



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN
DÉPARTEMENT D'INGÉNIERIE MATHÉMATIQUE

CENTER FOR SYSTEMS ENGINEERING AND APPLIED
MECHANICS

SINGULARITÉS DE SAUT, SINGULARITÉS DE PLATITUDE ET COMMANDE OPTIMALE

Jean-Baptiste Coulaud

Thèse soumise en vue de l'obtention du grade de *Docteur en sciences
appliquées*

Jury : Guy Champion, UCL (Promoteur)
Georges Bastin, UCL (Comité d'encadrement)
Brigitte d'Andréa Novel, MINES ParisTech (Comité d'encadrement)
Rodolphe Sépulchre, Ulg
Nicolas Petit, MINES ParisTech
Vincent Blondel, UCL (Président)

Février 2009

Remerciements¹

Au moment de mettre sous presse cet ouvrage, plusieurs émotions me traversent, et parmi elles, un profond sentiment de gratitude. Cette gratitude s’adresse à tous ceux et celles dont l’empreinte est quelque part en filigrane de cet ouvrage, soit par leur implication directe dans celui-ci, soit par la manière dont ils ont marqué ma propre vie, et certainement pour plusieurs un peu des deux.

Un merci particulier à Guy Campion, mon promoteur, dont l’évocation restera pour moi synonyme, non seulement de rigueur scientifique, mais également de chaleur humaine, d’équilibre dans le jugement et d’un imbroglio raffiné de logique, d’histoire et de goût pour le verbe.

Merci à Georges Bastin, membre de mon comité d’encadrement et également co-promoteur de mon mémoire de fin d’études avec Guy, pour ses conseils pratiques et son soutien constant au travers de moult détails durant ces quelques années de doctorat.

Merci à Brigitte d’Andréa Novel pour ses encouragements et remarques qui ont valorisé mes travaux dès l’épreuve de confirmation au doctorat.

Merci à Nicolas Petit pour sa disponibilité et ses précieux apports, notamment en commande optimale.

Merci également à Rodolphe Sépulchre pour sa rigueur et son souci de clarté qui ont largement contribué à la qualité de ce document.

Merci à Vincent Blondel, Président du jury ainsi que du département INMA, pour son pragmatisme.

J’ajoute à ces remerciements les académiques du département. Je pense notamment à Paul Van Dooren, Michel Gevers et François Glineur, qui m’ont beaucoup appris.

Je ne peux manquer de remercier du fond du cœur mon collègue de bureau Cristobald de Kerchove, en qui j’ai trouvé un véritable ami, pour les excellents moments partagés au a121 et en dehors.

Mon séjour à “l’Euler” n’aurait certainement pas été aussi agréable sans le concours indispensable des secrétaires Isabelle Hisette, Michèle Termolle, Lydia

¹ L’ensemble des travaux présentés dans cet ouvrage a été subventionné par le programme des Pôles d’Attraction Interuniversitaires, institué par la Politique scientifique fédérale belge.

De Boeck et Nathalie Ponet. J'ai apprécié la constance de leur disponibilité, de leur gentillesse et de leur efficacité.

Je n'ai malheureusement pas le talent pour dire, comme il conviendrait, à chacun des membres du bâtiment Euler et du CESAME la touche personnelle qu'ils ont su ajouter au tableau coloré de cette aventure doctorale. Au risque d'en oublier, je ne peux retenir quelques noms auxquels j'associe à la volée l'une ou l'autre qualité non exclusive : Michel De Wan, pour ses aides techniques dès avant ma thèse et son bon sens, Pierre Daye, pour sa franchise, sa collaboration didactique et ses aides logiciels nombreuses, Yamen Othmani pour nos discussions longues et enrichissantes, Etienne Huens et Olivier Convert, pour le support informatique, Thomas Cason, Julien Hendricks et Jean-Charles Delvenne, pour leur joutes logiques et humoristiques, Damien François, devenu un professionnel du "blitz", Laure Ninove et Iliyana Simeonova, pour leur gentillesse enthousiaste, et bien d'autres comme Maxime Melchior, Raphaël Jungers et Slim Kammoun dont la sympathie a contribué discrètement mais indiscutablement à l'ambiance agréable dans laquelle j'ai baigné.

J'aimerais continuer ces lignes en évoquant mon épouse Charlotte, compagne exceptionnelle dont la présence illumine mon quotidien et a été pendant ce travail de recherche un soutien inestimable. Je pense bien sûr à nos radieux enfants, joie de notre foyer et trésors de vie.

Je ne serais pas ce que je suis sans l'éducation unique, l'affection constante et le brin de sage folie de mes parents, qui avec mon frère et ma sœur ont constitué un cadre familial merveilleux de gaîté et de complicité.

Encore un mot pour mon ami et frère Frédéric Kalala ainsi qu'aux communautés chrétiennes de Louvain-la-Neuve, qui ont été pour moi et ma famille sources de réconfort, de joie et de soutien constant.

Un volume entier serait sûrement nécessaire pour souligner avec un peu plus de justesse la valeur de ceux que j'ai mentionnés et de tous ceux qui me sont chers ici ou au loin. Je me contenterai de les remercier de manière très cavalière, en bloc, qu'ils soient mes parents, mes amis, mes collègues, mes enseignants, ...

à tous, encore MERCI.

Enfin, j'adresse ma reconnaissance à Celui qui est, qui était et qui vient, à qui je dois, outre la Vie, la Paix et bien d'autres choses, d'avoir pu croiser le chemin de toutes les personnes que je viens de nommer ainsi que celles que, faute de place ou de mémoire, j'ai omises dans ces lignes.

Au lecteur persévérant

Résumé.

Ce document définit et décrit, dans le cadre des systèmes dynamiques à temps continu, un phénomène de discontinuité entre l'espace des trajectoires d'état et l'espace des trajectoires des sorties. Ce phénomène, que nous appellerons singularité de saut, apparaît dans certains systèmes dynamiques alors même que les fonctions des équations différentielles qui en définissent l'évolution sont parfaitement lisses. La thèse analyse le lien entre cette propriété et la propriété de platitude différentielle. Outre la compréhension structurelle des systèmes concernés que la notion de singularité de saut apporte, la thèse souligne aussi les implications sur la formulation de certains problèmes de commande optimale.

Plusieurs exemples viennent illustrer cette problématique, notamment celui du robot mobile à plusieurs roues orientables qui a été le point de départ de l'analyse.

Table des matières

Table des Matières	v
1 Introduction	7
1.1 Le robot unicycle : garage en temps minimal	7
1.2 Le rail rotatif : existence de trajectoires isolées	9
1.3 Et la platitude dans tout ça ?	15
1.4 Problématique	17
1.5 La fin du commencement	18
2 Définitions et notions préliminaires	21
2.1 Systèmes différentiellement plats avec singularités	23
2.1.1 Approche classique	23
2.1.2 Linéarisation par feedback dynamique et matrice de découplage	24
2.1.3 Approche avec singularités	25
2.1.4 Configurations équivalentes	30
2.2 Commande optimale non linéaire	30
2.2.1 Définition d'un problème de commande optimale	31
2.2.2 Quelques exemples	32
2.2.3 Principe du minimum de Pontryagin	33
2.2.4 Application du principe de Pontryagin aux deux exemples précédents	35
3 Singularité de saut : définition et propriétés	41
3.1 Définition et appellations	42
3.2 Quelques propriétés	44
4 Lien avec les singularités de platitude	49
4.1 Conditions nécessaires de G -singularité pour un système plat ...	51

4.2	Condition suffisante de G -singularité pour un système plat	56
4.3	Un mot sur la non inclusion réciproque	58
5	Une série d'illustrations	61
5.1	Le rail rotatif	62
5.2	Le robot unicycle	64
5.3	Un bras de robot sphérique	65
5.4	Extension combinée du bras sphérique et du rail rotatif	68
6	Le robot à plusieurs roues orientables et motrices	71
6.1	Description géométrique et cinématique du robot	73
6.1.1	Définition des contraintes cinématiques	74
6.1.2	Hierarchisation des contraintes	76
6.1.3	Le centre instantané de rotation et sa projection stéréographique	78
6.2	Cinématique de la contrainte de coordination pour le robot à $r \geq 3$ roues	80
6.2.1	Présentation Générale	81
6.2.2	Description de la dynamique de coordination quand $r = 3$	81
6.2.3	Platitude différentielle du système (6.29)	82
6.2.4	Singularités de saut	84
6.2.5	Représentation Graphique	84
6.2.6	Pour deux roues seulement	86
6.2.7	Pour $r \geq 4$	86
6.3	La cinématique complète du robot	87
6.3.1	Définition du système	87
6.3.2	Le robot à 2 roues	88
6.3.3	Pour $r \geq 3$ roues	96
6.3.4	Lien avec la contrainte de coordination seule	98
6.3.5	Lien avec le robot unicycle	99
6.3.6	Une trajectoire avec singularités de saut : translation et rotation uniformes	99
6.4	En guise de conclusion	102
7	Commande optimale pour systèmes G-singuliers différentiellement plats	105
7.1	Exemples d'applications en commande optimale	106
7.1.1	Point de vue général	106
7.1.2	Rail rotatif : poursuite optimale de trajectoires	108
7.1.3	Robot unicycle : changement de posture en temps minimal	110
7.1.4	Poursuite d'une trajectoire pour le robot à roues orientables	113

7.2	Paramétrisations adaptées	115
7.3	Un exemple de logiciel en commande optimale : NTG	116
7.3.1	Le problème initial	116
7.3.2	Exploitation des sorties plates	117
7.3.3	Introduction des B -splines	118
7.3.4	Discrétisation des contraintes de parcours	119
7.3.5	Le solveur non linéaire	120
7.4	NTG pour des systèmes G -singuliers	120
7.5	Simulations numériques	121
7.5.1	Poursuite d'une trajectoire pour le rail rotatif	122
7.5.2	Poursuite d'une trajectoire pour le robot à roues orientables	126
7.6	Proposition d'amélioration d'algorithmes tels que NTG	135
7.6.1	Une perte d'information	136
7.6.2	Présentation alternative du problème	136
7.6.3	Premier argument en faveur de cette approche	137
7.6.4	Second argument	138
7.7	Bénéfices de cette variante	139
7.7.1	Complexité de l'algorithme	139
7.7.2	Quelques tests et bilan global	141
7.7.3	Difficultés et variantes	147
7.7.4	Quelques remarques de conclusion	148
8	Conclusion(s) et perspectives	151
8.1	Contributions	151
8.2	Et après ?	153
9	Annexes	157
9.1	La fonction atan_2	157
9.2	Valeurs explicites de certaines matrices	157
9.2.1	Matrice $G^T G$ de l'équation (6.7) à la page 76	157
9.2.2	Matrice $\tilde{H}^T \tilde{H}$ de l'équation (6.19) à la page 78	158
9.3	Régularité de la contrainte de coordination des roues	160
9.4	Description de $\mathcal{M}$ et $T\mathcal{M}$ pour un nombre de roues $r \geq 4$	162
	Littérature	163

Notations pour tout l'ouvrage

On reprend ici des notations de tout l'ouvrage. Les notations spécifiques à un chapitre particulier seront introduites en tête de celui-ci. Dans le tableau ci-dessous, on a privilégié l'ordre alphabétique tandis que les tableaux en début de chaque chapitre sont organisés dans l'ordre d'apparition des variables.

Notation	Description
$G\text{-}...$	: préfixe pour les objets caractérisés par une singularité de saut
$\frac{\partial a}{\partial b}$	: jacobienne de a vue comme une fonction des variables b , cela correspond à la dérivée partielle si b est scalaire
$\ \cdot\ $	: norme dans un espace de dimension finie
$\ \cdot\ _\infty$	: norme infinie d'une fonction
$\doteq$	: notation signifiant que l'on utilise l'égalité pour définir la valeur d'une variable (à gauche ou à droite du signe " $\doteq$ ")
a	: distance entre P et R_1 pour le robot à deux roues
(a_i, b_i)	: coordonnées cartésiennes de R_i par rapport au robot
A_1 et A_2	: deux algorithmes
A, B, M	: trois points d'un plan
A, B	: deux matrices
$B^i(\cdot), B_s^i(\cdot)$	: $i^{\text{ième}}$ fonction d'une base de B -splines d'ordre s
$B(\mathcal{X}, r)$	: boule centrée en $\mathcal{X}$ de rayon r
$\mathbb{B}$	: $\doteq B(\mathcal{X}, r) \cap \mathcal{E}$
$c_{\max}$	: borne supérieure de la contrainte $C(\cdot)$
C	: constante d'intégration
	: constante de saut (réel strictement positif)
	: $\doteq [a_1 \sin \beta_1 - b_1 \cos \beta_1 \dots a_r \sin \beta_r - b_r \cos \beta_r]$
$C(\cdot)$	: fonction de contrainte
$\hat{C}$	: saut pour le "sur-système" dérivant du saut C
$C_i(\cdot), C_p(\cdot), C_f(\cdot)$	: fonctions de contraintes (respectivement initiales, de parcours et finales)

Notation	Description
$d(\cdot, \cdot)$	: une distance sur $\mathcal{C}_{pm}^q([t_0, t_f], \mathbb{H})$
d	: degré d'un polynôme dans un algorithme
D	: direction de recherche au cours d'une "line search"
$\hat{d}$	: distance dans l'espace des trajectoires des sorties $\hat{Y}$
$\det$	: déterminant d'une matrice
$\mathbb{E}$	: espace d'état
$\mathcal{E}$	: espace du vecteur $\mathcal{X}$
f	: fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{E}$ définissant l'équation d'évolution d'un système dynamique
$f_i(\beta_i, v_i)$	: $\doteq \begin{bmatrix} -v_i \sin \beta_i \\ v_i \cos \beta_i \end{bmatrix}$
$F(\cdot), G(\cdot)$	: fonctions définissant la dynamique d'un "sur-système"
$F(\beta, V)$	: $\doteq [f_1 \dots f_r]^T$
$\mathbb{F}$	: espace des variables d'entrée
g_0	: constante de pesanteur
G	: $\doteq [G_1 \dots G_r]^T$
G_i	: $\doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_i \\ 0 & 1 & a_i \end{bmatrix}$
h	: fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{H}$ définissant les sorties d'un système dynamique
$H(\cdot)$	: Hamiltonien
	: fonction liant X à $\hat{X}$ et $\hat{Y}$
$H(\beta)$	: $\doteq [H_1 \dots H_r]^T$
$\tilde{H}(\beta)$	: $\doteq [\tilde{H}_1 \dots \tilde{H}_r]^T$
H_i	: $\doteq [\cos \beta_i \quad \sin \beta_i \quad a_i \sin \beta_i - b_i \cos \beta_i]$
$\tilde{H}_i$	: $\doteq [\sin \beta_i \quad -\cos \beta_i]$
$\mathbb{H}$	: espace des variables de sortie
$\mathcal{H} = T^q \mathbb{H}$	: fibré tangent d'ordre q de l'espace $\mathbb{H}$, c'est l'espace du vecteur $\mathcal{Y}$
i	: entier d'indexation
I	: centre instantané de rotation
I_p	: matrice identité $p \times p$
$\bar{I}$	: projection stéréographique de I
I_-, I_+	: limites de I proche de l'axe $(R_1 R_2)$ pour le robot à deux roues
$\mathbb{I}_j$	: hypersurface entre deux $\mathbb{M}_i$
$\mathbb{I}_{\delta_1 \dots}^{\gamma_1 \dots}$	: hypersurface entre $\mathbb{M}_{\delta_1 \dots}$ et $\mathbb{M}_{\gamma_1 \dots}$
j	: entier d'indexation
$J(\cdot)$	: fonction de coût
J_{ns}, J_s	: coûts localement optimaux (poursuite du "rail rotatif")

Notation	Description
k	: nombre de $\mathbb{M}_i$
$k + 1$	: nombre de contraintes après discrétisation d'un problème de commande optimale
k_1, k_2	: constantes de Lipschitz (réels positifs)
K	: réel positif
	: complexité algorithmique de l'évaluation d'une contrainte $C(\cdot)$
$\mathbb{K}_0$	: équivalent dans $\mathcal{H}$ de $\mathbb{M}_0$
$\widehat{\mathbb{K}}_0$	: équivalent dans $\mathcal{H}$ de $\widehat{\mathbb{M}}_0$
$\mathbb{K}$	: sous-espace de $\mathcal{H}$ sur lequel sont définis les ϕ_i
$\mathcal{K}(\beta)$	: définit le direction de V pour $\beta \in \mathcal{M}$
l	: nombre de $\mathbb{L}_j$
	: nombre de points de collocation pris en compte dans un algorithme
$L(\cdot)$	: fonction intervenant dans la partie intégrale du coût
	: fonction liant Y à $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$
m	: dimension de $\mathbb{F}$ et de $\mathbb{H}$ si les sorties sont plates
$\widehat{\mathbb{M}}_0$	: domaine des singularités de platitude
	: $\dot{\widehat{T}}(\mathbb{M}_0)$ image de $\mathbb{M}_0$ par $\widehat{T}$
$\mathbb{M}_i$	: $i^{\text{ième}}$ ouvert sur lequel le système est plat
$\mathbb{M}_{\delta_1 \dots}$	: notation alternative d'un $\mathbb{M}_i$
$\mathbb{M}_-, \mathbb{M}_+$	: deux $\mathbb{M}_i$ de part et d'autre d'une surface G -singulière $\mathbb{M}_0$
$\mathcal{M}$	: variété de contrainte des β_i
$\mathcal{M}_0$	: surface G -singulière dérivant de $\mathbb{M}_0$ pour un "sur-système"
n	: dimension de $\mathbb{E}$
	: indice d'une suite
N	: entier indice d'une suite
	: taille de $\widehat{Y}$
N_1, N_2	: nombre d'opérations pour une itération de deux algorithmes comparés
$\mathbb{N}$	: ensemble des entiers positifs ou nuls
$\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_-, \mathbb{N}_+$	: sous-ensembles de $\mathbb{B}$
$\mathcal{N}$	: $\dot{\mathbb{N}}_+$ ou $\mathbb{N}_-$
$(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$	: repère du plan
p	: dimension de $\mathbb{H}$
	: nombre de points de collocation
$p_i, \bar{p}_i$	: critères de traversée d'une surface G -singulière
P	: un point de $R\mathbb{S}_3$ ou de $\mathbb{R}_3$
	: point de référence du robot à roues orientables
$(P, \vec{x}_R, \vec{y}_R)$	: repère attaché au robot

