aligned}$$

Il est de même pour tous les agents.

Généralisation du problème dans le cas où il existe m biens dans l'économie

Dans le cas où il existe m biens dans l'économie (ils seront repérés par l'indice k), le programme d'optimisation d'un consommateur devient :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{w^j, C^k} \sum_S \Pi(S) \sum_{t=0}^{T-1} U[C_t(S_t), t] + B[W_T(S), T] \\ w_{t+1}(S_{t+1}) - w_t(S_t) = \sum_{j=1}^n w_t^j(S_t) \left[\alpha_t^j(S_{t+1}) - r_t(S_t) \right] + \left[w_t - \sum_{k=1}^m p_t^k(S_t) c_t^k(S_t) \right] r_t(S_t) \\ - \sum_{k=1}^m p_t^k(S_t) c_t^k(S_t) \end{aligned}$$

où $C_t^k(S_t)$ est la décision de consommation de bien k , $C = (C^1 \dots C^m)$

$p_t^k(S_t)$ est le prix du bien k

Les conditions d'optimalité s'écrivent alors :

$$q_t(S_t) = E_{S_t} \left[q_{t+1} (1+r_t) \right] \quad (5)$$

$$q_T(S) = B_W(\bar{W}(S), T) \quad (6)$$

$$U_k(\bar{C}(S_t), t) = \frac{\partial U}{\partial C^k}(\bar{C}(S_t), t) = p_t^k(S_t) q_t(S_t) \text{ pour } 1 \leq k \leq m \quad (7)$$

$$E[\alpha_t^j] = r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{U_k(\bar{C}_{t+1}(S_{t+1}), t+1) / p_{t+1}^k(S_{t+1})}{E_{S_t} \left[U_k(\bar{C}_{t+1}(S_{t+1}), t+1) / p_{t+1}^k(S_{t+1}) \right]}, \alpha_t^j \right] \quad (8)$$

A chaque instant, un individu alloue une partie de sa richesse à sa consommation et investit la partie restante, une fois qu'il a décidé de consacrer un revenu R à sa consommation, il doit décider des quantités $C^1, C^k, \dots, C^m$ des biens qu'il consomme ; par conséquent il doit résoudre le programme d'optimisation

$$\text{Max } V(C^1, C^2, \dots, C^k, \dots, C^m)$$

$$\sum_{k=1}^m p^k C^k = R$$

Programme de solution $V(p^1, \dots, p^m, R)$ fonction d'utilité indirecte

Il s'en suit donc que $\frac{U_k}{p^k} = \frac{dV}{dR}$ pour tout k ($1 \leq k \leq m$) tel que $C^k > 0$.

Et par conséquent l'équation (8) s'écrit :

$$E[\alpha_t^j] = r_t(S_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{dV_{t+1}/dR_{t+1}}{E_{S_t} [dV_{t+1}/dR_{t+1}]}, \alpha_t^j \right] \quad (8')$$

L'équation (8) peut aussi se simplifier dans le cas où on considère un bien particulier (le bien 1 par exemple) qui servirait de numéraire, c'est à dire dont le prix est toujours égal à 1'unité :

$$E[\alpha_t^j] = r_t(s_t) - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{U_1(\bar{C}(s_{t+1}), s_{t+1})}{E_{S_t}(U_1(\bar{C}(s_{t+1}), s_{t+1}))}, \alpha_t^j \right] \quad (9)$$

Comme précédemment, dans le cas où tous les individus sont identiques ou ont chacun une dévaluation marginale constante de leur richesse finale, cette formule est valable pour le marché entier, et sous la forme (8') ou (9) elle permet donc de généraliser le résultat précédent.

On peut déduire de l'expression (8') une nouvelle formulation, qui permet des vérifications empiriques aisées ; remplaçons la fonction d'utilité indirecte $V^i(R^i)$ de l'individu i par son approximation quadratique

$$V^i(R^i) = a^i (R^i)^2 + b^i R^i + c^i$$

Les coefficients a^i , b^i , et $c^i(s_t)$ dépendent d'un système de prix anticipés $P_{t+1}^i = P_{t+1}^i(s_t)$ tel que chaque agent anticipe le même vecteur de prix dans tous les états du monde ; (8') peut alors s'écrire :

$$E[\alpha_t^j] = r_t(s_t) - \frac{2a^i}{E_{S_t}[dV^i/dR^i]} \text{cov}_{S_t}[R^i, \alpha^j]$$

