

Γιάννης Καραγιαννάκης | Marie-Pascale Noël

Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά - Δυσαριθμησία

Νευρογνωστική προσέγγιση και
τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας



1η έκδοση: Ιανουάριος 2024

Γιάννης Καραγιαννάκης | Marie-Pascale Noël
Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά - Δυσαριθμησία
Νευρογνωστική προσέγγιση και τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας

Φιλολογική επιμέλεια: Ηλίας Αλικάκος
Σχεδιασμός εξωφύλλου: Κυριακή Βογιατζή
Ηλεκτρονική σελιδοποίηση: Ermis graphics
Η εικονογράφηση του εξωφύλλου έχει σχεδιαστεί με τη χρήση πόρων/στοιχείων από το Freepik.com

© 2024 Εκδόσεις ΠΡΟΠΟΜΠΟΣ

ISBN: 978-618-5705-12-1

Απαγορεύεται η μερική ή ολική αναδημοσίευση του παρόντος έργου καθώς και η αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε μέσο χωρίς τη γραπτή άδεια του εκδότη, σύμφωνα με τις διατάξεις του Ελληνικού Νόμου (Ν. 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας.

Εκδόσεις ΠΡΟΠΟΜΠΟΣ
28ης Οκτωβρίου 53, 10433 Αθήνα
Τ: 210 5245264, 210 5245246
E: propobos@propobos.gr
<https://www.propobos.gr>

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	9
Ευχαριστίες.....	11
1 Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά - Δυσαριθμησία	13
1.1 Ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων.....	13
1.2 Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά - Δυσαριθμησία.....	16
1.2.1 Τι είναι;.....	16
1.2.2 Πού οφείλονται;.....	18
Ελλείμματα σε ειδικά αριθμητικά συστήματα.....	18
Ελλείμματα σε γενικές γνωστικές δεξιότητες.....	21
1.3 Ετερογένεια ΜΔΜ-Δυσαριθμησίας.....	24
1.4 Μαθηματικό γνωστικό προφίλ.....	25
2 Τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά - Δυσαριθμησία	35
2.1 Τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας.....	35
2.2 Από την έρευνα στην πράξη.....	38
2.2.1 Συνιστώσες της Ρητευέλικτης διδασκαλίας.....	39
Ρητή διδασκαλία.....	39
Ευρετική διδασκαλία.....	43
Μαθηματική ευελιξία.....	46
Πρόσθετες συνιστώσες προς ενσωμάτωση.....	49
2.2.2 Βασικές κατευθύνσεις για τον σχεδιασμό εξατομικευμένων προγραμμάτων παρέμβασης.....	55
3 Πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες	65
3.1 Ανάπτυξη πρώιμων μαθηματικών δεξιοτήτων.....	65
3.1.1 Το προσεγγιστικό αριθμητικό σύστημα και το σύστημα εντοπισμού αντικειμένων.....	65
3.1.2 Λεκτική μέτρηση: κατάκτηση και επεξεργασία.....	67
3.1.3 Απαρίθμηση και αρχές μέτρησης.....	70
3.1.4 Εκμάθηση της πληθικότητας των αριθμολέξεων.....	71
3.1.5 Απεικόνιση αριθμών σε χωρική δομή: η αριθμογραμμή.....	73
3.2 Δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με ΜΔΜ - Δυσαριθμησία.....	75
3.2.1 Προσεγγιστικό αριθμητικό σύστημα (ΠΑΣ).....	75
3.2.2 Άμεσος καθορισμός μικρού πλήθους αντικειμένων.....	76
3.2.3 Μέτρηση και απαρίθμηση.....	76
3.2.4 Τοποθέτηση αριθμού σε αριθμογραμμή.....	77
3.3 Μελέτες παρέμβασης.....	77
3.3.1 Πρέπει να επικεντρώνονται σε αριθμητικές ή λογικές πτυχές;.....	77