Notation	Description
q	: ordre de dérivation de Y comme sorties plates : nombre de points de collocation pertinents
r	: nombre de roues du robot à plusieurs roues orientables : rayon d'une boule : position d'un point le long d'un bras de robot
r_1, r_2	: nombre d'itérations de deux algorithmes comparés
R	: paramètre de longueur : rapport des complexités de deux algorithmes A_1 et A_2 : rayon du bras sphérique
R_i	: centre de la $i^{\text{ème}}$ roue
$(R_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$	: repère attaché à la roue i
$\bar{R}_\infty$	: "pôle nord" de la sphère de Riemann
$\mathbb{R}$	: ensemble des réels
$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$	: corps des réels quotienté par le groupe $2\pi\mathbb{Z}$, l'ensemble des classes étant représenté par l'intervalle $]-\pi, \pi]$. C'est l'ensemble auquel appartiennent toute les variables angulaires
s	: ordre des splines
$s(t)$	: abscisse curviligne
$\mathbb{S}_3$	: sphère unité de $\mathbb{R}^3$
t	: variable d'évolution temporelle
t^*	: instant de commutation
$[t_0, t_f]$	: intervalle de temps sur lequel sont définies les trajectoires
T	: une durée (problème de suivi pour le "rail rotatif")
$\hat{T}(\cdot)$	: fonction de changement de variables entre $\mathcal{X}$ et (Z, U)
$T(\cdot)$	: fonction de changement de variables entre X et Z
u	: angle de la vitesse de M dans le plan
(u_1, u_2)	: variables d'entrées du "rail rotatif"
$(u_1, \dots, u_m)$	: composantes du vecteur U
u_i	: $\dot{\beta}_i$ vitesse d'orientation de la roue i par rapport au robot
U	: vecteur des variables d'entrée : $\dot{(u_1, \dots, u_r)}$, vecteur des vitesses d'orientation des roues
(v, ω)	: variables d'entrées de l'unicycle
$v, \omega, \hat{v}, \hat{\omega}$	: paramètres d'une de famille trajectoires du robot à roues orientables
v_i	: vitesse (scalaire) de R_i par rapport au plan

Notation	Description
V	: scalaire représentant la vitesse de M : variables d'entrées supplémentaires d'un sur-système : $\dot{=}(v_1, \dots, v_r)$ vecteur regroupant les vitesses des centres des roues
$\vec{V}$	: vitesse $\vec{V}$ de P par rapport au plan
(V_1, V_2)	: projection de la vitesse $\vec{V}$ de P sur $(\vec{x}_R, \vec{y}_R)$
$\mathcal{V}$	: $\dot{=}(V_1, V_2, \dot{\theta})$, vecteur des variables de vitesses de translation et de rotation
$\hat{V}$	: valeur scalaire de $\mathcal{V}$
$(x_1, \dots, x_n)$	: composantes du vecteur X
(x_1, x_2)	: coordonnées de référence P du robot dans le plan
(x_1, x_2, θ)	: variables d'état de l'unicycle
(x_1, x_2, θ, v)	: variables d'état de l'unicycle après extension dynamique
$(x_0, y_0),$	: coordonnées cartésiennes respectives de A, B et M
$(x_f, y_f), (x, y)$	
(x_I, y_I)	: coordonnées cartésiennes de I par rapport au robot
X	: vecteur des variables d'état
X_I	: $\dot{=}(x_I, y_I)$
$\hat{X}$	: variables d'état d'un "sur-système" (par rapport au variables X et Y)
$\hat{Y}$	: variables de sortie d'un "sur-système" (par rapport au variables X et Y)
	: vecteur/matrice des coordonnées de la spline décrivant Y
$\mathcal{X}$	: $\dot{=}(X, U)$ vecteur contenant les variables d'état et d'entrées
$\mathcal{X}_0$	: un point de $\mathbb{M}_0$
$\mathcal{X}_s$	: une trajectoire de $\Sigma_{\pm}$
$(y_1, \dots, y_p)$	: composantes du vecteur Y
(y_{1r}, y_{2r})	: trajectoire de référence dans l'espace des sorties
Y	: vecteur des variables de sortie ou des paramètres de splines définissant les sorties
$\mathcal{Y}$	: $\dot{=}(Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$ vecteur contenant les variables de sortie et leurs dérivées
$\vec{z}_0$	: verticale ascendante
Z	: variables d'état alternatives à X : variables de sorties alternatives à Y
$\mathbb{Z}$	: ensemble des entiers relatifs

Notation	Description
α	: scalaire définissant le pas d'un algorithme
	: un angle (résultat d'un algorithme)
β	: $\dot{=} (\beta_1, \dots, \beta_r)$
β_i	: orientation de la $i^{\text{ième}}$ roue par rapport au robot
γ	: second angle d'orientation d'un bras de robot
$\gamma(\cdot)$	: courbe paramétrée, spline
γ_i	: variable de signe ($\dot{=} \pm 1$)
	: coordonnées de $\gamma(\cdot)$ dans une base de B -splines
δ	: paramètre d'une famille de trajectoires pour le "rail rotatif"
	: distance entre deux vecteurs unitaires dans un algorithme
δY	: modification appliquée au vecteur Y pendant une itération
δ^*	: valeur charnière de δ pour un problème de poursuite
δ_i	: variable de signe ($\dot{=} \pm 1$)
ϵ	: réels strictement positifs
η	: réel positif désignant un écart tendant vers zéro dans la définition d'une singularité de saut
ϵ	: variable de signe ($\dot{=} \pm 1$)
θ	: angle d'orientation d'un robot dans le plan
	: angle d'orientation du rail rotatif ou d'un bras de robot
$\Theta(\cdot)$	: variable angulaire fonction linéaire du temps
$\lambda(\cdot)$	: vecteur des fonctions adjointes
$\lambda_i(\cdot)$	: composante de $\lambda(\cdot)$
(μ, θ)	: variables d'état du "rail rotatif"
$\mu(\beta)$	: fonction décrivant implicitement $\mathcal{M}$
ξ	: $\dot{=} (x_1, x_2, \theta)^T$
ξ, Ξ	: état et transformation d'état associés à une extension dynamique
(ρ_i, α_i)	: coordonnées polaires de R_i par rapport au robot
$\Sigma_{\pm}$	: ensemble des trajectoires une fois G -singulières
τ	: un instant particulier, ou une variable d'évolution adimensionnée
$\tau_{\mathcal{X}_s}$	: instant de $[t_0, t_f]$ pour lequel $\mathcal{X}_s(t)$ traverse $\mathbb{M}_0$
$\phi(\cdot)$	: fonction définissant une relation explicite de platitude
ϕ_i	: fonction exprimant $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_i$ à partir de $\mathcal{Y}$
ϕ_-, ϕ_+	: fonctions exprimant $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_-$ (respectivement $\mathbb{M}_+$) à partir de $\mathcal{Y}$
$\psi(\cdot, \cdot)$	: fonction définissant une relation implicite de platitude
$\phi_f(\cdot)$	: fonction intervenant dans la partie finale du coût
(ω, u)	: entrées de l'unicycle après extension dynamique
$\nabla_{\hat{Y}}$	: gradient par rapport aux variables $\hat{Y}$

Introduction

Les travaux qui sont à l'origine du présent document ont trait à des domaines assez variés de l'univers des systèmes dynamiques, comme le suggère déjà le titre de l'ouvrage. De façon à clarifier la manière dont la thèse articule son voyage dans ces différents concepts, cette introduction est présentée à l'aide d'exemples suivis de questions qui posent la problématique de la thèse.

1.1 Le robot unicycle : garage en temps minimal

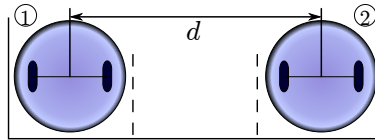


Fig. 1.1. Changement de posture d'un robot unicycle en temps minimal.

Commençons par examiner une manœuvre classique d'un robot unicycle, comme représentée sur la figure 1.1 : l'objectif du déplacement est simplement de passer de la position 1 à la position 2, éloignées d'une distance d , un peu comme un changement de place parmi des emplacements disposés côte à côte. On aimerait effectuer cela en **un minimum de temps**, sachant que la vitesse longitudinale du véhicule est bornée ainsi que sa vitesse de rotation.

Les équations cinématiques du robot sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v \cos \theta \\ \dot{x}_2 &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{1.1}$$

où (x_1, x_2) sont les coordonnées d'un point P de l'essieu du robot par rapport à un repère fixe du plan, v est la vitesse de ce même point¹ appelée vitesse longitudinale, θ est l'angle d'orientation du robot et ω est sa vitesse angulaire. On a donc trois variables d'état, et deux entrées indépendantes. On peut retrouver ces notations sur la figure 1.2.

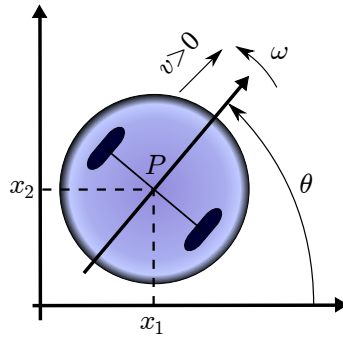


Fig. 1.2. Le robot unicycle, variables d'état et entrées cinématiques

Dans notre exemple, nous supposons que les entrées sont bornées par $v_{\max} = 1.5$ et $\omega_{\max} = 1$:

$$|v| \leq v_{\max} \text{ et } |\omega| \leq \omega_{\max},$$

et que la distance d est unitaire.

Les figures 1.3.b) et 1.3.c) exposent deux solutions localement optimales pour effectuer la manœuvre attendue. La première est celle qui est obtenue à l'aide d'un **logiciel de commande optimale**² tandis que la seconde sera sans doute effectuée de manière plus intuitive par un conducteur quelconque. Pour les valeurs de bornes proposées pour les entrées, la trajectoire optimale (globale) est la seconde trajectoire. En effet, elle est plus rapide que la première car elle n'implique que des angles de rotation faibles et est parcourue à $v = v_{\max}$ tandis que la première, pourtant de longueur moindre, tourne à 180 degrés à une vitesse v bien inférieure à sa borne. Bien qu'optimale, la seconde trajectoire **qui contient un point de rebroussement n'est pas trouvée facilement par le solveur**². Le solveur trouve donc plus facilement des trajectoires régulières analytiquement et géométriquement. On peut se poser les questions suivantes :

¹ les contraintes cinématiques imposent que cette vitesse est orthogonale à l'essieu, ce qui fait que l'on peut la représenter par un scalaire.

² NTG ou OTRAGEN, qui seront présentés au chapitre 7.

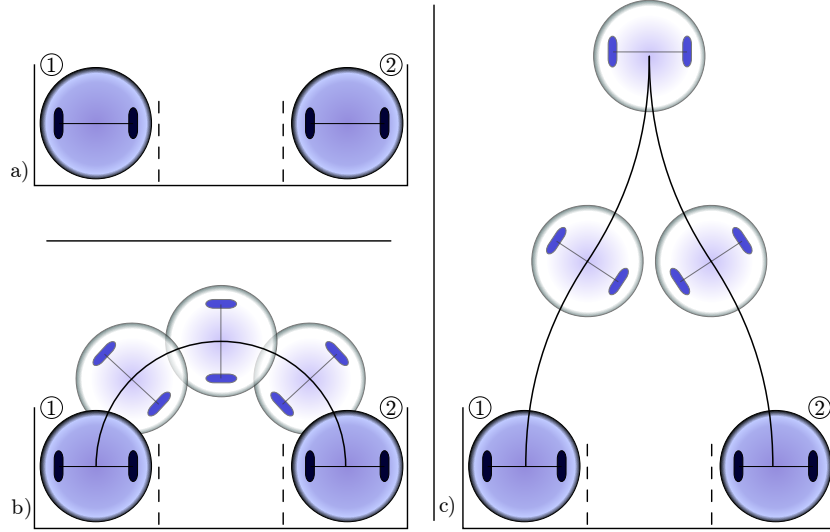


Fig. 1.3. Changement de posture d'un robot unicycle en temps minimal.

Question 1. *Pourquoi certaines trajectoires utiles mais possédant des points singuliers sont-elles difficiles à atteindre avec un solveur de commande optimale ?*

Question 2. *Comment paramétrer un solveur pour pallier cet inconvénient ?*

1.2 Le rail rotatif : existence de trajectoires isolées

Poursuivons nos pérégrinations avec un système dynamique rudimentaire constitué de deux intégrateurs, qui comme nous le verrons possède certaines propriétés similaires à celles du robot unicycle.

Considérons un rail disposé dans un plan horizontal et pouvant pivoter autour d'un axe vertical fixe par rapport au sol. L'angle de rotation du rail est noté θ . La dérivée u_2 de cet angle est la vitesse angulaire du rail que l'on suppose mû par un moteur situé sur l'axe. Un point matériel P se déplace le long du rail au moyen d'un second moteur qui lui communique une vitesse u_1 par rapport au rail. La position du point P le long du rail est notée μ . Les équations cinématiques³ de ce système sont les suivantes :

³ Les équations dynamiques conduisent aux mêmes observations, mais les calculs sont plus longs.

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= u_1 \\ \dot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{1.2}$$

Supposons qu'un utilisateur de ce système soit surtout intéressé par la position du point P par rapport au sol, il définit alors comme sorties du système les coordonnées cartésiennes du point matériel dans le plan :

$$\begin{aligned}y_1 &= \mu \cos \theta \\ y_2 &= \mu \sin \theta\end{aligned}\tag{1.3}$$

Cette description est illustrée par la figure 1.4, où le cercle rouge symbolise le point P , et la flèche représente le rail orienté.

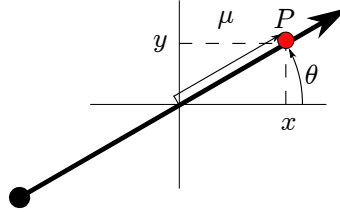


Fig. 1.4. Le “rail rotatif”

Le lecteur averti aura bien sûr remarqué le lien de parenté entre les équations (1.3) et la transformation de coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes. La seule différence, sur laquelle nous insistons particulièrement, est que μ , contrairement à son homologue ρ utilisé en coordonnées polaires, **n’est pas nécessairement positif**, puisque le point P peut se déplacer le long du rail de part et d’autre de l’axe de rotation.

Une première conséquence de cette distinction est que pour tout couple de sorties $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$ il existe exactement deux couples de coordonnées dans l’espace d’état :

$$\begin{aligned}(\mu, \theta) &= \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \text{atan}_2(y_2, y_1) \right) \\ \text{ou } (\mu, \theta) &= \left(-\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \text{atan}_2(y_2, y_1) + \pi \right)\end{aligned}$$

qui appartiennent à deux demi-espaces, celui où $\mu > 0$ et celui où $\mu < 0$. En outre la frontière entre ces demi-espaces, qui est telle que $\mu = 0$, ne donne lieu qu’à un unique couple de sorties : $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Ceci constitue **une sorte de “singularité”**. Ceci n’est pas très nouveau, mais nous allons examiner plus précisément ce type de singularités pour deux raisons :

- comme cela se verra dans des chapitres ultérieurs (5 et 6 en particulier) bien que finalement assez simples elles peuvent être camouflées dans des systèmes plus complexes où leurs conséquences ne sont pas à négliger,

- il semble qu’il n’y ait pas jusque là de cadre mathématique caractérisant l’impact de ces singularités dans les espaces de **trajectoires** d’état et de sorties.

Sur ce dernier point, considérons deux trajectoires de sorties simples et très proches l’une de l’autre pour le système du rail rotatif. Elles sont représentées sur les figures 1.5.a et 1.5.b, par le déplacement du point P en rouge de la position 1 vers la position 2. Cependant, malgré la proximité évidente entre les trajectoires des sorties, il apparaît une différence de nature assez forte entre les réalisations respectives de ces deux trajectoires dans l’espace d’état, puisque dans un cas, une rotation rapide et importante du rail est nécessaire, tandis que dans le second la rotation est de faible amplitude, plus lente et de sens opposé. Enfin, tandis que la position initiale 1 de P par rapport au rail est identique pour les trajectoires a) et b), la position 2 est “diamétralement” opposée, du fait notamment que la seconde trajectoire traverse un état pour lequel $\mu = 0$.

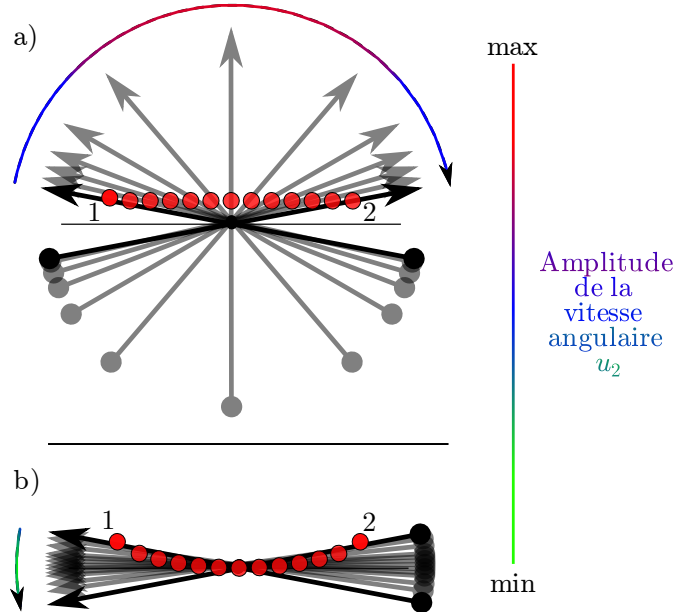


Fig. 1.5. Deux trajectoires proches dans l’espace des sorties mais éloignées dans l’espace d’état et des entrées.