Soit en notant $(A^i)^{-1} = \frac{2a^i}{E_{S_t}[dV^i/dR^i]}$ et en faisant la sommation sur l'ensemble

des individus on obtient, sans expliciter la période :

$$(E[\alpha^j] - r) \sum_{i=1}^N (A^i)^{-1} = \text{cov} \left[\left(\sum_{i=1}^N R^i \right), \alpha^j \right]$$

c'est-à-dire .

$$E(\alpha^j) - r = A^N \text{cov}(R, \alpha^j)$$

avec

$$(A^N)^{-1} = \sum_{i=1}^N (A^i)^{-1} \text{ et } R = \sum_{i=1}^N R^i$$

L'excédent de rendement espéré d'un titre risqué par rapport au taux sans risque est proportionnel à la covariance du rendement de ce titre avec la consommation globale en valeur.

II. Etude d'un modèle d'équilibre à deux secteurs

Dans cette deuxième partie, nous allons considérer une économie qui se compose de trois agents : un consommateur, une firme productrice du bien de consommation C, une firme productrice d'un bien de capital K.

Nous adoptons les notations suivantes :

- $p_t(S_t)$: prix relatif en t du bien de capital par rapport au bien de consommation qui sert de numéraire ;
- $F^C(., S_{t+1})$: fonction de production nette de la firme productrice de bien de consommation ;
- $K_{t+1}^C(S_t)$: capital investi dans le secteur de la consommation entre t et t+1 servant à la production aléatoire en t+1 ;
- $F^I(., S_{t+1})$: fonction de production nette de la firme productrice de bien de capital ;
- $K_{t+1}^I(S_t)$: capital investi dans le secteur de biens de capital entre t et t+1 ;
- $w_t^C = p_t K_t^C$: richesse investie dans le secteur de la consommation ;
- $w_t^I = p_t K_t^I$: richesse investie dans le secteur des biens de capitaux ;
- $r_t(S_t)$: taux sans risque, c'est-à-dire que $\frac{1}{1 + r_t(S_t)}$ est le prix présent d'une unité de bien de consommation disponible dans une période.

Un titre émis par une des deux firmes s'interprète comme un droit de propriété d'une fraction de l'output de la firme concernée. Les rendements des titres concernés s'écriront alors :

$$\alpha_t^C(S_{t+1}) = \frac{F^C(K_{t+1}^C(S_t), S_{t+1})}{p_t(S_t) K_{t+1}^C(S_t)} \quad (10)$$

pour la firme produisant des biens de consommation: $\alpha_t^C(S_{t+1})$ est la quantité de bien de consommation produite en t+1 par unité d'équivalent bien de consommation investie en t dans le secteur de la consommation.

$$\alpha_t^I(S_{t+1}) = \frac{p_{t+1}(S_{t+1}) F^I(K_{t+1}^I, S_{t+1})}{p_t(S_t) K_{t+1}^I(S_t)} \quad (11)$$

pour la firme produisant des biens de capitaux $\alpha_t^I(s_{t+1})$ est la quantité d'équivalent bien de consommation produit en $t+1$ par unité d'équivalent bien de consommation investie en t dans le secteur des biens de capitaux. La consommation de la période présente est égale à la production de bien de consommation, qui est donc considérée comme non-stockable, c'est-à-dire que :

$$C_t(s_t) = F^C(K_t^C(s_{t-1}), s_t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T-1 \quad (12)$$

De plus, l'équation d'évolution du stock de capital, si μ est le taux de dépréciation de ce capital s'écrit :

$$K_{t+1}^C(s_t) + K_{t+1}^I(s_t) = (1-\mu) [K_t^C(s_{t-1}) + K_t^I(s_{t-1})] + F^I(K_t^I(s_{t-1}), s_t) \quad (13)$$

$K_t^C(s_{t-1}) + K_t^I(s_{t-1})$ est le stock de capital en $t-1$

$F^I(K_t^I(s_{t-1}), s_t) - \mu [K_t^C(s_{t-1}) + K_t^I(s_{t-1})]$ est l'accroissement net de bien de capital entre $t-1$ et t .