3.3.2 Γενικευμένα προγράμματα αριθμητικής επεξεργασίας.....	78
3.3.3 Στοχευμένες παρεμβάσεις στην αριθμητική.....	79
Εξάσκηση του ΠΑΣ: The Number Race.....	79
Ειδική εξάσκηση του ΠΑΣ.....	80
Εκπαίδευση της αναπαράστασης του συμβολικού ή του μη συμβολικού αριθμητικού μεγέθους.....	82
Εξάσκηση στις αριθμογραμμές.....	83
Πρέπει να δίνουμε προτεραιότητα στην ενασχόληση με αριθμογραμμές;.....	84
Η σπουδαιότητα της ενσωμάτωσης του ανθρώπινου σώματος.....	85
3.4 Από την έρευνα στην πράξη: πώς αξιολογούνται οι πρώιμες μαθηματικές δεξιότητες;.....	87
3.5 Από την έρευνα στην πράξη: τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας.....	88
3.5.1 Η ακολουθία των αριθμολέξεων.....	88
3.5.2 Απαρίθμηση.....	88
3.5.3 Η πληθικότητα των αριθμολέξεων.....	91
3.5.4 Τα δάκτυλα ως κώδικας αναπαράστασης των αριθμών.....	91
3.5.5 Αντιστοίχιση των συμβολικών αριθμών με το αριθμητικό τους μέγεθος.....	92
3.5.6 Σχέσεις μεταξύ αριθμών.....	93
3.5.7 Ανάλυση αριθμών.....	97
4 Αναπαράσταση αριθμητικού συστήματος με βάση το 10.....	105
4.1 Θεωρητική προσέγγιση και πορεία ανάπτυξης.....	105
4.1.1 Τα αριθμητικά συστήματα.....	105
4.1.2 Αναπαράσταση του αριθμητικού μεγέθους.....	106
4.1.3 Αναπαράσταση του δεκαδικού συστήματος.....	108
Η ενιαία δομή αντίληψης.....	109
Η δομή αντίληψης ομάδα Χ-Δεκάδων και Μονάδες.....	110
Η δομή αντίληψης μέτρηση ανά Δεκάδες και Μονάδες.....	110
Η δομή αντίληψης θεσιακή αξία Δεκάδων και Μονάδων.....	110
Η δομή αντίληψης ενσωματωμένες Δεκάδες και Μονάδες.....	110
4.1.4 Το θεσιακό σύστημα.....	111
4.1.5 Η επίδραση της γλώσσας στην ανάπτυξη του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος.....	112
4.1.6 Μετα-κωδικοποίηση.....	113
Ορισμός και μοντέλα.....	113
Ανάπτυξη της μετα-κωδικοποίησης και τύποι λαθών.....	114
Επίδραση της δομής της γλώσσας στη μετα-κωδικοποίηση.....	116
4.1.7 Δεκαδικό σύστημα & υπολογισμοί.....	117
4.2 Δυσκολίες σε παιδιά με ΜΔΜ-δυσαριθμσία.....	119
4.3 Μελέτες παρέμβασης.....	121
4.3.1 Κωδικοποίηση της 10-δικότητας και κατανόηση του αριθμητικού μεγέθους.....	121
4.3.2 Θεσιακό δεκαδικό σύστημα.....	123
4.3.3 Μετα-κωδικοποίηση.....	127
4.3.4 Εν κατακλείδι.....	130
4.4 Από την έρευνα στην πράξη: πώς αξιολογείται η αντίληψη του αριθμητικού συστήματος με βάση το 10;.....	131
4.5 Από την έρευνα στην πράξη: τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας.....	132
4ο Στάδιο: Μετα-κωδικοποίηση.....	138