On peut donc déjà identifier une relation discontinue entre les trajectoires de sorties et les trajectoires d’état.

Question 3. *Quelle est la nature de cette discontinuité et ses implications ? Comment est-elle liée au choix des sorties ?*

Approfondissons cet exemple de façon à donner un aperçu plus clair encore de l'**aspect singulier** des trajectoires traversant le sous-espace d'état où $\mu = 0$.

Considérons maintenant une trajectoire de référence définie dans l'espace des sorties pour $t \in [-T, T]$ (avec $T > 0$) par :

$$(y_{1,r}(t), y_{2,r}(t)) = (t, 0).$$

Pour ces sorties-là, il existe deux trajectoires possibles correspondantes pour les variables d'état :

$$\begin{aligned} (\mu_r(t), \theta_r(t)) &= (t, 0), \\ \text{ou} \\ (\mu_r(t), \theta_r(t)) &= (-t, \pi). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ces deux cas sont représentés sur la figure 1.6.

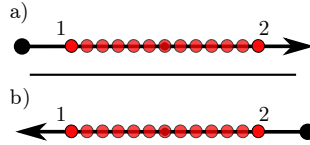
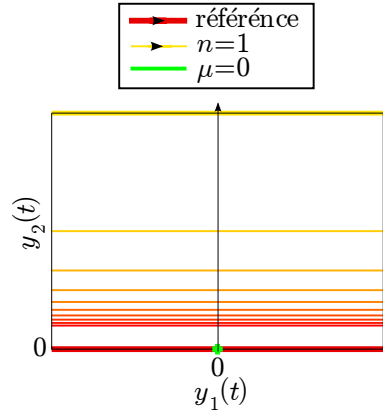


Fig. 1.6. Une trajectoire rectiligne uniforme des sorties traversant $\mu = 0$.

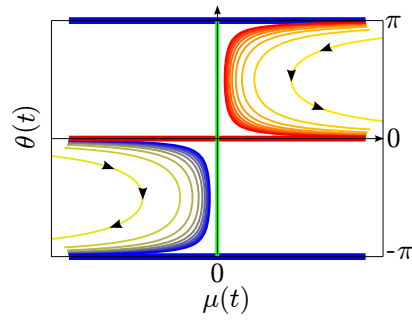
Soit une suite de trajectoires rectilignes uniformes pour le point P convergeant uniformément vers la référence $(y_{1,r}, y_{2,r})$ dans l'espace des sorties du système :

$$(y_{1,n}(t), y_{2,n}(t)) = \left(t, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1. \tag{1.5}$$

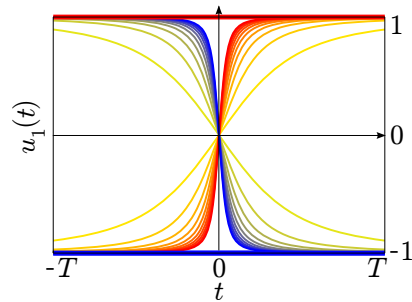
Donnons quelques commentaires à partir des représentations graphiques suivantes.



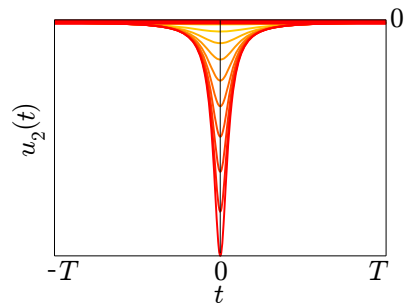
La suite de trajectoires est représentée par un gradient de couleurs, du jaune vers le rouge, qui est la couleur de la référence. **Dans cet espace-ci, la convergence est évidente.**



Dans l'espace d'état, il n'y a pas unicité de la suite donnant lieu aux sorties précédentes, deux sont représentées ci-contre. La première dans les mêmes couleurs que pour les sorties, la seconde allant du jaune vers le bleu. **Quoi qu'il en soit, il n'y a pas convergence** vers l'une des deux trajectoires (1.4) de référence possibles : en rouge l'axe $\theta = 0$, ou en bleu la droite $\theta = \pi \quad [2\pi]$.



L'entrée u_1 converge vers une fonction **discontinue qui ne correspond pas à la référence.**



L'entrée u_2 , **ne converge pas** sur tout l'intervalle vers sa référence et la suite de ses extréma est même **non bornée**. En revanche, il y a unicité de l'entrée u_2 pour les sorties données.

En équations, la première suite proposée a pour expression dans l'espace d'état :

$$(\mu_n(t), \theta_n(t)) = \left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}, \operatorname{atan}_2\left(\frac{1}{n}, t\right) \right).$$

Pour ce qui est des entrées de la référence (en rouge) et de la suite (en dégradé jaune vers rouge sur la figure), on peut écrire :

$$\begin{aligned} (u_{1,r}(t), u_{2,r}(t)) &= (1, 0) \\ (u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)) &= \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}}, -\frac{1}{n} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{n^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les remarques formulées sur la convergence ou non des fonctions proposées se résument dans les formules suivantes :

– d'une part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(y_{1,r}, y_{2,r}) - (y_{1,n}, y_{2,n})\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad (1.7)$$

– par contre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(\mu_r, \theta_r) - (\mu_n, \theta_n)\|_\infty &= \max(T, \pi) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{2,n}\|_\infty &= +\infty \end{aligned} \quad (1.8)$$

En réalité, pour toute suite de trajectoires (μ_n, θ_n) convergeant vers la référence dans l'espace des sorties sans traverser l'ensemble $\{\mu = 0\}$, c'est à dire telle que :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(y_{1,r}, y_{2,r}) - (y_{1,n}, y_{2,n})\|_\infty = 0 \\ \bullet \quad & \text{et } \forall t \in [-T, T], \mu_n(t) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(\mu_r, \theta_r) - (\mu_n, \theta_n)\|_\infty \geq \pi, \\ \bullet \quad & \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{2,n}\|_\infty = +\infty. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dans le cas présent, π sera appelé **le saut**. Cet exemple souligne l'existence de trajectoires "isolées", telles que presque toute suite de trajectoires convergeant vers l'une d'elles dans l'espace des sorties ne converge pas dans l'espace d'état, et présente même un "**saut**" **irréductible**, induisant des entrées arbitrairement grandes. C'est de cette remarque que provient le vocable "**singularité de saut**" employé dans la thèse⁴.

⁴ Ce terme est traduit de l'Anglais "gap-singularity", et donnera lieu dans le texte aux adjectifs *G-singulier*(es).

On commence à entrevoir que dans le cadre de problèmes de commande optimale, on peut s'attendre à ce qu'un algorithme d'optimisation qui ne tient pas compte de ces trajectoires "isolées" sera difficilement en mesure de converger vers elles. **Cet isolement topologique caractérise les singularités de saut.**

Notons de nouveau que la principale différence de nature entre la trajectoire de référence et les trajectoires de la suite est que la première traverse la surface⁵ $\{\mu = 0\}$ tandis que les autres non.

Question 4. *Comment associer le phénomène des singularités de saut mises en évidence dans l'exemple du rail rotatif à une description des systèmes dynamiques ? Quelle définition formelle leur donner ?*

Question 5. *Quels systèmes dynamiques rentrent dans ce cadre ?*

1.3 Et la platitude dans tout ça ?

Un point commun aux deux exemples cités jusqu'ici est la possibilité d'une **"inversion dynamique" permettant notamment d'exprimer l'état du système à partir de la connaissance des sorties sans avoir recours à la résolution d'équations différentielles.** Un cadre adapté pour étudier ce genre de propriétés est celui de la **platitude différentielle**. Examinons-en rapidement les traits principaux.

Le robot unicycle est l'un des systèmes plats parmi les plus simples et les plus étudiés.

Au système (1.1) ajoutons les sorties

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

c'est à dire autant de sorties qu'il y a d'entrées indépendantes. On constate, d'après (1.1) que θ se déduit de y_1 et y_2 par

$$\theta = \text{atan}_2(y_2, y_1). \tag{1.12}$$

Puis, retournant au système complet, on obtient également :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \\ \omega &= \frac{y_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_1 \dot{y}_2}{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

⁵ c'est une surface dans l'espace d'état, et un point dans l'espace des sorties.

Ainsi, à partir de (y_1, y_2) et de leurs dérivées premières et secondes on peut obtenir toutes les autres informations concernant le système : l'état et les entrées. On dit que ce sont des sorties plates du système. En d'autres termes cela signifie que si par exemple on planifie une trajectoire pour le point P du robot, on peut immédiatement déduire l'évolution des entrées nécessaires pour effectuer cette trajectoire ainsi que l'orientation du robot correspondante à chaque instant. Nous avons donc défini à l'aide des équations précédentes, notamment (1.13), une fonction ϕ telle que

$$(x_1, x_2, \theta, v, \omega) = \phi(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2).$$

Supposons maintenant que nous désirions faire suivre à notre petit robot un quart de cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon R situé dans le quatrième quadrant (inférieur droit). Ce chemin peut être paramétré par $(\cos s, \sin s)$, pour $s \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. On peut alors choisir comment ce chemin sera parcouru au cours du temps et écrire que : $(y_1(t), y_2(t)) = (\cos(s(t)), \sin(s(t)))$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \text{atan}_2(-\cos(s(t)), \sin(s(t))) = s(t) + \frac{\pi}{2} \\ v(t) &= R\dot{s}(t) \\ \omega(t) &= \dot{s}(t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

On constate ici la possibilité de choisir les sorties de façon à suivre un chemin proposé tout en modulant la vitesse par le choix de la fonction d'abscisse curviligne $s(t)$, et surtout de sa dérivée. Dans cet exemple simple, si l'on souhaite parcourir l'arc de cercle le plus rapidement possible avec une borne U_1 sur $|v|$ et une borne U_2 sur $|\omega|$, il suffit de choisir $\dot{s}(t) = \min \left\{ \frac{U_1}{R}, U_2 \right\}$.

Signalons enfin que pour d'autres systèmes les sorties plates, quand elles existent, ne sont pas toujours évidentes à déterminer, même si certains raisonnements physiques ou géométriques permettent souvent de les identifier. Ici c'est la contrainte de roulement sans glissement qui permet de montrer que les coordonnées d'un point de l'essieu sont plates. On pourrait aussi montrer que les coordonnées de tout autre point du robot, hors de l'essieu, ne seraient pas des sorties plates.

La fonction ϕ se déduisant des équations (1.12)-(1.13), on remarque aisément qu'elle n'est pas définie pour $(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = (0, 0) \Leftrightarrow v = 0$. De manière similaire au cas du rail rotatif, on voit aussi que la relation entre $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ et (θ, v) n'est pas bijective. Comme v peut changer de signe, il est clair qu'ici, la fonction ϕ n'est valable que pour $v > 0$. Pour $v < 0$ les expressions de θ et v en fonction des sorties plates sont modifiées. On dira donc que pour les sorties plates (y_1, y_2) le système a une **singularité de platitude** lorsque $(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = (0, 0)$ ou encore lorsque $v = 0$ ce qui est équivalent.

Nous en arrivons naturellement aux questions suivantes.

Question 6. *Quelle définition donner des systèmes plats, incluant la description des singularités ?*

Question 7. *Quel est le lien existant entre singularité de platitude et singularité de saut ?*

1.4 Problématique

Plusieurs problèmes mathématiques comportent des singularités de types très variés. Dans certaines situations elles apparaissent simplement comme des cas particuliers de la situation générique, dans d'autres on leur reproche d'être des phénomènes qui rompent avec la situation générique et on conseille alors souvent de les éviter.

Les "singularités de saut" que nous présenterons dans ce document rentrent dans la dernière catégorie. Outre l'analyse de ces singularités, et des moyens pour les caractériser, notre propos sera également de montrer que dans certains types d'approches, on peut bénéficier de leur présence, contrairement à l'intuition première que suggère la mise en évidence des discontinuités.

Un autre genre de singularités apparaît dans les systèmes différentiellement plats : la propriété de platitude est mise en défaut pour certains états du système. Après la définition des singularités de saut et leur premières propriétés, la seconde contribution de cette thèse est dans le lien existant entre singularités de saut et singularités de platitude. Nous nous intéresserons aux systèmes possédant simultanément ces deux propriétés, comme l'indique le schéma de la figure 1.7, où l'on retrouve également la notion de commande optimale et les enjeux algorithmiques qui lui sont associés.

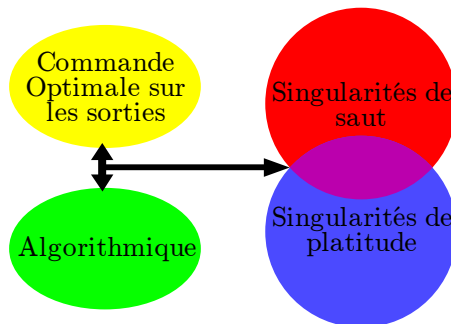


Fig. 1.7. Diagramme des liens entre les notions principales abordées dans la thèse

1.5 La fin du commencement

Les deux exemples que nous avons vus présentent les types de singularités qui seront détaillés dans cet ouvrage dont l'ambition est premièrement de définir rigoureusement les singularités de saut (Chapitre 3), puis de décortiquer la nature du lien existant entre ces singularités et les singularités de platitude (Chapitre 4).

De là, le chapitre 5 donne un aperçu de différents systèmes ayant les propriétés étudiées. Il est suivi du chapitre 6 où nous présentons l'exemple qui en réalité a motivé la thèse, à savoir le robot à plusieurs roues orientables.

De façon à pouvoir aborder tout cela dans un cadre mathématique adéquat, le chapitre 2 redéfinit la notion de système différentiellement plat, en introduisant explicitement les singularités de platitude, puis donne un survol rapide de ce qu'est un problème de commande optimale.

Enfin le chapitre 7 donne quelques éclaircissements quant à la manière de procéder en pratique pour traiter le type de systèmes décrits dans la thèse (algorithmes, applications numériques ...). En particulier nous verrons l'impact de la notion de singularité de saut sur les problèmes de commande optimale utilisant les sorties plates : l'existence de deux types de minima locaux impliquera la recherche de l'optimum parmi deux familles de trajectoires topologiquement séparées.

Sur le diagramme de la figure 1.8 apparaissent les chapitres de la thèse ainsi que leur relation avec les questions posées au cours de l'introduction.

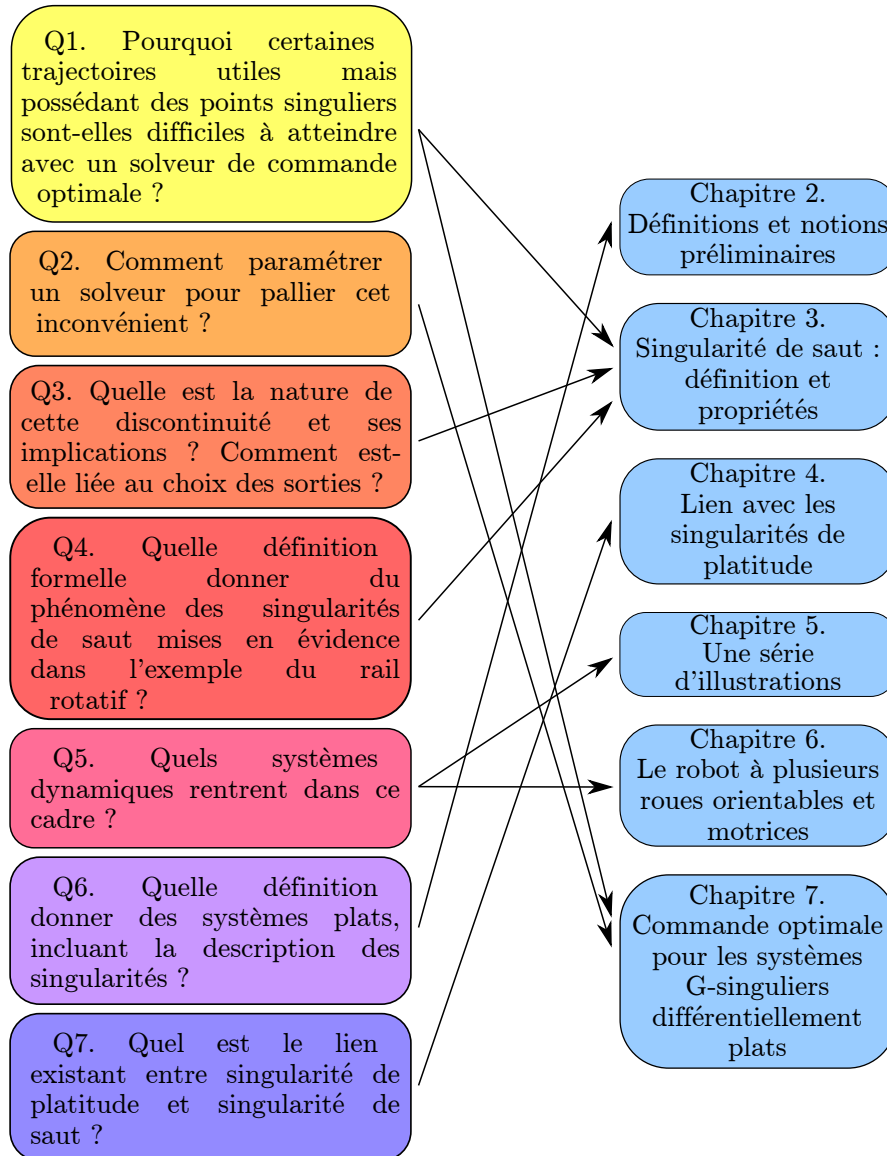


Fig. 1.8. Plan de la thèse en lien avec la problématique

Définitions et notions préliminaires

Notation	:	Description
$\mathbb{E}$	:	espace d'état
$\mathbb{F}$	:	espace des entrées
$\mathbb{H}$	:	espace des sorties
n	:	dimension de $\mathbb{E}$
m	:	dimension de $\mathbb{F}$
p	:	dimension de $\mathbb{H}$
X	:	vecteur des variables d'état
U	:	vecteur des variables d'entrées
Y	:	vecteur des sorties
$(x_1, \dots, x_n)$	:	composantes de X
$(u_1, \dots, u_m)$	:	composantes de U
$(y_1, \dots, y_p)$	:	composantes de Y
f	:	fonction définissant la dynamique d'un système
h	:	fonction définissant les sorties plates
q	:	ordre de dérivation des sorties plates
$\mathcal{X}$	:	$\dot{=}(X, U)$
$\mathcal{Y}$	:	$\dot{=}(Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$ vecteur des sorties plates et leurs dérivées
$\phi(\cdot)$	:	fonction définissant une relation explicite de platitude
Ξ, ξ	:	transformation d'état et état associés à une extension dynamique
$\psi(\cdot, \cdot)$	:	fonction définissant une relation implicite de platitude
$\mathcal{E}$	:	espace de $\mathcal{X}$
$\mathcal{H}$	:	espace de $\mathcal{Y}$
$\mathbb{M}_i$	:	$i^{\text{ième}}$ ouvert sur lequel le système est plat
k	:	nombre de $\mathbb{M}_i$