Les conditions précédentes résultant du programme d'optimisation du consommateur s'écrivent (§1) :

$$q_t(s_t) = E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) (1+r_t) \right] \quad (14)$$

$$q_T(s) = B_W(W(s), T) \quad (15)$$

$$q_t(s_t) = U_C(C_t(s_t), t) \quad (16)$$

$$E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) \alpha_t^I(s_{t+1}) \right] = E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) \alpha_t^C(s_{t+1}) \right] = r_t(s_t) E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) \right] \quad (17)$$

Nous nous placerons à la période t , les stocks de capitaux disponibles $K_t^C(s_{t-1})$ et $K_t^I(s_{t-1})$ sont connus de même que la consommation $C_t(s_t)$ égale à la production de bien de consommation soit $F^C(K_t^C(s_{t-1}), s_t)$. Des équations (17) et (14), on peut déduire les équations (18) et (18').

$$q_t(s_t) = E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) (1+r_t) \right] = E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) (1+\alpha_t^I(s_{t+1})) \right] \quad (18)$$

$$= E_{s_t} \left[q_{t+1}(s_{t+1}) (1+\alpha_t^C(s_{t+1})) \right] \quad (18')$$

et en remplaçant q_t , α_t^I , et α_t^C et $\bar{C}(s_t)$ par leurs valeurs respectives données par les équations (16), (10), (11) et (12) on obtient :

$$U_C(\bar{C}_t(s_t), t) = E_{s_t} \left[U_C(F^C(K_{t+1}^C, s_{t+1})) \left[1 + \frac{F^C(K_{t+1}^C, s_{t+1})}{p_t K_{t+1}^C} \right] \right] \quad (19)$$

$$= E_{s_t} \left[U_C(F^C(K_{t+1}^C, s_{t+1})) \left[1 + \frac{p_{t+1} F^I(K_{t+1}^I, s_{t+1})}{p_t K_{t+1}^I} \right] \right] \quad (19')$$

Supposons déterminé $p_t(s_t)$: l'équation (19) doit donc être vérifiée par K_{t+1}^C quantité de capital investie dans le secteur des biens de consommation. D'autre part la fonction de K_{t+1}^C : $U_C(F^C) (1 + \frac{F^C}{p_t K_{t+1}^C})$ est monotone décroissante

si on suppose que $U_{CC} < 0$ (utilité marginale décroissante de la consommation)

et $\frac{d}{dK^C} (\frac{F^C}{K^C}) < 0$ (productivité moyenne décroissante) ; par conséquent l'équation

(19) permet de déterminer K_{t+1}^C en fonction de $p_t(s_t)$ prix relatif des deux biens. De plus, on pourra alors utiliser l'équation (13) pour déterminer $K_{t+1}^I(s_t)$:

$$K_{t+1}^I(s_t) = (1-\mu) \left[K_t^C(s_{t-1}) + K_t^I(s_{t-1}) \right] + F^I(K_t^I(s_{t-1}), s_t) - K_{t+1}^C(s_t)$$

et les équations (12), (14) et (16) pour obtenir $C_{t+1}(s_{t+1})$ et r_t :

$$C_{t+1}(s_{t+1}) = F^C(K_{t+1}^C, s_{t+1})$$

et

$$q_t(s_t) = U_C(C(s_t), t) = (1+r_t) E_{s_t} \left[q_{t+1} \right] = (1+r_t) E_{s_t} U_C(F^C(K_{t+1}^C, s_{t+1})) \quad (20)$$

En résumé, à la période t , la consommation C_t et les stocks de capitaux disponibles $K_t^C(s_t)$ et $K_t^I(s_t)$ étant déterminés par le passé, l'équation (19) permet de déterminer K_{t+1}^C capital investi en t dans le secteur de la consommation, en fonction du prix relatif $p_t(s_t)$ des deux biens; par différence on obtient K_{t+1}^I

investi en t dans le secteur des biens de capitaux.

Proposition. Lorsque le prix $p_{t+1} = p_{t+1}(S_t)$ est déterminé en période t (marché à terme), alors toutes variables du modèle sont déterminées en fonction des données initiales K_0^C et K_0^I . En particulier, le taux de rendement sans risque $r_t(S_t)$ est déterminé de manière endogène par les conditions d'équilibre.

Démonstration. Le prix relatif initial p_0 est déterminé par les conditions d'équilibre passé ayant conduit aux stocks K_0^C et K_0^I :

$$p_0 = \frac{F^C(K_0^C)}{K_0^C} / \frac{F^I(K_0^I)}{K_0^I}.$$

En supposant déterminés $p_t(S_{t-1})$, $K_t^C(S_{t-1})$ et $K_t^I(S_{t-1})$, nous avons vu qu'on en déduit de manière unique K_{t+1}^C et $K_{t+1}^I(S_t)$, $q_{t+1}(S_{t+1})$ et $r_t(S_t)$. L'hypothèse de marché à terme, $p_{t+1} = p_{t+1}(S_t)$, permet de calculer p_{t+1} à l'aide de l'expression (19') :

$$p_{t+1}(S_t) = \frac{K_{t+1}^I(S_t)}{K_{t+1}^C(S_t)} \frac{E_{S_t} \left[q_{t+1} F^C(K_{t+1}^C, S_{t+1}) \right]}{E_{S_t} \left[q_{t+1} F^I(K_{t+1}^I, S_{t+1}) \right]}$$

Ainsi, par récurrence, toutes les variables du modèle sont déterminées de manière unique.