5 Αριθμητικές πράξεις.....	147
5.1 Εισαγωγή.....	147
5.2 Η ανάπτυξη αριθμητικών δεξιοτήτων.....	149
5.2.1 Απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις.....	150
5.2.2 Απλοί πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις.....	153
5.2.3 Σύνθετοι υπολογισμοί.....	155
5.2.4 Ο ρόλος της εκτίμησης στην αριθμητική.....	162
5.3 Δυσκολίες που παρατηρούνται στις ΜΔΜ-δυσαριθμσία.....	163
5.4 Μελέτες παρέμβασης.....	166
5.4.1 Αναπαράσταση μεγέθους.....	166
5.4.2 Απλή αριθμητική.....	168
5.4.3 Σύνθετοι υπολογισμοί.....	173
5.5 Από την έρευνα στην πράξη: πώς αξιολογούνται οι δεξιότητες εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων;.....	174
5.6 Από την έρευνα στην πράξη: τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας.....	177
5.6.1 Πρόσθεση και αφαίρεση.....	179
Εννοιολογική προσέγγιση.....	179
Σύνθετες αριθμητικές πράξεις με το μυαλό.....	193
Γραπτές κάθετες πράξεις.....	205
5.6.2 Πολλαπλασιασμός και διαίρεση.....	211
Απλοί πολλαπλασιασμοί.....	212
Απλές διαιρέσεις.....	222
Διεγείροντας τη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.....	226
Σύνθετοι υπολογισμοί σε πολυψήφιους αριθμούς.....	229
Γραπτοί υπολογιστικοί αλγόριθμοι.....	238
6 Επίλυση λεκτικών προβλημάτων.....	249
6.1 Γιατί είναι δύσκολη η επίλυση ενός λεκτικού προβλήματος;.....	249
6.2 Τυπολογίες λεκτικών προβλημάτων.....	252
6.2.1 Προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.....	252
6.2.2 Προβλήματα πολλαπλασιασμού.....	253
6.2.3 Προβλήματα ανάλογων ποσών.....	255
6.3 Δυσκολίες στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων και ΜΔΜ.....	257
6.4 Πειραματικά προγράμματα παρέμβασης ή διδασκαλίας.....	258
6.4.1 Μελέτες προγραμμάτων παρέμβασης ή διδασκαλίας.....	258
6.4.2 Το μοντέλο της Σιγκαπούρης: ένα επιτυχημένο πρόγραμμα διδασκαλίας.....	267
6.5 Από την έρευνα στην πράξη: πώς αξιολογούνται οι ικανότητες επίλυσης προβλημάτων.....	272
6.6 Από την έρευνα στην πράξη: τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας.....	275
6.6.1 Οικοδομώντας μια διαδικασία προόδου.....	275
6.6.2 Υποστήριξη της μαθηματικής μοντελοποίησης.....	276
6.6.3 Προτεινόμενο ευρετικό μοντέλο.....	278
6.6.4 Υποδειγματικά λυμένα λεκτικά προβλήματα.....	280
Προβλήματα πρόσθεσης & αφαίρεσης.....	281
Προβλήματα πολλαπλασιασμού & διαίρεσης.....	287
7 Ρητοί αριθμοί.....	295
7.1 Η πρόκληση της εκμάθησης των ρητών αριθμών.....	295

7.1.1	Δυσκολίες στη σύγκριση δεκαδικών αριθμών.....	298
7.1.2	Δυσκολίες στη σύγκριση κλασμάτων.....	299
7.1.3	Τι είναι μεγαλύτερη πρόκληση: οι κλασματικοί ή οι δεκαδικοί αριθμοί;.....	302
7.1.4	Η πρόκληση των πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.....	303
7.1.5	Η πρόκληση των πράξεων με κλασματικούς αριθμούς.....	304
7.2	Δυσκολίες στους ρητούς αριθμούς σε παιδιά με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία.....	305
7.3	Μελέτες παρέμβασης.....	307
7.3.1	Προγράμματα παρέμβασης στους δεκαδικούς αριθμούς.....	307
7.3.2	Προγράμματα παρέμβασης στα κλάσματα.....	310
7.3.3	Συμπερασματικά.....	319
7.4	Από την έρευνα στην πράξη: πώς αξιολογούνται οι ικανότητες επεξεργασίας των ρητών αριθμών.....	320
7.5	Από την έρευνα στην πράξη: τεκμηριωμένες πρακτικές διδασκαλίας.....	323
7.5.1	Κλάσματα.....	323
	Κλάσμα ως μέρος - όλου ενός αντικειμένου.....	323
	Κλάσμα ως μέρος - όλου μιας συλλογής αντικειμένων.....	324
	Γνήσια, καταχρηστικά και ίσα με τη μονάδα κλάσματα.....	328
	Το κλάσμα ως διαίρεση.....	329
	Το κλάσμα ως μέτρο-αριθμός.....	331
	Ισοδύναμα κλάσματα & κλασματική μονάδα.....	332
	Πρόσθεση και αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων.....	334
	Πρόσθεση και αφαίρεση ετερόνυμων κλασμάτων.....	336
	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.....	342
	Διαίρεση κλασμάτων.....	343
7.5.2	Δεκαδικός αριθμοί.....	346
	Η κατανόηση των δεκαδικών αριθμών.....	346
	Πράξεις σε δεκαδικούς αριθμούς.....	351
7.5.3	Ευρετικό μοντέλο ρητών αριθμών.....	354
	Απόδοση επιστημονικών όρων στα ελληνικά.....	361
	Ευρετήριο όρων.....	365

Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό είναι καρπός της συνεργασίας ενός μαθηματικού και ενός παιδο-νευροψυχολόγου που ενδιαφέρονται για τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (ΜΔΜ) και τη Δυσαριθμσία. Η επαγγελματική σταδιοδρομία και των δύο συνδυάζει την επιστημονική έρευνα και το ενδιαφέρον για την κλινική και εκπαιδευτική πράξη.

Στόχος αυτού του βιβλίου είναι να χτίσει γέφυρες μεταξύ, αφενός, όσων η γνωστική ψυχολογία και οι νευροεπιστήμες έχουν καταφέρει να αναδείξουν σχετικά με την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων των παιδιών και τις δυσκολίες που συνδέονται με αυτή την ανάπτυξη και, αφετέρου, της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πράξη, σε παιδιά με ή χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά. Απευθύνεται σε οποιονδήποτε δουλεύει με παιδιά που δυσκολεύονται στα μαθηματικά, είτε αυτά έχουν διαγνωστεί με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία είτε όχι. Μπορεί να είναι δάσκαλοι ή καθηγητές μαθηματικών, ειδικοί παιδαγωγοί, εκπαιδευτικοί ψυχολόγοι ή νευροψυχολόγοι, φοιτητές και ερευνητές.

Το βιβλίο αποτελείται από επτά κεφάλαια. Το **πρώτο κεφάλαιο** περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι μαθηματικές δεξιότητες, τις γνωστικές δεξιότητες στις οποίες εδράζονται, τις πηγές προέλευσης των ΜΔΜ-Δυσαριθμσίας, την ετερογένεια των ατόμων με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία και την ανάγκη σκιαγράφησης εξατομικευμένων μαθηματικών γνωστικών προφίλ των μαθητών. Το **δεύτερο κεφάλαιο** κάνει μια ανασκόπηση των πιο αποτελεσματικών πρακτικών διδασκαλίας για μαθητές με ΜΔΜ-Δυσαριθμσία και προτείνει τις βασικές κατευθύνσεις για τον σχεδιασμό εξατομικευμένων προγραμμάτων παρέμβασης ανάλογα με το μαθηματικό γνωστικό προφίλ κάθε μαθητή. Το **τρίτο κεφάλαιο** επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι βασικές μαθηματικές δεξιότητες, όπως η επεξεργασία συνόλου αντικειμένων κατά προσέγγιση, η απαρίθμηση, η μέτρηση και η απεικόνιση των φυσικών αριθμών σε αριθμογραμμή. Το **τέταρτο κεφάλαιο** πραγματεύεται τον τρόπο με τον οποίο ο ανθρώπινος νους αναπτύσσει και επεξεργάζεται τις συμβολικές αναπαραστάσεις των αριθμών, δηλαδή των αριθμολέξεων (π.χ. δώδεκα) και των αραβικών αριθμών (π.χ. 12), τη μετα-κωδικοποίηση από τη μια αναπαράσταση του αριθμού στην άλλη και τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται το θεσιακό αριθμητικό σύστημα με βάση το 10. Το **πέμπτο κεφάλαιο** επικεντρώνεται στις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές προκειμένου να εκτελούν αριθμητικές πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Αφορά την εκτέλεση πράξεων με το μυαλό (νοερά), καθώς και την εφαρμογή των γραπτών αλγόριθμων (κάθετες πράξεις) για υπολογισμούς με πολυψήφιους αριθμούς. Το **έκτο κεφάλαιο** εξετάζει τις διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, ανάλογων ποσών και ποσοστών. Το **έβδομο κεφάλαιο** ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές τους ρητούς αριθμούς (δηλαδή τα κλάσματα και τους

δεκαδικούς αριθμούς), καθώς και με τις στρατηγικές εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων μεταξύ ρητών αριθμών.