Notation	Description
$\mathbb{I}_j$	: hypersurface entre deux $\mathbb{M}_i$
l	: nombre de $\mathbb{I}_j$
ϕ_i	: fonction exprimant $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_i$ à partir de $\mathcal{Y}$
$\widehat{\mathbb{M}}_0$	: domaine des singularités de platitude
$\widehat{\mathbb{K}}_0$	: équivalent dans $\mathcal{H}$ de $\widehat{\mathbb{M}}_0$
$\mathbb{K}$	: sous-espace de $\mathcal{H}$ sur lequel sont définis les ϕ_i
$T^q\mathbb{H}$	: fibré tangent d'ordre q de l'espace $\mathbb{H}$
(x_1, x_2, θ)	: variables d'état de l'unicycle
(v, ω)	: variables d'entrées de l'unicycle
$J(\cdot)$	: fonction de coût
$[t_0, t_f]$	: intervalle de définition des trajectoires
$L(\cdot)$	: fonction intervenant dans la partie intégrale du coût
$\phi_f(\cdot)$	: fonction intervenant dans la partie finale du coût
$C_i(\cdot), C_p(\cdot), C_f(\cdot)$	: fonctions de contraintes (respectivement initiales, de parcours et finales)
A, B, M	: trois points d'un plan
$(x_0, y_0), (x_f, y_f), (x, y)$	: coordonnées cartésiennes respectives de A, B et M
g_0	: constante de pesanteur
V	: scalaire représentant la vitesse de M
u	: angle de la vitesse de M dans le plan
(μ, θ)	: variables d'état du rail rotatif
(u_1, u_2)	: variables d'entrées du rail rotatif
(y_{1r}, y_{2r})	: trajectoire de référence dans l'espace des sorties
$H(\cdot)$	: Hamiltonien
$\lambda(\cdot)$	: vecteur des fonctions adjointes
$\lambda_i(\cdot)$	: composante de $\lambda(\cdot)$
$\Theta(\cdot)$	: variable angulaire fonction linéaire du temps
R	: paramètre de longueur
C	: constante d'intégration
δ	: paramètre d'une famille de trajectoires pour le rail rotatif
t^*	: instant de commutation
J_{ns}, J_s	: coûts localement optimaux

L'objectif poursuivi dans ce chapitre est de présenter les notions nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Les deux notions principales abordées sont d'une part la platitude différentielle que l'on développe ici d'une manière originale qui tient compte des singularités de platitude, habituellement survolées ou omises dans la littérature, et d'autre part la commande optimale.

2.1 Systèmes différentiellement plats avec singularités

La classe des systèmes plats est caractérisée par des propriétés dynamiques extrêmement utiles en théorie du contrôle, notamment dans le domaine de la planification, de la commande optimale et de la stabilisation. L'exemple du robot unicycle donné dans la section 1.3 a permis d'entrevoir ces possibilités. Une littérature abondante existe sur ce sujet qui est lié de près à la notion de degré relatif d'une sortie d'un système. On pourra se référer par exemple à [19], [15], [16] et [21]. Nous donnons dans ce qui suit une description de l'approche classique des systèmes plats, puis une approche plus générale, dont la spécificité est de bien préciser la description et les propriétés des singularités de platitude.

2.1.1 Approche classique

Soit un système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f(X, U) \\ Y &= h(X, U)\end{aligned}\tag{2.1}$$

où :

- $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}$ est le vecteur des variables d'état, et $\mathbb{E}$ un espace de dimension n ,
- $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{F}$ est le vecteur des variables d'entrées, et $\mathbb{F}$ un espace de dimension m ,
- $Y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{H}$ est le vecteur des variables de sortie, et $\mathbb{H}$ un espace de dimension p .

Définition 2.1 (Sorties Plates). *Les sorties Y du système (2.1) sont dites différentiellement plates, si il existe un entier q et une fonction ϕ tels que :*

$$(X, U) = \phi(Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)}).\tag{2.2}$$

Cette définition signifie que l'on peut décrire l'ensemble des variables d'état et d'entrées uniquement à l'aide des sorties plates et de leurs dérivées successives.

Définition 2.2 (Système Plat). *On dit qu'un système est différentiellement plat si il existe une fonction h définissant des sorties différentiellement plates.*

Ainsi lorsque l'on paramètre une trajectoire à l'aide des sorties plates, il est inutile de résoudre la moindre équation différentielle pour calculer l'état du système et ses entrées à n'importe quel instant. Notons que le nombre de ces sorties est égal au nombre d'entrées indépendantes du système, ce qui revient à $p = m$, si les m entrées sont indépendantes (sinon $p < m$), par contre le nombre

q de dérivées de Y nécessaires pour définir la fonction ϕ dépend fortement du système, c'est à dire de la fonction f .

Toutes ces propriétés sont très alléchantes, cependant, il peut arriver qu'il apparaisse, pour certaines configurations (de l'état, des entrées ou de leurs dérivées), des singularités de platitude ; cela signifie que la propriété de platitude est mise en défaut pour ces configurations particulières : il existe alors une partie de l'état ou des entrées que l'on ne peut pas toujours reconstruire à partir des sorties plates. La fonction ϕ n'est alors pas définie. En outre il se peut que l'on ait besoin de plusieurs fonctions " ϕ " pour décrire l'ensemble des domaines où la propriétés de platitude est applicable.

Le traitement de ces singularités a fait l'objet de diverses études qui mènent à la conclusion que si ces configurations sont traversées de manière instantanée par le système, il est possible de continuer à utiliser les sorties plates en prenant certaines précautions (cf. [35] [22], [20] et [15]) : exploitation d'argument de continuité, introduction de dérivées d'ordres supérieurs, ou reparamétrisation non linéaire du temps. On considère toutefois qu'une étude spécifique à chaque système reste nécessaire. Afin d'y voir plus clair, nous allons proposer dans ce qui suit une définition de systèmes plats tenant compte de cette problématique, mais nous passons d'abord par un petit détour par des notions connexes qui permettra d'éclairer un peu le sujet.

2.1.2 Linéarisation par feedback dynamique et matrice de découplage

Sans entrer dans les détails des équations, définitions et preuves, nous reprenons ici quelques résultats de la littérature avant d'aller plus loin dans la notion de singularité de platitude.

Un premier résultat bien connu dans le domaine de la platitude est qu'un système plat est linéarisable par bouclage dynamique (cf. [22] par exemple).

Les équations du système obtenu par l'extension dynamique correspondante sont alors équivalentes à celles de la forme normale de ce système, dont les variables d'état sont les sorties plates ainsi que leurs dérivées. Le nombre de dérivées nécessaire est dans ce cas lié au degré relatif de chaque sortie. Une des caractéristiques de la forme normale est qu'elle fait apparaître une matrice dite de découplage.

Un résultat supplémentaire établi par Charlet dans sa thèse [11] est que l'inversibilité de la transformation d'état Ξ conduisant à la forme normale est liée à l'inversibilité de la matrice de découplage. Plus précisément, s'il existe un état ξ du système étendu pour lequel cette transformation est singulière¹,

¹ parler de singularité ici signifie que le rang de l'application tangente $T_\xi \Xi$ à Ξ en ξ n'est pas de plein rang.

alors le déterminant de la matrice de découplage est nul. Les singularités de platitude se retrouvent donc dans les singularité de la matrice de découplage du système étendu.

La singularité visée ici est une singularité de platitude, néanmoins dans cette thèse, entre autre pour éviter d'avoir à faire une extension dynamique quand cela ne s'avère pas nécessaire, nous allons proposer une autre façon d'envisager ces singularités en les incluant dans la définition du système plat.

2.1.3 Approche avec singularités

Définition

De façon à alléger quelque peu certaines expressions, nous introduisons ici quelques notations :

- $\mathcal{X} = (X, U) \in \mathcal{E}$ où $\mathcal{E} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ est une variété² de $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.
- $\mathcal{Y} = (Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)}) \in \mathcal{H}$, où $\mathcal{H} = T^q \mathbb{H}$ est le fibré tangent d'ordre q de l'espace $\mathbb{H}$.

On peut déjà réécrire les équations du système (2.1) avec ces notations :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}} &= f(\mathcal{X}) \\ Y &= h(\mathcal{X}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Définition 2.3 (Trajectoires). *On appellera “trajectoire” ou “trajectoire du système” (2.3) un couple de fonctions continues $(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t)) \subset \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ vérifiant les équations (2.3).*

Maintenant, afin de permettre la prise en compte de singularités de platitude, dans la définition des systèmes plats, nous proposons une description des propriétés topologiques des ensembles et fonctions définissant le système.

On suppose que les fonctions f et h sont telles

1. qu'il existe une fonction lisse³ ψ allant de $\mathcal{E} \times \mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$ telle que pour toute trajectoire $(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t)) \subset \mathcal{E} \times \mathcal{H}$

$$\forall t, \psi(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t)) = 0, \tag{2.4}$$

2. qu'il existe une partition de $\mathcal{E}$ en k ouverts connexes par arcs $\mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_k$ et une union $\bar{\mathbb{M}}_0$ de l variétés de codimension 1 dans $\mathcal{E}$, $\mathbb{I}_1, \dots, \mathbb{I}_l$ qui constituent des frontières entre les $\mathbb{M}_i$ tels

² Il faudra attendre le chapitre 6 pour voir l'intérêt de permettre que $\mathcal{E}$ soit seulement une variété plutôt que $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ lui-même. Ceci est lié à la possibilité d'existence d'entrées non indépendantes.

³ Il n'y a bien sûr pas unicité de cette fonction.

- que la relation (2.4) est “inversible” sur chaque $\mathbb{M}_i$, c’est à dire qu’il existe une fonction ϕ_i telle que pour toute trajectoire pour laquelle $\mathcal{X} \subset \mathbb{M}_i$

$$\forall t, \mathcal{X}(t) = \phi_i(\mathcal{Y}(t)), \quad (2.5)$$

- que pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$ la relation (2.4) n’est inversible sur aucun voisinage de $\mathbb{I}_i$,
- que l’ensemble de définition des ϕ_i est le même⁴ quelque soit i et noté $\mathbb{K} \subset \mathcal{H} = T^q\mathbb{H}$.

La figure 2.1 représente le partitionnement de $\mathcal{E}$ en $\bigcup_{i=1}^k \mathbb{M}_i \cup \widehat{\mathbb{M}}_0$. Par souci de

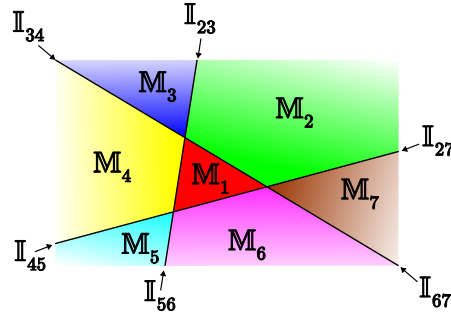


Fig. 2.1. Partition de $\mathcal{E}$ en $\bigcup_{i=1}^k \mathbb{M}_i \cup \widehat{\mathbb{M}}_0$

clarté, dans de nombreux cas, pour $s \in \{1, \dots, l\}$, la frontière $\mathbb{I}_s$ située entre $\mathbb{M}_i$ et $\mathbb{M}_j$ sera souvent notée $\mathbb{I}_{ij}$, comme sur la figure 2.1.

Définition 2.4 (Système Plat avec Singularités). *On dira que le système (2.3) est différentiellement plat avec des singularités de platitude sur les hypersurfaces $\mathbb{I}_j$ si il vérifie les propriétés précédentes.*

Un tel système est donc différentiellement plat sur chaque $\mathbb{M}_i$ au sens habituel du terme. La définition de système plat que nous avons donnée dans cette section contient la définition classique sans singularité si l’on choisit $k = 1$. Ainsi, si l’on a connaissance d’une condition initiale du type $\mathcal{X}(t_0) \in \mathbb{M}_i$, tant que $\mathcal{Y}(t) \in \mathbb{K}$ on peut appliquer la propriété de réversibilité $\mathcal{X}(t) = \phi_i(\mathcal{Y}(t))$. Si l’on

⁴ Ceci n’a rien de nécessaire *a priori*, mais c’est le cas qui nous intéressera tout au long de la thèse. La conséquence de cette hypothèse est décrite dans la section 2.1.4 ainsi que dans les exemples du chapitre 5.

sait juste que $\mathcal{Y}(t) \in \mathbb{K}$, mais que l'on n'a aucune donnée supplémentaire, on peut au moins conclure que $\exists i \in \{1, \dots, k\}, \forall t, \mathcal{X}(t) \in \mathbb{M}_i$, c'est à dire que la trajectoire est confinée à l'un des ouverts $\mathbb{M}_i$ et ne traverse aucune singularité.

Reprenons l'exemple du robot unicycle abordé dans l'introduction. On peut définir :

- les variables : $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \theta, v, \omega)$ et $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2)$,
- les espaces de ces variables : $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{H} = T^2\mathbb{H} = \mathbb{R}^6$,
- une fonction implicite ψ liant $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$:

$$\psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \dot{y}_1 - v \cos \theta \\ \dot{y}_2 - v \sin \theta \\ \omega v - \cos \theta \ddot{y}_2 + \sin \theta \ddot{y}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

pour toute trajectoire du système.

Les quatre premières composantes de ψ sont obtenues directement à partir de la définition des deux sorties (1.11) puis des deux premières équations d'état du système (1.1). La dernière s'obtient en dérivant l'égalité $\dot{y}_1 \sin \theta - \dot{y}_2 \cos \theta = 0$ puis en y substituant certains termes à l'aide des équations d'état.

Cette fonction est inversible sur deux ouverts où l'on peut exprimer $\mathcal{X}$ en fonction de $\mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 &= \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, v < 0\}, \\ \mathbb{M}_2 &= \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, v > 0\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les deux fonctions correspondant à ces ouverts sont :

$$\phi_1(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \text{atan}_2(\dot{y}_2, \dot{y}_1) [2\pi] \\ \frac{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1} \\ \frac{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1} \end{pmatrix}, \quad \phi_2(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \text{atan}_2(\dot{y}_2, \dot{y}_1) + \pi [2\pi] \\ -\frac{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1} \\ \frac{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1} \end{pmatrix}.$$

Elles sont définies sur le même sous-ensemble de $\mathcal{H}$:

$$\mathbb{K} = \{\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^6, (\dot{y}_1, \dot{y}_2) \neq (0, 0)\}.$$

La frontière entre $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ est $\mathbb{I}_{12} = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, v = 0\}$. Ici, comme il n'y a qu'une seule frontière, on a $\widehat{\mathbb{M}}_0 = \mathbb{I}_{12}$.

Dégageons aussi quelques propriétés élémentaires des systèmes plats avec singularités.

Propriétés immédiates

Pour le cas général, commençons par donner un nom à l'ensemble des $\mathcal{X}$ pour lequel la fonction ψ n'est pas inversible.

Définition 2.5 (Domaine des Singularités de Platitude). *On appellera*

“domaine des singularités de platitude” l'ensemble $\widehat{\mathbb{M}}_0 = \bigcup_{j=1}^l \mathbb{I}_j$.

Soit $i \in \{1, \dots, l\}$. Dans tout voisinage de $\mathbb{I}_i$, la fonction ψ n'étant pas inversible par rapport à $\mathcal{X}$, la jacobienne de ψ par rapport à $\mathcal{X}$ n'est pas de plein rang sur $\mathbb{I}_i$, ce qui revient à dire que son déterminant est nul lorsqu'elle est carrée : $\det \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} = 0$. De manière tout à fait générale, la réciproque est fautive, de même que pour le théorème des fonctions implicites. En effet, on peut imaginer que la jacobienne de ψ ne soit pas de plein rang mais que ψ soit tout de même inversible. Dans tous les exemples de cette thèse on choisira les fonctions ψ des systèmes étudiés de façon à ce que la chute du rang de la jacobienne de ψ par rapport à $\mathcal{X}$ coïncide exactement avec le domaine des singularités de platitude $\widehat{\mathbb{M}}_0$.

Dans le cas du robot unicycle, la jacobienne par rapport à $\mathcal{X}$ de la fonction ψ définie en (2.6),

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -v \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \ddot{y}_2 + \cos \theta \ddot{y}_1 & \omega & v \end{pmatrix},$$

a pour déterminant $\det \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} \right) = -v^2$, qui est nul pour $v = 0$, ce qui est bien la caractérisation de $\widehat{\mathbb{M}}_0$.

La présence des singularités empêche l'inversion de ψ sur les domaines contenant le voisinage d'un point de $\widehat{\mathbb{M}}_0$. Néanmoins, parmi les trajectoires du système il est possible de caractériser celles qui passent par une singularité, même à partir du vecteur $\mathcal{Y}$. C'est à dire qu'il existe un ensemble $\widehat{\mathbb{K}}_0 \subset \mathcal{H}$ correspondant à $\widehat{\mathbb{M}}_0$ tel que $\mathcal{Y} \in \widehat{\mathbb{K}}_0 \Leftrightarrow \mathcal{X} \in \widehat{\mathbb{M}}_0$. Cet ensemble $\widehat{\mathbb{K}}_0$ est inclus dans $\mathcal{H} \setminus \mathbb{K}$ car si $\mathcal{Y} \in \mathbb{K}$ alors $\exists i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{X} = \phi_i(\mathcal{Y}) \in \mathbb{I}_i$. Dans tous les exemples de cette thèse, on aura l'égalité $\widehat{\mathbb{K}}_0 = \mathcal{H} \setminus \mathbb{K}$.