Dans le cas général, il subsiste une certaine indétermination des prix relatifs qui sont assujettis à

$$E_{S_t} \left[p_{t+1} \right] = \frac{K_{t+1}^I(S_t)}{K_{t+1}^C(S_t)} \frac{E_{S_t} \left[q_{t+1} F^C(K_{t+1}^C, S_{t+1}) \right]}{E_{S_t} \left[q_{t+1} F^I(K_{t+1}^I, S_{t+1}) \right]} - \text{cov}_{S_t} \left[\frac{q_{t+1} F^I(K_{t+1}^I, S_{t+1})}{E_{S_t} \left[q_{t+1} F^I(K_{t+1}^I, S_{t+1}) \right]}, p_{t+1} \right] \quad (21)$$

Il s'agit ici d'une indétermination de prix dans un modèle d'anticipations rationnelles. Le taux d'intérêt de l'actif sans risque est endogène : il est exclu de choisir un taux exogène pour lever l'indétermination des prix. En effet, dans le cas simple d'une valorisation marginale constante de la richesse finale, un rendement exogène fixé induit des évaluations $q_t = (1 + r_t)q_{t+1}$ déterministes qui sont incompatibles avec une production aléatoire du bien de consommation :

$$q_t = U_C(F^C(K_t^C, S_t))$$

L'indétermination du prix relatif $p_{t+1}(S_{t+1})$ peut aussi être levée, sans marché à terme, en supposant que ce prix s'ajuste pour neutraliser le risque supplémentaire des biens de capitaux. Ce prix égalisant en toutes circonstances les revenus du capital K^I et du capital K^C , on aura l'équation supplémentaire : $\alpha_t^I(S_{t+1}) = \alpha_t^C(S_{t+1})$, qui détermine p_{t+1} en fonction de p_t et des productions résultant des capitaux engagés.

Conclusion

Dans une première partie nous avons généralisé le résultat de Rubinstein au cas de plusieurs biens de consommation et établi une formule simple susceptible de vérifications empiriques. Ensuite, nous avons montré que le taux de rendement de l'actif sans risque qui sert de référence à l'étude des rendements des actifs risqués est endogène dans un modèle économique complet avec production, consommation et gestion des actifs. Sa détermination résulte des conditions d'équilibre du modèle lorsque l'on fait l'hypothèse d'anticipations rationnelles : les agents prévoient exactement l'éventail des productions et des prix de la période suivante selon l'état de la nature. Nous avons obtenu les conclusions suivantes :

- lorsqu'il n'y a pas d'aléa sur le prix relatif du bien de capital par rapport au bien de consommation (soit que ce prix est établi dans un marché à terme sur une période, soit que ce prix s'ajuste pour neutraliser le risque supplémentaire des biens de capitaux), alors toutes les variables sont déterminées par les conditions d'équilibre dans chaque état de la nature ;
- par contre, lorsque l'incertitude concernant le prix relatif vient s'ajouter aux risques technologiques, alors subsiste une indétermination partielle de ce prix relatif : on obtient une multiplicité de solutions en anticipations rationnelles.

Bibliographie

- Breeden, D.T., "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities". Journal of Financial Economics, 1979.
- Cox, J., Ingersoll J. and Ross S., "A Theory of the Term Structure of Interest Ratio. Research Paper N° 468. (Août 1978).
- Lintner, J., "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification", Journal of Finance (Dec. 1965).
- Lucas R.E., "Asset Prices in an Exchange Economy", Econometrica (Nov. 1978).
- Merton R., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", Econometrica, Vol. 41 n° 1, (septembre 1973).
- Michel Ph. "Programmes mathématiques mixtes", R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle, Vol. 14 n° 1 (février 1980).
- Mossin J., "Equilibrium in a Capital Asset Market", Vol. 34 n° 4, Econometrica (octobre 1966).
- Rubinstein M., "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options", The Bell's Journal of Economics (Autumn 1976).
- Sharpe W., "Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", Journal of Finance, Sept. 1964.
- Richard S. and Sundaresan, "A Continuous Equilibrium Model of Commodity Prices in a Multigood Economy", Research Paper n° 360A, juillet 1980.