Κάθε κεφάλαιο (με εξαίρεση τα δύο πρώτα) αποτελείται από ένα θεωρητικό και ένα πρακτικό μέρος. Το θεωρητικό μέρος περιλαμβάνει: α) την επεξήγηση των γνωστικών και μαθηματικών διαδικασιών που εμπλέκονται στην αντίστοιχη θεματική ενότητα και τον τρόπο που αυτές αναπτύσσονται, β) τις δυσκολίες και τις προκλήσεις που συναντώνται κατά την ανάπτυξη αυτή, ειδικά για τα παιδιά με ΜΔΜ-Δυσαριθμησία, γ) μια σύνθεση των ερευνητικών μελετών παρέμβασης που αποσκοπούν στην αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών. Το πρακτικό μέρος, το οποίο είναι και εκτενέστερο, περιλαμβάνει: α) τον τρόπο αξιολόγησης των αντίστοιχων μαθηματικών δεξιοτήτων ώστε να βοηθήσει τον εκπαιδευτικό/ειδικό να εκτιμήσει αν είναι απαραίτητο ή όχι να παράσχει βοήθεια σε αυτό το επίπεδο στον μαθητή, αλλά και να είναι σε θέση να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα της παρέμβασης εφόσον χρειαστεί, β) ένα ολοκληρωμένο και διαφοροποιημένο πρόγραμμα διδασκαλίας/παρέμβασης για την ανάπτυξη των αντίστοιχων μαθηματικών δεξιοτήτων ανάλογα με το μαθηματικό γνωστικό προφίλ κάθε μαθητή. Οι πρακτικές διδασκαλίες με παράλληλη χρήση πληθώρας χειροπιαστών εποπτικών υλικών που προτείνονται βασίζονται στην επιστημονική γνώση που παρουσιάζεται στο θεωρητικό μέρος κάθε κεφαλαίου, καθώς και στην κλινική εμπειρία των δύο συγγραφέων του βιβλίου και των συνεργατών τους ανά την υφήλιο.

Μέσω αυτού του βιβλίου, επιδιώκουμε να εξοπλίσουμε τους εκπαιδευτικούς και τους ειδικούς με τα απαραίτητα εργαλεία προκειμένου να παρεμβαίνουν έγκαιρα και αποτελεσματικά στα παιδιά που δυσκολεύονται στα μαθηματικά ή αντιμετωπίζουν ΜΔΜ-Δυσαριθμησίας, ώστε να τα βοηθούν να ξεπεράσουν ή να διαχειριστούν αποτελεσματικά τις δυσκολίες τους και να αγαπήσουν τα μαθηματικά μέσω των διαφοροποιημένων πρακτικών διδασκαλίας που παρουσιάζουμε στο εν λόγω βιβλίο.

Γιάννης Καραγιαννάκης και Marie-Pascale Noël

Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν όλα τα παιδιά που συμμετείχαν στις μελέτες τους ή στις εξατομικευμένες κλινικές συνεδρίες παρέμβασης τα τελευταία χρόνια. Ευχαριστούν επίσης την Alice De Visscher για τη συμβολή της στη συγγραφή του Κεφαλαίου 5.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στην εκπαιδευτικό Anny Cooreman και στον εκπαιδευτικό οργανισμό Eureka στο Βέλγιο. Αρκετές από τις μεθόδους και τις ιδέες που παρουσιάζονται σε αυτό το βιβλίο είναι εμπνευσμένες από τη μεθοδολογία RekenTrapperS που έχει αναπτύξει η Anny Cooreman. Η μαθηματική μεθοδολογία RekenTrapperS χρησιμοποιείται στο σχολείο Eureka Leuven ως αποκλειστική μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών. Εφαρμόζεται για περισσότερα από 20 χρόνια και σε άλλα σχολεία, από επαγγελματίες και από οικογένειες στο σπίτι για την αντιμετώπιση δυσκολιών στα μαθηματικά. Ο Δρ. Γιάννης Καραγιαννάκης έχει συνεργαστεί για αρκετά χρόνια με τον εκπαιδευτικό οργανισμό Eureka και έχει μοιραστεί με την κυρία Anny Cooreman αποτελεσματικές πρακτικές παρέμβασης στα μαθηματικά.

Τέλος, η Dr. Marie-Pascale Noël ευχαριστεί το Εθνικό Ίδρυμα Έρευνας του Βελγίου για την οικονομική υποστήριξη του.