Pour le robot unicycle l'ensemble des $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{H} = T^2\mathbb{H}$ pour lesquels il existe un $\mathcal{X}$ dans $\widehat{\mathbb{M}}_0$, tel que $\psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ est $\widehat{\mathbb{K}}_0 = \{\mathcal{Y} \in T^2\mathbb{H}, (\dot{y}_1, \dot{y}_2) = (0, 0)\}$.

Dans le même ordre d'idées la présence de singularités n'exclut pas totalement la possibilité d'obtenir $\mathcal{X}(t)$ pour tout instant t à partir de $\mathcal{Y}(t)$: en effet,

le fait que les singularités soit concentrées sur des espaces de codimension 1, fait qu'elles peuvent être traversées instantanément. De ce fait, comme nous l'avons déjà mentionné en écho de la littérature, il est souvent possible d'obtenir $\mathcal{X}(t)$ à partir de $\mathcal{Y}(t)$ en utilisant des arguments de régularité des trajectoires (la règle de l'Hospital peut parfois s'appliquer par exemple).

Pour le robot unicycle, si l'on sait que $y_1(t) = t^3$ et $y_2(t) = t^2$, alors à l'instant $t = 0$, $\mathcal{X}(0)$ se trouve sur $\widehat{\mathbb{M}}_0$. On peut se demander si l'on traverse ou non la singularité. En effet, si par exemple $v < 0$ pour $t < 0$ ce qui correspond à $\mathcal{X}(t) \in \mathbb{M}_1$, peut-on prévoir seulement à partir des sorties plates ce qui va se passer après $t = 0$: $\mathcal{X}(t)$ revient-il dans $\mathbb{M}_1$ ou passe-t-il dans $\mathbb{M}_2$? La continuité de la variable θ implique que v change de signe, sinon on aurait une discontinuité de l'angle, et donc $\mathcal{X}(t) \in \mathbb{M}_2$ pour $t > 0$.

En réalité il est bon de distinguer deux types de problèmes :

- premièrement lorsque l'on sait que $\mathcal{Y}(t)$ correspond à une trajectoire réalisable (ou réalisée) du système, ce qui conduit forcément à pouvoir reconstituer $\mathcal{X}(t)$, ou au moins à trouver un ensemble de trajectoires relativement restreint parmi lesquelles se trouve $\mathcal{X}(t)$;
- deuxièmement lorsque l'on souhaite faire une planification à partir des sorties plates : dans ce cas, la présence de singularités pourrait conduire à proposer une fonction $\mathcal{Y}(t)$ qui n'est pas réalisable. Dans ce cas, il faut analyser avec une certaine finesse la traversée de l'ensemble $\widehat{\mathbb{K}}_0$.

Les propriétés envisagées en cas de traversée instantanée d'une singularité sont perdues si la traversée se fait sur tout un intervalle de temps d'intérieur non vide. Dans ce cas on sait seulement que

- $\mathcal{X}(t) \in \widehat{\mathbb{M}}_0$ et
- $\mathcal{Y}(t) \in \widehat{\mathbb{K}}_0 = \mathcal{H} \setminus \mathbb{K}$

sur l'intervalle considéré. On peut éventuellement obtenir d'autres informations, mais le problème est de toute façon plus ardu.

En reprenant les deux cas de figures mentionnés lors d'une traversée instantanée :

- premièrement lorsque l'on sait que $\mathcal{Y}(t)$ correspond à une trajectoire réalisable (ou réalisée) du système, on peut espérer identifier une famille de trajectoires correspondantes en $\mathcal{X}(t)$;
- deuxièmement lorsque l'on souhaite faire une planification à partir des sorties plates : il est possible qu'aucune trajectoire ne réalise les sorties proposées ou bien encore qu'une infinité le fasse.

2.1.4 Configurations équivalentes

Le fait que les fonctions ϕ_i soient définies sur le même ensemble $\mathbb{K}$ a pour conséquence qu'à chaque configuration dans l'espace des sorties (et de leurs dérivées) correspondent k configurations dans l'espace d'état (et des entrées). Ceci montre que pour ce genre de systèmes⁵, les sorties plates caractérisent en réalité partiellement le système. Cependant, elles le caractérisent suffisamment pour permettre une exploitation très performante de leurs propriétés, il est donc important de s'intéresser aux bifurcations existant au niveau des interfaces $\mathbb{I}_j$.

Lorsque seule l'évolution des sorties intéresse "l'utilisateur", l'existence de plusieurs configurations possibles de l'état pour une configuration donnée des sorties, conduit à la possibilité d'emprunter plusieurs chemins différents, traversant ou non certaines interfaces pour parvenir à l'une des k configurations de l'état correspondant aux sorties souhaitées. Dans un problème de contrôle optimal en temps minimal, cela conduit à l'existence d'un nombre fini de destinations possibles, parmi lesquelles un algorithme devra faire un choix. Du fait des singularités de platitude aux interfaces, il pourrait exister un minimum local pour le problème de contrôle optimal pour chacune des configurations de destination possibles. En pratique cela conduira à la résolution parallèle de k problèmes de commande optimale, ce qui augmente bien sûr la complexité de résolution.

2.2 Commande optimale non linéaire

La commande optimale est "simplement" une généralisation de la notion d'optimisation au domaine du contrôle de systèmes dynamiques (cf. [33] et [41]). Dans le cas des systèmes continus cela signifie que les variables par rapport auxquelles on pose un problème d'optimisation ne sont pas un ensemble fini de variables discrètes, mais des fonctions définies sur un intervalle, ce qui nous place d'emblée dans un espace d'optimisation de dimension infinie. Le cadre mathématique adéquat dans lequel s'est progressivement développé la théorie de la commande optimale est celui du "calcul des variations" qui est en quelque sorte aux fonctionnelles ce qu'est le développement de Taylor aux fonctions à variables réelles.

Précisons immédiatement que cette section n'a pour ambition que de fournir un développement minimal, pour ne pas dire minimaliste, de la notion de commande optimale, uniquement dans le but de permettre à un lecteur non initié de poursuivre la lecture du présent ouvrage sans avoir à en consulter d'autres.

⁵ qui n'est bien sûr pas représentatif de tous les systèmes plats.

2.2.1 Définition d'un problème de commande optimale

Nous nous intéressons bien sûr toujours à un système de la forme (2.1). Tout d'abord, comme dans un problème d'optimisation classique on définit une fonction de coût que l'on désire minimiser et qui permet de modéliser un certain objectif⁶. En général cette fonction prend la forme :

$$J(U, X(t_0), t_f) = \phi_f(X(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathcal{X}(t), t) dt, \quad (2.8)$$

où comme précédemment on a conservé la notation $\mathcal{X} = (X, U)$. J comprend une partie intégrale qui représente un coût le long de la trajectoire à l'aide de la fonction L , et une partie évaluée ponctuellement attribuant un poids à l'instant final. Différentes variantes sont possibles, notamment en ajoutant d'autres fonctions pour l'instant initial ou des instants intermédiaires. Si l'état initial est déjà fixé⁷ et si le temps final l'est également, J peut être considérée comme une fonction de U uniquement ; en effet, l'équation différentielle du système détermine X du moment que $U(t)$ et $X(t_0)$ sont donnés. Cette relation différentielle est alors considérée comme une contrainte du problème. Dans la plupart des applications, il existe toujours d'autres contraintes, soit sur les entrées, soit sur l'état ou les sorties. On distingue aussi les contraintes d'égalité des contraintes d'inégalité, mais on se passe parfois des contraintes d'égalité en remplaçant chacune d'elles par deux inégalités. En outre la distinction qui apparaît dans la fonction de coût existe également pour les contraintes entre celles qui sont valables tout le long de la trajectoire et celles qui ne le sont qu'à des instants donnés. On pourra les formuler souvent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_i(X(t_0), t_0) &\leq 0 && \text{contraintes initiales.} \\ C_p(\mathcal{X}, t) &\leq 0 && \text{contraintes de parcours} \\ C_f(X(t_f), t_f) &\leq 0 && \text{contraintes finales.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Suivant le type de problème, le temps final t_f peut être libre ou imposé. Le cas le plus fréquent de problèmes à temps final libre sont les problèmes de temps minimal où $L(\mathcal{X}(t), t) = 1$ et $\phi_f(X(t_f), t_f) = 0$.

De manière conventionnelle on écrira un problème de commande optimale sous une forme similaire à celle d'un problème d'optimisation, en faisant apparaître les contraintes du problème à la suite de la fonction à optimiser :

$$\begin{aligned} \min_{U, t_f} \quad & J(U, t_f) \\ & \dot{X} = f(\mathcal{X}) \\ & C_i(X(t_0)) \leq 0 \\ & C_p(X(U), U) \leq 0 \\ & C_f(X(t_f)) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

⁶ On l'appelle d'ailleurs parfois fonction objectif.

⁷ ce qui est le cas habituellement

où l'on s'est limité ici à des contraintes sur l'entrée et l'état. Il est possible également d'ajouter d'autres types de contraintes, comme des contraintes à des temps intermédiaires, des contraintes de type intégrale (conservation d'une quantité par exemple), d'autres dépendant explicitement du temps.

2.2.2 Quelques exemples

La courbe brachistochrone

Le problème de commande optimale le plus célèbre est sans doute celui de la courbe brachistochrone introduit par Jean Bernoulli dans *Acta Eruditorum* en juin 1696 (voir par exemple [40]). Bien qu'il n'ait pas été posé dans un cadre de commande optimale à proprement parler ce problème à l'avantage d'être assez simple et résoluble analytiquement, ce qui est, somme toute, assez rare.

Le problème peut se résumer ainsi : dans un plan vertical, on se donne deux points A , et B dont l'altitude est inférieure à celle de A , et un point matériel M soumis uniquement à la gravité. M se déplace sans frottement le long d'une courbe joignant les points A et B . On veut trouver la courbe, si elle existe, qui permettra à M d'aller de A à B en un temps minimal.

On pose $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_f, y_f)$, $M = (x, y)$ et u l'angle que fait le vecteur vitesse du point M par rapport à l'horizontale. La constante du champ de pesanteur est notée g_0 . Du fait de la conservation de l'énergie mécanique, la vitesse du point M ne dépend que de son altitude : $V^2 = 2g_0(y_0 - y)$. Le vecteur vitesse est alors : $V \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$. Ici, u est vu comme la commande et détermine la courbe parcourue par M pour aller de A à B . Ces notations et équations aboutissent au problème de commande optimale suivant :

$$\begin{aligned} \min_{u, t_f} \int_0^{t_f} 1 dt \\ \dot{x} &= \sqrt{2g_0(y_0 - y)} \cos u \\ \dot{y} &= \sqrt{2g_0(y_0 - y)} \sin u \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ x(t_f) &= x_f \\ y(t_f) &= y_f. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Cette formulation, qui est une des plus immédiates, n'est pas le point de départ le plus aisé pour obtenir la solution analytique, mais elle a ici valeur d'illustration.

Poursuite d'une trajectoire pour le rail rotatif infini

Le problème que nous proposons maintenant est lié à l'exemple leitmotiv de la thèse : le rail rotatif infini. Le système est on ne peut plus simple, puisqu'il

s'agit d'un double intégrateur que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= u_1 \\ \dot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{2.12}$$

où μ désigne l'abscisse de la masse le long du rail et θ l'angle de ce dernier par rapport à un repère fixe du plan. Ce système présente cependant la particularité d'avoir deux entrées. Dans le problème que nous mentionnons ici, on souhaite que la masse ponctuelle, dont les coordonnées cartésiennes dans le plan sont

$$(y_1, y_2) = (\mu \cos \theta, \mu \sin \theta),\tag{2.13}$$

poursuive “au mieux” une trajectoire de référence $(y_{1r}(t), y_{2r}(t))$, sachant qu'il y a une borne sur la vitesse de rotation u_2 du rail. De façon à conduire à des simplifications analytiquement parlant, l'horizon d'optimisation est ici considéré comme infini et le problème est formalisé dans les termes suivants :

$$\begin{aligned}\min_U \int_{-\infty}^{+\infty} (y_1 - y_{1r})^2 + (y_2 - y_{2r})^2 dt \\ \dot{\mu} &= u_1 \\ \dot{\theta} &= u_2 \\ |u_2| &\leq 1\end{aligned}\tag{2.14}$$

La solution⁸ de ce problème sera présentée par la suite pour des trajectoires simples, et réutilisée dans les chapitres ultérieurs.

2.2.3 Principe du minimum de Pontryagin

Ce principe⁹, qui généralise au calcul des variations les équations du Lagrangien en optimisation, vise à donner des conditions nécessaires à l'existence d'un minimum pour un problème de commande optimale. Il existe de nombreuses versions de ce principe suivant les différents types de problèmes rencontrés, notamment du point de vue des contraintes appliquées au système. La complexité de la démonstration de ce principe dépend en effet fortement de la présence ou non de contraintes, spécialement sur les variables d'état¹⁰. Nous donnons ici une version applicable à la plupart des problèmes abordés dans cet ouvrage.

⁸ En réalité, il existe des choix de trajectoires pour lesquelles il n'y a pas de solution pour deux raisons : d'une part nous n'avons imposé aucune borne à u_1 , ce qui comme on le verra n'est pas anodin, d'autre part le choix d'un horizon infini, sous-entend que les branches infinies de la trajectoire de référence sont réalisables, sans quoi le coût J ne pourrait être qu'infini.

⁹ Suivant les ouvrages on donne soit le principe du minimum soit celui du maximum, l'un se déduisant aisément de l'autre.

¹⁰ Le cas particulier de contraintes ne dépendant que de l'état et non de la commande est assez difficile et induit des discontinuités sur les fonctions adjointes ; pour ce type de problèmes la version du principe que nous donnons devrait être modifiée, mais les exemples de la thèse ne rentrent pas dans cette catégorie.

Pour un problème de type (2.10) avec une fonction de coût de la forme (2.8), où toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$, on définit le Hamiltonien du système :

$$H(\mathcal{X}, \lambda, t) = L(\mathcal{X}, t) + \lambda^T f(\mathcal{X}), \quad (2.15)$$

où $\lambda(t)$ est le vecteur des fonctions adjointes aux variables d'état X du système.

Si le contrôle U est optimal alors les conditions nécessaires d'optimalité à chaque instant de la trajectoire s'expriment à partir du Hamiltonien :

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (2.16)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (2.17)$$

$$U(t) = \underset{\{V | C_p(X(t), V) \leq 0\}}{\operatorname{argmin}} H(X(t), V, \lambda(t)) \quad (2.18)$$

et sont complétées par des conditions de transversalité aux instants initial et final : les vecteurs $\lambda(t_0)$ et $\lambda(t_f) - \frac{\partial \phi_f}{\partial X}(X(t_f), t_f)$ sont respectivement orthogonaux aux espaces tangents aux variétés définies par C_i et C_f .

Si, de plus, le temps final t_f est libre, on a également la condition :

$$H(X(t_f), \lambda(t_f)) = -\frac{\partial \phi_f}{\partial t}(X(t_f), t_f). \quad (2.19)$$

Notons que les conditions de transversalité s'interprètent en partie de la manière suivante : plus l'état est contraint aux extrémités de l'intervalle de temps, plus l'adjoint est libre et *vice versa*. Ainsi, si l'état a une valeur donnée, l'adjoint est libre, tandis que si l'état est libre l'adjoint doit être nul à l'extrémité correspondante.

La théorie prévoit également que pour une trajectoire optimale $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$, ce qui implique notamment que si le système est autonome et que le coût ne dépend pas explicitement du temps, le Hamiltonien est constant.

Par ailleurs l'équation (2.16) ne fait que reprendre la dynamique initiale du système, on la mentionne néanmoins, car elle fait apparaître la relation duale entre l'état et l'adjoint.

Cet aperçu étant donné, il reste clair que ce sujet donne matière à un volume considérable de développements supplémentaires. On trouvera de nombreuses précisions dans les ouvrages [6] et [41] notamment au sujet des conditions de régularité vérifiées par l'entrée et les fonctions adjointes relativement au type de contraintes appliquées, ainsi que moults exemples et méthodes numériques de résolution.

2.2.4 Application du principe de Pontryagin aux deux exemples précédents

La courbe brachistochrone

Reprenons donc le problème (2.11), en supposant que $x_f > x_0$, pour éviter de distinguer les différents cas. Son Hamiltonien est :

$$H(x, y, u, \lambda_1, \lambda_2) = 1 + \lambda_1 \sqrt{2g_0(y_0 - y)} \cos u + \lambda_2 \sqrt{2g_0(y_0 - y)} \sin u.$$

L'évolution de l'adjoint est donné par :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = g_0 \frac{\lambda_1 \cos u + \lambda_2 \sin u}{\sqrt{2g_0(y_0 - y)}}. \quad (2.21)$$

N'ayant pas de contrainte sur u , la condition d'optimalité (2.18) se traduit ici par l'annulation de la dérivée partielle du Hamiltonien par rapport à u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \sin u = \lambda_2 \cos u. \quad (2.22)$$

De (2.20) on trouve que λ_1 est constante, et si l'on considère que $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors la dernière égalité donne $u = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Après insertion de cette égalité dans les équations d'évolution de y et λ_2 , on obtient :

$$\dot{y} = \lambda_2 \sqrt{2g_0 \frac{y_0 - y}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \quad (2.23)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{g_0}{2} \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{y_0 - y}} \quad (2.24)$$

Ces deux équations différentielles sont liées l'une à l'autre et intégrables.¹¹ Finalement, on obtient y puis x sous la forme :

$$x(t) = x_0 + R(\Theta - \sin \Theta) \quad (2.25)$$

$$y(t) = y_0 - R(1 - \cos \Theta), \quad (2.26)$$

avec $\Theta = \sqrt{\frac{g_0}{R}}t$. La courbe décrite est une branche de cycloïde dont le paramètre de longueur R et le temps final t_f s'obtiennent grâce aux conditions sur l'état final ; ils sont donc solutions des équations suivantes :

¹¹ Une manière d'y parvenir est de faire d'abord le rapport des deux équations.

$$\begin{aligned} x_f - x_0 &= R(\Theta_f - \sin \Theta_f) \\ y_f - y_0 &= R(\cos \Theta_f - 1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $\Theta_f = \sqrt{\frac{g_0}{R}} t_f$.

Il est intéressant de constater que comme le prévoit la théorie, le Hamiltonien de la solution optimale est constant :

$$H = 1 + \sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(y_0 - y)} = 1 + C,$$

où C est déterminé de manière arbitraire par la valeur de λ_1 , on a seulement une relation entre λ_1 , C et R : $C = 2R\lambda_1^2$.

Dans le cas particulier où le point B a la même altitude que A , on a $y_0 = y_f$ et $\cos \Theta_f = 1$. Il vient alors $\Theta_f = 0 \quad [2\pi]$ et $x_f - x_0 = R\Theta_f$. Le temps minimal est donc obtenu pour $\Theta_f = 2\pi$ et $R = \frac{x_f - x_0}{2\pi}$ ce qui donne $t_f = \sqrt{\frac{2\pi(x_f - x_0)}{g_0}}$.

Le rail rotatif infini

Le Hamiltonien du problème (2.14) est donné par :

$$H = (\mu \cos \theta - y_{1r})^2 + (\mu \sin \theta - y_{2r})^2 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

Ce qui donne :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \mu} = 2\mu - 2y_{1r} \cos \theta - 2y_{2r} \sin \theta \quad (2.28)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -2\mu(y_{1r} \sin \theta - y_{2r} \cos \theta) \quad (2.29)$$

De plus on sait que les entrées doivent minimiser à tout instant le Hamiltonien. Comme u_1 n'est pas bornée et apparaît de manière linéaire dans le coût, il est clair que si $\lambda_1 \neq 0$ il n'y a pas de valeur de u_1 minimisante pour H qui peut être rendu aussi négatif qu'on le désire. C'est la première difficulté à laquelle faisait allusion la note 8. Donc, s'il existe une solution à notre problème, elle est telle que

$$\lambda_1 = 0. \quad (2.30)$$

En conséquence, il vient aussi $\dot{\lambda}_1 = 0$, que l'on peut introduire dans l'équation (2.28), d'où :

$$\mu = y_{1r} \cos \theta + y_{2r} \sin \theta. \quad (2.31)$$

Cette dernière équation s'interprète très simplement géométriquement : comme u_1 n'est pas bornée, l'abscisse μ de la masse le long du rail est ajustée à chaque

instant, de manière à toujours minimiser la quantité $L = (\mu \cos \theta - y_{1r})^2 + (\mu \sin \theta - y_{2r})^2$, ce qui conduit évidemment à minimiser le coût J par rapport à u_1 pour une fonction u_2 donnée. L représente ici le carré de la distance entre le point référence et la masse. L'équation (2.31) signifie que pour un angle θ donné, on sait que μ sera tel que la position de la masse soit la projection orthogonale du point de référence sur le rail, comme l'illustre la figure 2.2.

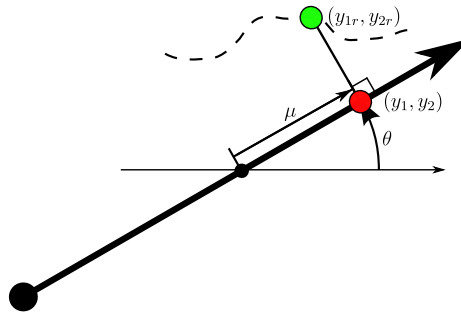


Fig. 2.2. Interprétation géométrique de la condition

Cette propriété, alliée au fait que θ est une variable angulaire et donc bornée, permet de montrer que :

- si la trajectoire de référence est réalisable lorsque le t tend vers $\pm\infty$, alors il existe des trajectoires réalisables telles que le coût J est fini, ce qui assure ici l'existence d'une borne inférieure pour le coût¹³ et donc de trajectoires “quasi-optimales”, qui ont un coût que l'on peut rendre arbitrairement proche de cette borne inférieure ;
- de plus, dans ce cas-là, s'il existe une trajectoire optimale et que pour cette trajectoire $y_{1r} \sin \theta = y_{2r} \cos \theta$ pour un instant suffisamment grand, alors cette égalité persiste à l'infini et on a $(y_1, y_2) = (y_{1r}, y_{2r})$. Il en est de même vers $-\infty$.

D'autre part, l'inclusion de l'égalité (2.31) dans (2.29) conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= 2(y_{2r} \sin \theta + y_{1r} \cos \theta)(y_{2r} \cos \theta - y_{1r} \sin \theta) \\ &= 2y_{1r}y_{2r} \cos 2\theta + (y_{2r}^2 - y_{1r}^2) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ajoutons que l'entrée u_2 doit minimiser H . En dehors des cas où λ_2 est constant sur tout un intervalle (cas pour lesquels $(y_1, y_2) = (y_{1r}, y_{2r})$) on a

¹² c'est à dire que l'entrée u_{2r} de la référence respecte les bornes pour $|t| \geq M$, où M est un réel suffisamment grand.

¹³ car la fonction de coût est bornée inférieurement par zéro.

$$u_2 = -\text{signe}\lambda_2 = \pm 1. \quad (2.33)$$

Ceci conduit à une fonction θ qui est affine par morceau en dehors des intervalles où la référence et la solution coïncident. Un instant où u_2 change brutalement de signe est appelé instant de commutation. De ce fait, si la trajectoire de référence peut être décrite à l'aide de polynômes, l'équation (2.32) peut être intégrée par morceau. La continuité de λ_2 et de θ donne ensuite des contraintes aux instants de commutation. Si l'on a une donnée *a priori* du nombre d'instants de commutation, on obtient un système d'équations.

Dans ce qui suit, nous apportons quelques simplifications à l'aide notamment de raisonnements qualitatifs.

Afin de poursuivre, plus aisément l'analyse, nous allons nous restreindre à une famille de trajectoires de référence très simple et qui sera réutilisée plus tard dans ce document :

$$\begin{aligned} y_{1r} &= t \\ y_{2r} &= \delta \end{aligned} \quad (2.34)$$

où $\delta \geq 0$ est un paramètre indépendant du temps. Pour $\delta \geq 1$, cette trajectoire est réalisable et est donc elle-même solution au problème de commande optimale. Il en est de même pour $\delta = 0$. En revanche, pour $0 < \delta < 1$ la borne sur u_2 n'est pas respectée par la référence pour $t \in]-\sqrt{\delta - \delta^2}, \sqrt{\delta - \delta^2}[$.

Bien que l'on ne le démontrera pas rigoureusement ici, on supposera que la solution optimale si elle existe est symétrique par rapport à l'instant $t = 0$, au même titre que la trajectoire de référence. Donc, y_1 doit être une fonction impaire du temps et y_2 une fonction paire. Ainsi, $y_1(0) = 0$. Deux cas de figure sont alors possibles.

1. Soit $y_2(0) \neq 0$, et dans ce cas $\theta(0) \doteq \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$, d'après la relation (2.13). De plus on tire de (2.31) que $\mu(0) = y_{2r}(0) \sin \theta_0 = \epsilon \delta$, où $\epsilon \doteq \sin \theta_0 = \pm 1$. Du fait que les conditions sont fixées en $t = 0$, on dispose maintenant d'un problème à résoudre uniquement sur $[0, +\infty[$.

Il est clair qualitativement que le choix de $u_2(t) = 1$ est meilleur autour de $t = 0$: en effet, les “nouvelles conditions initiales” coïncident avec la trajectoire de référence, de plus, pour cette trajectoire, u_2 est toujours positif, ainsi ce choix tend à limiter l'éloignement par rapport à la référence, puis sans doute à la rattrapper par la suite. On peut effectivement montrer qu'avec ce choix il existe un temps $t^* \geq \sqrt{\delta - \delta^2}$ tel que les deux trajectoires coïncident de nouveau. Elles seront donc ensuite toujours égales. On a donc pour $t > 0$ un seul instant de commutation en t^* . Les trajectoires suivantes vérifient bien le principe de Pontryagin :

	$t \in [0, t^*[$	$t \in [t^*, +\infty[$
μ	$t \sin t + \delta \cos t$	$\sqrt{t^2 + \delta^2}$
θ	$\frac{\pi}{2} - t$	$\text{atan}_2(\delta, t)$
u_1	$(1 - \delta) \sin t + t \cos t$	$\frac{t}{\sqrt{t^2 + \delta^2}}$
u_2	-1	$-\frac{\delta}{t^2 + \delta^2}$
λ_1	0	0
λ_2	$\lambda_2^* - t \sin(2t) \frac{2\delta+1}{2} + \cos(2t) \frac{2t^2-2\delta^2-2\delta-1}{4}$	0

(2.35)

où

- t^* est le plus petit réel strictement positif tel que $t^* \cos t^* = \delta \sin t^*$,
- et λ_2^* est une constante telle que λ_2 soit continue en t^* .

Dans ce cas, le coût obtenu est :

$$J_{ns} = \frac{t^{*3}}{3} + \left(\delta^2 - \frac{1}{2} \right) t^* - \frac{\sin t^* \cos t^*}{2}. \quad (2.36)$$

2. Soit $y_2(0) = 0$, d'où $\mu = 0$ et la symétrie impose¹⁴ que $\theta_0 = 0 \in [\pi]$. En réutilisant les mêmes remarques que pour le cas précédent, il apparaît que u_2 doit être à sa borne supérieure : 1, et qu'il n'y a de nouveau qu'un seul instant t^* de commutation. Les trajectoires suivantes vérifient bien le principe de Pontryagin :

	$t \in [0, t^*[$	$t \in [t^*, +\infty[$
μ	$t \cos t + \delta \sin t$	$\sqrt{t^2 + \delta^2}$
θ	t	$\text{atan}_2(\delta, t)$
u_1	$(1 + \delta) \cos t - t \sin t$	$\frac{t}{\sqrt{t^2 + \delta^2}}$
u_2	1	$-\frac{\delta}{t^2 + \delta^2}$
λ_1	0	0
λ_2	$\lambda_2^* + t \sin(2t) \frac{2\delta-1}{2} + \cos(2t) \frac{2t^2-2\delta^2+2\delta-1}{4}$	0

(2.37)

où

- t^* est le plus petit réel positif tel que $t^* \sin t^* = \delta \cos t^*$,
- et λ_2^* est une constante telle que λ_2 soit continue en t^* .

Dans ce cas, le coût obtenu est :

$$J_s = \frac{t^{*3}}{3} + \left(\delta^2 - \frac{1}{2} \right) t^* + \frac{\sin t^* \cos t^*}{2}. \quad (2.38)$$

Les deux solutions présentées sont deux minima locaux pour le problème, et suivant la valeur de δ le premier ou le second est un minimum global.

¹⁴ en utilisant les propriétés de parité/imparité des dérivées de y_1 et y_2

Singularité de saut : définition et propriétés

Notation	Description
$\mathbb{E}$	: espace d'état
$\mathbb{F}$	: espace des entrées
$\mathbb{H}$	: espace des sorties
X	: vecteur des variables d'état
U	: vecteur des variables d'entrées
Y	: vecteur des sorties
f	: fonction définissant la dynamique d'un système
h	: fonction définissant les sorties
$\mathcal{X}$	: $\dot{=}(X, U)$
$\mathcal{E}$	: espace de $\mathcal{X}$
$\mathbb{M}_0$	: surface G -singulière
$\mathcal{X}_0$	: un point de $\mathbb{M}_0$
$[t_0, t_f]$	: intervalle de définition des trajectoires
τ ou $\tau_{\mathcal{X}_s}$	: instant de de $[t_0, t_f]$ pour lequel $\mathcal{X}_s(t)$ traverse $\mathbb{M}_0$
r, ϵ, η	: réels strictement positifs
$B(\mathcal{X}, r)$	: boule centrée en $\mathcal{X}$ de rayon r
$\mathbb{B}$	: $\dot{=}B(\mathcal{X}, r) \cap \mathcal{E}$
$\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_-, \mathbb{N}_+$	: sous-ensembles de $\mathbb{B}$
$\mathcal{N}$	: $\dot{=}\mathbb{N}_+$ ou $\mathbb{N}_-$
$\Sigma_{\pm}$	: ensemble des trajectoires une fois G -singulières
$\mathcal{X}_s$	: une trajectoire de $\Sigma_{\pm}$
$d(\cdot, \cdot)$	: une distance sur $\mathcal{C}_{pm}^q([t_0, t_f], \mathbb{H})$
C	: le saut (réel strictement positif)
n	: entiers (indices d'une suite)

Notation	:	Description
Z	:	variables d'état alternatives à X
$T(\cdot)$	:	fonction de changement de variables entre X et Z
$\widehat{T}(\cdot)$	:	fonction de changement de variables entre $\mathcal{X}$ et (Z, U)
k_1, k_2, K	:	des réels positifs
$\widehat{\mathbf{M}}_0$	:	$\doteq \widehat{T}(\mathbf{M}_0)$
$\ \cdot\ _\infty$	:	norme infinie d'une trajectoire
$\widehat{X}, \widehat{Y}$	:	variables d'un "sur-système" des variables X et Y
V	:	variables d'entrées supplémentaires du sur-système
$F(\cdot), G(\cdot)$	:	fonctions définissant la dynamique de ce sur-système
$H(\cdot), L(\cdot)$	:	fonctions liant X et Y à $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$
$\hat{d}$	:	distance dans l'espace des trajectoires des sorties $\widehat{Y}$
$\mathcal{M}_0$	:	surface G -singulière dérivant de $\mathbf{M}_0$ pour un sur-système
$\hat{C}$	:	saut pour le sur-système dérivant du saut C

Ce chapitre définit le cadre formel décrivant les singularités de saut, puis dérive les propriétés immédiates. Son contenu ainsi que celui des deux chapitres suivants se trouvent partiellement dans [48].

3.1 Définition et appellations

Concernant la description des systèmes étudiés, nous reprenons les notations définies dans le chapitre 2. De plus, précisons que par souci de concision on utilisera la même notation $\|\cdot\|$ pour différentes normes dans différents espaces, lorsque cette notation ne prête pas à confusion.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des trajectoires $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ particulières d'un système de type (2.1) ou (2.3) définies sur un intervalle $[t_0, t_f]$. Elles vérifient donc :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(\mathcal{X}) \\ Y &= h(\mathcal{X}) \end{aligned} \quad . \quad (3.1)$$

En outre, on suppose que ces trajectoires sont caractérisées par quelques propriétés desquelles nous tirerons la définition de singularité de saut.

Soit $\mathbf{M}_0$ une variété de $\mathcal{E}$ de codimension 1, telle qu'en chacun de ses points $\mathcal{X}_0$ il existe une trajectoire traversant une seule fois $\mathbf{M}_0$.

Ceci se traduit par les propriétés suivantes :

- Pour tout $\mathcal{X}_0 \in \mathbf{M}_0$, il existe $r > 0$ tel que $\mathbf{B} = B(\mathcal{X}, r) \cap \mathcal{E}$ est partitionné en trois ensembles $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_-$ et $\mathbf{N}_+$ connexes par arcs tels que :

1. $\mathbf{N}_0 = \mathbf{M}_0 \cap \mathbf{B}$
2. tout chemin inclus dans $\mathbf{B}$ allant de $\mathbf{N}_+$ vers $\mathbf{N}_-$ traverse $\mathbf{N}_0$;

- Pour tout $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{M}_0$, il existe au moins une trajectoire $\mathcal{X}_s$ du système , définie sur $[t_0, t_f]$, telle que :
- $$\begin{aligned}
 & \cdot \exists \tau \in]t_0, t_f[, \mathcal{X}_s(\tau) = \mathcal{X}_0 \\
 & \cdot \forall t \neq \tau, \mathcal{X}_s(t) \notin \mathbb{M}_0 \\
 & \cdot \exists \epsilon > 0, \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [\tau - \epsilon, \tau[\mathcal{X}_s(t) \in \mathcal{N}, \\ \forall t \in]\tau, \tau + \epsilon] \mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{B} \setminus \mathcal{N}, \end{array} \right. \text{ où } \mathcal{N} = \mathbb{N}_+ \text{ ou } \mathbb{N}_- \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

La figure 3.1 donne une interprétation géométrique de ces définitions. Pour une trajectoire de ce genre, comme l'instant τ défini plus haut est unique, on le notera $\tau_{\mathcal{X}_s}$.

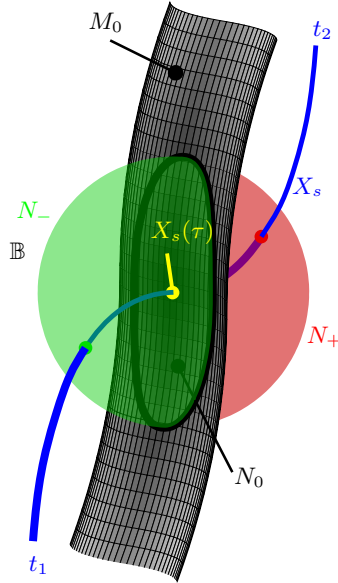


Fig. 3.1. Description de $\mathbb{M}_0$

A partir de ces hypothèses, pour un $\mathbb{M}_0$ donné, soit $\Sigma_{\pm}$ l'ensemble des trajectoires $\mathcal{X}_s$ du système (3.1) telles qu'il existe $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{M}_0$ tel que $\mathcal{X}_s$ satisfasse (3.2).

Soit d une distance (entre fonctions) définie sur l'espace des trajectoires des sorties¹, $\mathcal{C}_{pm}^q([t_0, t_f], \mathbb{H})$.

La définition suivante de singularité de saut fait apparaître que certaines suites de trajectoires ne peuvent pas converger dans l'espace d'état lorsqu'elles convergent dans l'espace des sorties.

¹ $\mathcal{C}_{pm}^q([t_0, t_f], \mathbb{H})$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^{q-1}$ et $\mathcal{C}^q$ par morceaux, définies sur $[t_0, t_f]$ et à valeur dans l'espace des sorties $\mathbb{H}$.

Définition 3.1. $\mathbb{M}_0$ présente une singularité de saut par rapport à la sortie Y du système (3.1) et par rapport à la distance d avec un saut $C > 0$ si :

- $\forall \mathcal{X}_s \in \Sigma_{\pm}$,
- $\exists (\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que
 - (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(Y_n, Y_s) = 0$
 - (ii) $\forall n, \nexists t \in (t_0, t_f), \mathcal{X}_n(t) \in \mathbb{M}_0$
 - $\forall (\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant (i) et (ii) on a

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| \geq C$$

Cette définition généralise les caractéristiques apparaissant dans les équations (1.7)-(1.8) spécifiques à l'exemple du rail rotatif. Dès lors, $\mathbb{M}_0$ est appelée (hyper)surface G -singulière², tout $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{M}_0$ est appelé configuration G -singulière du système, et toute trajectoire traversant $\mathbb{M}_0$ au moins une fois est dite G -singulière ou “trajectoire avec un saut singulier”. Un système avec des singularités de saut est G -singulier.

Dans la définition, l'utilisation de la limite inférieure permet de contourner tout problème lié à l'existence ou non de limites. Le sens de cette double limite se comprend si l'on regarde le comportement de l'écart entre l'état un peu après l'instant τ et un peu avant : cet écart pour la “trajectoire limite” si elle existait serait irréductible en dessous d'un certain seuil C , malgré le fait que l'on réduit l'intervalle de temps 2η séparant les deux instants pour lesquels on observe cet écart. En conséquence, si l'on pouvait parler de trajectoire limite, celle-ci serait discontinue en $\tau_{\mathcal{X}_s}$.

3.2 Quelques propriétés

Cette section déduit de la définition de singularité de saut quelques conséquences immédiates. La première rassure simplement sur le fait qu'un changement de variables d'état respectant certaines contraintes de régularité conserve la propriété de singularité de saut, seule la valeur du saut est modifiée.

Proposition 3.2 (Conservation des singularités par changement de variables). Soit un système ayant une surface G -singulière $\mathbb{M}_0$ avec un saut

$$C, \text{ et un changement de variables } Z = T(X). \text{ On, pose } \widehat{T} : \begin{array}{l} \mathcal{E} \rightarrow T(\mathbb{E}) \times \mathbb{F} \\ \mathcal{X} \mapsto (T(X), U) \end{array}$$

et $\widehat{\mathbb{M}}_0 = \widehat{T}(\mathbb{M}_0)$. Si :

- $\exists k_1 > 0, \forall (X_1, X_2) \in \mathbb{E}^2, \|T(X_1) - T(X_2)\| \leq k_1 \|X_1 - X_2\|$ (i.e. T est Lipschitz),

² le G vient de la traduction anglaise du mot saut, ou plus exactement écart : “gap”.

– $\exists k_2 > 0, \forall (Z_1, Z_2) \in T(\mathbb{E})^2, \|T^{-1}(Z_1) - T^{-1}(Z_2)\| \leq k_2 \|Z_1 - Z_2\|$ (i.e. T^{-1} est Lipschitz),
 alors la surface $\widehat{\mathbb{M}}_0$ est G -singulière pour le système décrit par les variables Z ,
 avec un saut $\frac{C}{k_2}$.

Ainsi cette proposition souligne le fait que la singularité dépend essentiellement du choix des sorties et non pas de celui des variables d'état.

Preuve. La bijectivité et la continuité de $\widehat{T}$, assurent

- l'existence du rayon r , et des ensembles $\mathbb{B}, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_-, \mathbb{N}_+$ pour tout $(Z, U) \in \widehat{\mathbb{M}}_0$,
- que $\widehat{\Sigma}_\pm$ n'est pas vide
- et l'existence d'une trajectoire $\mathcal{Z}_s = (Z_s, U_s)$ correspondant à chaque $\mathcal{X}_s$.

Soit $\mathcal{Z}_s \in \widehat{\Sigma}_\pm$ et la trajectoire $\mathcal{X}_s \in \Sigma_\pm$ correspondante. Soit $\widehat{h}(\mathcal{Z}) = h(T^{-1}(Z), U)$ la fonction donnant Y à partir de $\mathcal{Z} = (Z, U)$. Alors, on définit $\mathcal{X}_n$ une suite de trajectoires satisfaisant (i) et (ii) dans la définition de singularité de saut. Dès lors, il est clair que (i) et (ii) sont valables pour $\mathcal{Z}_n = \widehat{T}(\mathcal{X}_n)$. Il reste à vérifier la propriété de saut :

$$\begin{aligned} \|Z_n(t + \eta) - Z_n(t - \eta)\| &\geq \frac{\|T^{-1}(Z_n(t + \eta)) - T^{-1}(Z_n(t - \eta))\|}{k_2} \\ &\geq \frac{1}{k_2} \|X_n(t + \eta) - X_n(t - \eta)\| \end{aligned}$$

Le résultat est ensuite évident. $\square$

La proposition suivante est assez fondamentale en ce sens qu'elle donne, conjointement avec la définition, les raisons de l'isolation topologique des trajectoires G -singulières, comme cela sera souligné avec le corollaire qui en découle.

Proposition 3.3 (Divergence état-entrées). *Soit un système avec une surface G -singulière $\mathbb{M}_0$ avec un saut C . Soit une trajectoire $\mathcal{X}_s \in \Sigma_\pm$ et une suite de trajectoires $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du système telles que*

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(Y_n, Y_s) = 0$
- (ii) $\forall n, \nexists t \in (t_0, t_f), \mathcal{X}_n(t) \in \mathbb{M}_0$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{X}_n\|_\infty = +\infty$ dans tout voisinage de $\tau_{\mathcal{X}_s}$.

Preuve. Soit $\delta(\eta) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\|$.

Alors, $\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \delta(\eta) \geq C$. Donc $\exists \epsilon > 0, \forall \eta \in (0, \epsilon], \delta(\eta) \geq \frac{C}{2}$. D'où,

$$\forall \eta \in (0, \epsilon], \exists N_\eta \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\eta, \|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| \geq \frac{C}{4}.$$

En conséquence, $\frac{\|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\|}{\eta} \geq \frac{C}{4\eta}$, et d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\exists t \in [\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta, \tau_{\mathcal{X}_s} + \eta], \|\dot{X}_n(t)\| \geq \frac{C}{4\eta}.$$

En particulier, dans $[\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta, \tau_{\mathcal{X}_s} + \eta]$, $\|\dot{X}_{N_\eta}(t)\|_\infty \geq \frac{C}{4\eta}$. Alors, $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|\dot{X}_{N_\eta}(t)\|_\infty = +\infty$. Le résultat suivant est maintenant évident :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\dot{X}_n\|_\infty = +\infty$$

et $\dot{X}_n = f(\mathcal{X}_n)$ implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(\mathcal{X}_n)\|_\infty = +\infty$. Enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{X}_n\|_\infty = +\infty$, car f est continue. Evidemment, ceci est vrai pour tout voisinage de $\tau_{\mathcal{X}_s}$. $\square$

Cette propriété généralise à tout système G -singulier l'absence de borne sur l'entrée u_2 de l'exemple du rail rotatif, comme mentionné par l'équation (1.10).

Corollaire 3.4. *Soit un système ayant une surface G -singulière $\mathbb{M}_0$. Soit $\mathcal{X}_s \in \Sigma_\pm$. Si il existe une suite de trajectoires bornées $\mathcal{X}_n$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Y_n, Y_s) = 0$$

alors,

$$\exists N, \forall n \geq N, \mathcal{X}_n \in \Sigma_\pm$$

En d'autres termes, pour une suite de trajectoires bornées ayant des entrées bornées qui converge vers une trajectoire G -singulière, les trajectoires de la suite sont elles-mêmes toutes G -singulières, au moins à partir d'un certain rang. Ceci signifie qu'aucune suite de trajectoires bornées non G -singulières ne convergera vers une trajectoire G -singulière.

Ainsi, lorsque l'on ne considère que les trajectoires bornées d'un système, on observe une isolation topologique des trajectoires G -singulières : un certain nombre d'entre elles sont réalisables tandis que dans un voisinage suffisamment petit toute trajectoire non G -singulière viole les contraintes sur les entrées ou sur l'état.

Soit un système décrit par (3.1), ayant pour variables d'état X , pour entrées U . Supposons que ce système soit G -singulier sur une hypersurface $\mathbb{M}_0$ avec un saut C par rapport aux sorties Y et une distance d . Soit

$$\begin{aligned} \hat{X} &= F(\hat{X}, U, V), \\ \hat{Y} &= G(\hat{X}, U, V), \end{aligned} \tag{3.3}$$

un second système, tel que $X = H(\widehat{X})$ et $Y = L(\widehat{Y}, \widehat{\dot{Y}}, \dots, \widehat{Y}^{(k)})$, où les fonctions F , G , H et L sont des fonctions au moins de classe $\mathcal{C}^1$ et H est uniformément continue. Ce second système contient en quelque sorte le précédent. On qualifiera le premier de “sous-système” du second, ou encore le second de “sur-système” du premier.

On suppose qu’il existe une distance $\widehat{d}$ sur l’espace des trajectoires de sorties $\widehat{Y}$ du système (3.3) et un réel strictement positif K tels que :

$$d(Y_1, Y_2) \leq K \widehat{d}(\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2). \quad (3.4)$$

Définissons alors $\mathcal{M}_0 = \{(\widehat{X}, U, V), (H(\widehat{X}), U) \in \mathbb{M}_0\}$.

Proposition 3.5 (Héritage de singularités de saut). *Sous les hypothèses précédentes, si pour tout $(\widehat{X}_0, U_0, V_0) \in \mathcal{M}_0$, et pour toute trajectoire $(\widehat{X}_s, U_s, V_s)$ traversant $\mathcal{M}_0$ en $(\widehat{X}_0, U_0, V_0)$, il existe une suite de trajectoires $(\widehat{X}_n, U_n, V_n)$ telle que :*

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{d}(\widehat{Y}_n, \widehat{Y}_s) = 0$$

$$(ii) \forall n, \nexists t \in (t_0, t_f), (\widehat{X}_n(t), U_n, V_n) \in \mathbb{M}_0$$

alors $\mathcal{M}_0$ est G -singulier par rapport à $\widehat{Y}$ et $\widehat{d}$, avec un saut $\widehat{C} > 0$.

Cette proposition dont nous présentons une preuve dans les lignes qui suivent, permet de faire apparaître des singularités de saut sur un système apparemment complexe, mais dont on sait qu’un sous-système possède des singularités de saut.

L’hypothèse d’uniforme continuité de H apparaît dans la preuve, mais la continuité est suffisante si l’on s’assure que les trajectoires restent bornées. Dans ce cas, le théorème de Heine implique l’uniforme continuité sur un compact contenant toutes les trajectoires.

Preuve. La seule chose à prouver maintenant est que pour toute trajectoire traversant $\mathcal{M}_0$ on a la “propriété de saut”. Prenons donc une trajectoire $(\widehat{X}_s, U_s, V_s)$ traversant $\mathcal{M}_0$ en $(\widehat{X}_0, U_0, V_0)$. Soit une suite de trajectoires $(\widehat{X}_n, U_n, V_n)$ vérifiant (i) et (ii). Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{d}(\widehat{Y}_n, \widehat{Y}_s) = 0$, que d est une fonction positive et que $K > 0$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(Y_n, Y_s) = 0$. Comme $\mathbb{M}_0$ est G -singulière par rapport aux sorties Y du système (3.1) et à la distance d , on sait que

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| \geq C. \quad (3.5)$$

Ceci est équivalent à dire que

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|H(\widehat{X}_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) - H(\widehat{X}_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta))\| \geq C. \quad (3.6)$$

Comme H est une fonction uniformément continue, il existe une constante strictement positive $\widehat{C}$ telle que :

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{X}_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - \widehat{X}_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| \geq \widehat{C}. \quad (3.7)$$

Si tel n'était pas le cas, en posant $\delta(\eta) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{X}_n(\tau_{\widehat{\mathcal{X}}_s} + \eta) - \widehat{X}_n(\tau_{\widehat{\mathcal{X}}_s} - \eta)\|$, on aurait $\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \delta(\eta) = 0$ et donc, il existerait une suite de réels positifs η_i tendant vers 0 telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \delta(\eta_i) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. On sait alors qu'il existe $I \in \mathbb{N}$ tel que $i \geq I \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{X}_n(\tau + \eta_i) - \widehat{X}_n(\tau - \eta_i)\| < \epsilon$. On a alors une suite extraite à partir d'indices n_{ij} telle que $i \geq I \Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \|\widehat{X}_{n_{ij}}(\tau + \eta_i) - \widehat{X}_{n_{ij}}(\tau - \eta_i)\| < \epsilon$.

Mais alors par uniforme continuité de H , on aurait

$$i \geq I \Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \|X_{n_{ij}}(\tau + \eta_i) - X_{n_{ij}}(\tau - \eta_i)\| < \sigma(\epsilon),$$

avec $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma(\epsilon) = 0$. Ainsi, pour ϵ suffisamment petit on aurait une contradiction avec le saut C du système (3.1). $\square$

La définition de singularités de saut a permis de formaliser et donc de généraliser les caractéristiques observées dans l'exemple introductif du rail rotatif. On constate que la définition conduit effectivement au même type de propriétés, en particulier l'isolation topologique de trajectoires G -singulières que l'on discerne dans la proposition 3.3 et son corollaire.

Lien avec les singularités de platitude

Notation	:	Description
$\mathbb{E}$	:	espace d'état
$\mathbb{F}$	:	espace des entrées
$\mathbb{H}$	:	espace des sorties
X	:	vecteur des variables d'état
U	:	vecteur des variables d'entrées
Y	:	vecteur des sorties
f	:	fonction définissant la dynamique d'un système
h	:	fonction définissant les sorties plates
$\mathcal{X}$	:	$\dot{=} (X, U)$
$\mathcal{E}$	:	espace de $\mathcal{X}$
$\mathbb{M}_0$	:	surface G -singulière
$\widehat{\mathbb{M}}_0$	:	domaine des singularités de platitude
$\mathcal{X}_0$	:	un point de $\mathbb{M}_0$
$[t_0, t_f]$	:	intervalle de définition des trajectoires
τ ou $\tau_{\mathcal{X}_s}$	:	instant de de $[t_0, t_f]$ pour lequel $\mathcal{X}_s(t)$ traverse $\mathbb{M}_0$
r, ϵ, η	:	réels strictement positifs
$B(\mathcal{X}, r)$	:	boule centrée en $\mathcal{X}$ de rayon r
$\mathbb{B}$	:	$\dot{=} B(\mathcal{X}, r) \cap \mathcal{E}$
$\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_-, \mathbb{N}_+$	:	sous-ensembles de $\mathbb{B}$
$\Sigma_{\pm}$	:	ensemble des trajectoires une fois G -singulières
$\mathcal{X}_s$	:	une trajectoire de $\Sigma_{\pm}$
$d(\cdot, \cdot)$	:	une distance sur $\mathcal{C}_{pm}^q([t_0, t_f], \mathbb{H})$
C	:	le saut (réel strictement positif)
n, N	:	entiers (indices d'une suite)

Notation	:	Description
$\mathcal{Y}$	:	$\doteq (Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$ vecteur des sorties plates et leurs dérivées
$\psi(\cdot, \cdot)$	:	fonction définissant une relation implicite de platitude
$\mathcal{H}$	:	espace de $\mathcal{Y}$
$\mathbb{M}_i$	:	$i^{\text{ième}}$ ouvert sur lequel le système est plat
$\mathbb{M}_-, \mathbb{M}_+$	:	deux $\mathbb{M}_i$ de part et d'autre d'une surface G -singulière $\mathbb{M}_0$
k	:	nombre de $\mathbb{M}_i$
$\mathbb{I}_j$	:	hypersurface entre deux $\mathbb{M}_i$
l	:	nombre de $\mathbb{I}_j$
$\phi_i(\cdot), \phi_-(\cdot), \phi_+(\cdot)$	:	fonctions exprimant $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_i$ (respectivement $\mathbb{M}_-, \mathbb{M}_+$) à partir de $\mathcal{Y}$
$\phi_{iX}(\cdot)$	:	composantes de ϕ_i donnant X
$\widehat{\mathbb{M}}_0$	:	domaine des singularités de platitude
$\widehat{\mathbb{K}}_0, \mathbb{K}_0$	:	équivalent dans $\mathcal{H}$ de $\widehat{\mathbb{M}}_0$ et $\mathbb{M}_0$
$\mathbb{K}$	:	sous-espace de $\mathcal{H}$ sur lequel sont définis les ϕ_i
$T^q\mathbb{H}$	:	fibré tangent d'ordre q de l'espace $\mathbb{H}$
A, B	:	deux matrices
I_p	:	matrice identité $p \times p$

Le chapitre précédent, tout en élaborant le cadre théorique de la notion de singularité de saut, ne fournit pas de conditions pratiques permettant de dire rapidement si un système possède ou non des singularités de saut. L'étude du cas particulier des systèmes plats dans le présent chapitre permet de combler (au moins en partie) cette lacune.

En effet, la propriété de singularité de saut, dans sa définition 3.1, a ceci de commun avec celle d'un système plat possédant des singularités de platitude 2.4 : le rôle crucial de certaines hypersurfaces de l'espace $\mathcal{E}$ dans la relation entre d'une part les variables d'état et les variables d'entrées et d'autre part les variables de sorties.

On donne ici des conditions nécessaires puis une condition suffisante pour qu'un système plat ait une singularité de saut. Dans un but de concision et de clarté, on notera, comme dans le chapitre 2 page 23, $\mathcal{X} = (X, U)$ et $\mathcal{Y} = (Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$, on reprendra également les autres notations utilisées dans la section 2.1.3. Par ailleurs, la distance d nécessaire à la définition 3.1 de singularité de saut sera définie de la manière suivante :

$$d(Y, Z) = \sum_{i=0}^q \|Y^{(i)} - Z^{(i)}\|_{\infty}. \quad (4.1)$$

Cette définition de d permet d'imposer la convergence uniforme de Y et ses dérivées, ce qui est une propriété assez forte, impliquant notamment la convergence simple, c'est à dire pour chaque instant isolément. Ce choix pour

d , peut sembler assez arbitraire et restrictif, mais d'une part il simplifie plusieurs démonstrations et d'autre part sa pertinence apparaît dans l'utilisation que l'on en fait dans ce chapitre, au cours duquel on adopte un point de vue théorique et qualitatif et non pas quantitatif, ce qui fait une raison supplémentaire de ne pas s'en priver.

4.1 Conditions nécessaires de G -singularité pour un système plat

La proposition suivante montre qu'il n'existe pas de système plat sans singularité de platitude mais présentant des singularités de saut.

Proposition 4.1. *Soit un système ayant des sorties plates Y . Si $\mathbb{M}_0$ est une surface G -singulière par rapport à Y et d avec un saut $C > 0$, alors $\mathbb{M}_0$ est aussi singulière vis-à-vis de la platitude.*

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il y a un sous ensemble $\mathfrak{M}_0$ de $\mathbb{M}_0$ où il n'y a pas de singularité de platitude, c'est à dire que $\mathfrak{M}_0 \cap \widehat{\mathbb{M}}_0 = \emptyset$. Soit $\mathcal{X}_0 \in \mathfrak{M}_0$, alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{M}_i$. D'après la définition de singularité de saut 3.1, soit $\mathbb{B}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_-$ et $\mathbb{N}_+$ dans un voisinage de $\mathcal{X}_0$ inclus dans $\mathbb{M}_i$ (ce qui est possible car $\mathbb{M}_i$ est un ouvert). Soit $\mathcal{X}_s$ une trajectoire G -singulière incluse dans $\mathbb{B}$, qui traverse $\mathfrak{M}_0$ une seule fois, pour $t = \tau$ avec $\mathcal{X}_s(\tau) = \mathcal{X}_0$. Alors $\mathcal{X}_s \in \Sigma_{\pm}$. Soit Y_s la trajectoire correspondante dans l'espace des sorties. Soit $\mathcal{X}_n \subset \mathbb{M}_i$ une suite de trajectoires telles que les propriétés (i) et (ii) de la définition 3.1 sont valables.

La convergence pour la distance d implique la convergence uniforme et de là, la convergence simple : $\forall t, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{Y}_n(t) = \mathcal{Y}_s(t)$. Mais nous disposons aussi de la propriété suivante : $\mathcal{X}_s = \phi_i(\mathcal{Y}_s)$ et $\mathcal{X}_n = \phi_i(\mathcal{Y}_n)$. Comme ϕ_i est continue, $\forall t, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_n(t) = \mathcal{X}_s(t)$. Et donc

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau + \eta) - X_n(\tau - \eta)\| = 0$$

C'est évidemment en contradiction avec

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau + \eta) - X_n(\tau - \eta)\| \geq C > 0. \quad \square$$

Une conséquence de cette proposition est qu'une surface G -singulière est incluse dans le domaine des singularités de platitude $\widehat{\mathbb{M}}_0$ (cf. définition 2.5), qui n'est autre que l'union des interfaces $\mathbb{I}_j$ entre les $\mathbb{M}_i$.

Puisque $\mathbb{M}_0 \subset \widehat{\mathbb{M}}_0$ et qu'à $\widehat{\mathbb{M}}_0 \subset \mathcal{E}$ correspond $\widehat{\mathbb{K}}_0 \subset \mathcal{H}$, nous sommes en mesure de définir $\mathbb{K}_0 \subset \widehat{\mathbb{K}}_0$ correspondant à la surface G -singulière $\mathbb{M}_0$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux propriétés de $\mathbb{K}_0$. Avant de discuter de la dimension de $\mathbb{K}_0$ dans la proposition 4.4, donnons deux petits

lemmes qui, outre l'utilisation que l'on en fera dans les raisonnements suivants, permettront une meilleure compréhension de ce qui se passe à proximité de $\mathbb{K}_0$. Dans ce qui suit, on notera ϕ_{iX} les composantes de ϕ_i qui donnent l'état X .

Lemme 4.2. *Soit un système ayant des sorties plates Y . Si $\mathbb{M}_0$ est une surface G -singulière par rapport à Y et d entre $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ avec un saut $C > 0$, alors pour toute trajectoire $\mathcal{Y}_s$, image via la fonction h d'une trajectoire G -singulière $\mathcal{X}_s$ traversant $\mathbb{M}_0$ à l'instant τ , on a*

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \|\phi_{iX}(\mathcal{Y}_s(\tau + \eta)) - \phi_{iX}(\mathcal{Y}_s(\tau - \eta))\| \geq C, \quad i = 1, 2.$$

Preuve. Soit une trajectoire $\mathcal{X}_s$ G -singulière qui traverse $\mathbb{M}_0$ en $t = \tau$ et $\mathcal{Y}_s$ la trajectoire correspondante dans $\mathcal{H} = T^q\mathbb{H}$. On supposera que $\mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{M}_1$ si $t < \tau$ et $\mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{M}_2$ si $t > \tau$. Comme $\mathbb{M}_0$ est G -singulière, il existe une suite de trajectoires $\mathcal{X}_n$ telles que :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Y_n, Y_s) = 0$,
- (ii) $\forall n, \forall t, \mathcal{X}_n(t) \in \mathbb{M}_1$.

Remarquons d'abord que dans (ii), par les propriétés que l'on a exigées d'un système plat avec singularités, on peut remplacer $\mathbb{M}_1$ par $\mathbb{M}_2$, car les trajectoires $\mathcal{Y}_n$ étant définies dans $\mathbb{K}$ on pourrait leur appliquer aussi bien ϕ_1 que ϕ_2 .

On sait que, d'après la définition de d dans 4.1, (i) implique que :

$$\forall t, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_n(t) = \mathcal{Y}_s(t).$$

De plus d'après (ii), et par les propriétés de platitude du système, $\forall n, \forall t, \mathcal{X}_n(t) = \phi_1(\mathcal{Y}_n(t))$, et donc

$$\forall n, \forall t, X_n(t) = \phi_{1X}(\mathcal{Y}_n(t)).$$

Par continuité de ϕ_{1X} sur $\mathbb{K}$ on a également :

$$\forall t \neq \tau, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{1X}(\mathcal{Y}_n(t)) = \phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(t)).$$

La singularité de saut implique que

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|X_n(\tau + \eta) - X_n(\tau - \eta)\| \geq C,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\phi_{1X}(\mathcal{Y}_n(\tau + \eta)) - \phi_{1X}(\mathcal{Y}_n(\tau - \eta))\| &\geq C \\ \Downarrow \\ \liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \|\phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \eta)) - \phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau - \eta))\| &\geq C. \end{aligned}$$

Le résultat est bien sûr le même pour ϕ_{2X} . □

Ce résultat montre bien qu'il est impossible de prolonger ϕ_i par continuité sur $\mathbb{K}_0$.

Ce qui suit est un second lemme qui soutendra les hypothèses de la proposition 4.5. Il analyse la relation, ou plutôt l'écart, entre ϕ_1 et ϕ_2 dans un voisinage de $\mathbb{K}_0$.

Lemme 4.3. *Soit un système ayant des sorties plates Y . Si $\mathbb{M}_0$ est une surface G -singulière par rapport à Y et d entre $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ avec un saut $C > 0$, alors pour toute trajectoire $\mathcal{Y}_s$, image via la fonction h d'une trajectoire G -singulière $\mathcal{X}_s$ traversant $\mathbb{M}_0$ à l'instant τ , on a*

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \|\phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \epsilon\eta)) - \phi_{2X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \epsilon\eta))\| \geq C, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Preuve. Dans la foulée de la preuve précédente, il suffit de remarquer que $\mathcal{X}_s(t)$ est une trajectoire continue, notamment au voisinage de τ . Cela implique bien sûr que $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|X_s(\tau + \eta) - X_s(\tau - \eta)\| = 0$, et donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|\phi_{2X}(Y_s(\tau + \eta)) - \phi_{1X}(Y_s(\tau - \eta))\| = 0. \quad (4.2)$$

Alors en utilisant

$$\|\phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \eta)) - \phi_{2X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \eta))\| \geq \left| \begin{aligned} &\|\phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \eta)) - \phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau - \eta))\| \\ &- \|\phi_{1X}(\mathcal{Y}_s(\tau - \eta)) - \phi_{2X}(\mathcal{Y}_s(\tau + \eta))\| \end{aligned} \right|$$

avec le lemme précédent et l'équation (4.2) on obtient le résultat pour $\epsilon = 1$, la démonstration est la même pour $\epsilon = -1$. $\square$

Ce lemme laisse prévoir que dans un voisinage de $\mathbb{K}_0$ les fonctions ϕ_{1X} et ϕ_{2X} sont distantes d'une valeur qui se rapproche du saut lorsque l'on est près de $\mathbb{K}_0$. Cette propriété sera renforcée dans la condition suffisante donnée en section suivante.

La proposition suivante établit un résultat sur la codimension de $\mathbb{K}_0$ dans $\mathcal{H} = T^q\mathbb{H}$.

Proposition 4.4 (Codimension minimale de $\mathbb{K}_0$). *Soit un système ayant des sorties plates Y . Si $\mathbb{M}_0$ est une surface G -singulière par rapport à Y et d avec un saut $C > 0$, alors la variété $\mathbb{K}_0 = \{\mathcal{Y} \in T^q\mathbb{H} \mid \exists \mathcal{X} \in \mathbb{M}_0, \psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{K}}_0$ est*

- soit de codimension supérieure ou égale à 2.
- soit de codimension 1 mais aucune trajectoire réalisable ne peut la traverser (elles peuvent seulement être tangentes)

Preuve. Procédons de nouveau par l'absurde et supposons que la codimension de $\mathbb{K}_0$ soit au plus 1. Appellons $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ les ouverts situés de part et d'autre de $\mathbb{M}_0$. Soit une trajectoire $\mathcal{X}_s$ telle qu'il existe un instant $\tau \in]t_0, t_f[$, tel que

- $\forall t < \tau, \mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{M}_1,$
- $\mathcal{X}_s(\tau) \in \mathbb{M}_0,$
- $\forall t > \tau, \mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{M}_2.$

A la trajectoire $\mathcal{X}_s$ correspond, *via* la fonction h , une unique trajectoire $\mathcal{Y}_s \subset \mathcal{H} = T^q\mathbb{H}$. Rappelons que dans la définition des systèmes plats que nous avons adoptée, il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 définies sur le même ensemble $\mathbb{K} \subset T^q\mathbb{H}$ telles que pour $i = 1, 2$, si $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_i$, alors $\mathcal{X} = \phi_i(\mathcal{Y})$. Ceci implique :

- $\forall t < \tau, \mathcal{X}_s(t) = \phi_1(\mathcal{Y}_s(t)),$ avec $\mathcal{Y}_s(t) \in \mathbb{K},$
- $\forall t > \tau, \mathcal{X}_s(t) = \phi_2(\mathcal{Y}_s(t)),$ avec $\mathcal{Y}_s(t) \in \mathbb{K},$

tandis que $\mathcal{Y}_s(\tau) = \mathcal{Y}_0 \in \mathbb{K}_0$, par définition de $\mathbb{K}_0$. Ceci signifie, au sens topologique du terme que $\mathcal{Y}_0$ est un point de la frontière de $\mathbb{K}$ et donc, par conséquent $\mathbb{K}_0$ est une partie de la frontière de $\mathbb{K}$ dans l'espace $T^q\mathbb{H}$.

La première conclusion, c'est que, comme $\mathbb{K}$ est connexe par arcs, sa frontière ne peut pas être de codimension nulle, c'est à dire un hypervolume. Il ne reste donc plus que la possibilité d'une codimension 1. C'est à dire que $\mathbb{K}_0$ est une hypersurface¹.

De plus, le passage de $\mathcal{Y}_s(t)$ par $\mathbb{K}_0$ est instantané, donc :

1. soit $\mathcal{Y}_s(t)$ traverse $\mathbb{K}_0$ en $t = \tau$,
2. soit $\mathcal{Y}_s(t)$ reste du “même côté” par rapport à $\mathbb{K}_0$ et est tangente à $\mathbb{K}_0$ en $t = \tau$.

Cette situation est résumée sur la figure 4.1 En réalité, un troisième cas de

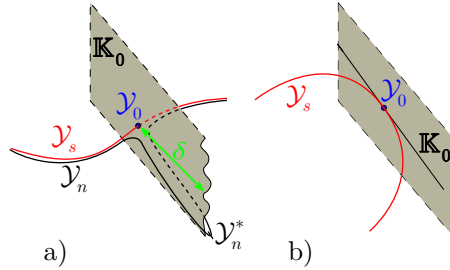


Fig. 4.1. Raisonement par l'absurde avec $\mathbb{K}_0$ de codimension 1, a) $\mathcal{Y}_s$ traverse $\mathbb{K}_0$ ou b) $\mathcal{Y}_s$ est tangente à $\mathbb{K}_0$.

figure est possible, $\mathcal{Y}_s(t)$ reste du “même côté” par rapport à $\mathbb{K}_0$ mais n'est pas tangente à $\mathbb{K}_0$ en $t = \tau$. Cela peut être possible pour une fonction $Y(t)$ dite “plate” en $t = \tau$, c'est à dire telle que ses dérivées à tous les ordres sont nulles. Une condition nécessaire pour que cela se produise est que $\mathcal{Y}_s(\tau)$ soit

¹ ou bien un ensemble de morceaux d'hypersurfaces, mais cela n'a aucun rôle dans la démonstration.

nul, sinon ce vecteur là serait un vecteur tangent à la courbe, impliquant également que la courbe serait tangente à $\mathbb{K}_0$ en ce point. Or l'ensemble des points tels que $\dot{\mathcal{Y}}_s(\tau) = 0$ est très réduit dans $T^q\mathbb{H}$, car il implique en particulier que $(\dot{Y}, \dots, Y^{(q)}) = 0$ et donc restreint le vecteur $\mathcal{Y}$ à un ensemble dont la dimension est nécessairement plus faible que celle d'un hyperplan. Il n'est donc pas nécessaire d'étudier ce cas de figure pour la démonstration en cours.

Prenons la première hypothèse et supposons que $\mathcal{Y}_0$ n'est pas sur le bord de $\mathbb{K}_0$. Pour qu'il y ait singularité de saut, il faut qu'il existe une suite $\mathcal{Y}_n$ tendant vers $\mathcal{Y}_s$, mais $\mathcal{X}_n$ n'ayant aucune configuration G -singulière, et donc $\mathcal{Y}_n(t)$ n'appartenant à $\mathbb{K}_0$ pour aucun $t \in [t_0, t_f]$. Comme on a supposé que $\mathcal{Y}_0$ n'est pas sur le bord de $\mathbb{K}_0$, il existe une distance minimale δ entre $\mathcal{Y}_0$ et ce bord. De plus, comme on veut une convergence pour la distance d , il s'agit d'une convergence uniforme pour Y_n et toutes ses dérivées. Ceci implique que pour tout $t \in [t_0, t_f]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{Y}_n(t) - \mathcal{Y}_s(t)\| = 0$. Remarquons alors que :

- comme $\mathcal{Y}_s$ est continue, il existe $\Delta\tau > 0$ tel que si $\eta < \Delta\tau$ alors $\|\mathcal{Y}_s(\tau \pm \eta) - \mathcal{Y}_0\| < \frac{\delta}{2}$,
- comme $\mathcal{Y}_n$ ne peut pas passer par $\mathbb{K}_0$, entre $\tau - \Delta\tau$ et $\tau + \Delta\tau$ elle doit nécessairement passer par un point $\mathcal{Y}_n^*$ tel que $\|\mathcal{Y}_n^* - \mathcal{Y}_0\| \geq \delta$, ceci en un certain instant t_n^* . En effet, si tel n'était pas le cas, alors sur l'intervalle $[\tau - \Delta\tau, \tau + \Delta\tau]$ la trajectoire serait contenue dans la boule de centre $\mathcal{Y}_0$ et de rayon δ , et cette boule est coupée en deux par $\mathbb{K}_0$, il n'y aurait donc pas moyen que la trajectoire passe d'un côté à l'autre continûment.

Tout ceci apparaît sur la figure 4.1.a).

Il est alors clair que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}_s(t_n^*) - \mathcal{Y}_n(t_n^*)\| &\geq \|\mathcal{Y}_s(t_n^*) - \mathcal{Y}_0\| - \|\mathcal{Y}_n(t_n^*) - \mathcal{Y}_0\| \\ &\geq \left| \delta - \frac{\delta}{2} \right| \\ &\geq \frac{\delta}{2} \quad , \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction flagrante avec la convergence uniforme.

Finalement, si nous sommes dans la seconde hypothèse, l'énoncé de la proposition est confirmé. □

Notons que cette proposition laisse la possibilité que $\mathbb{K}_0$ soit de codimension 1 sous certaines restrictions. Cela dit, en admettant que cela soit possible, les fonctions ϕ_i d'un tel système auraient dans le voisinage de $\mathbb{K}_0$ sans doute des propriétés similaires à la fonction $\sin \frac{1}{t}$ au voisinage de 0, comme le lemme 4.2 le suggère.

Ainsi l'hypothèse d'une codimension 2 sera reprise dans la section suivante, pour des conditions suffisantes d'existence de G -singularités pour un système plat.

4.2 Condition suffisante de G -singularité pour un système plat

Le but de cette section est de déterminer des conditions suffisantes assurant qu'une singularité de platitude implique une singularité de saut. L'intérêt d'un tel résultat réside dans la possibilité de l'utiliser comme critère pratique pour tester la G -singularité de n'importe quel système plat. La proposition 4.5 fournit une réponse à cette problématique ce avec l'avantage d'éviter le passage par la définition 3.1 pour vérifier la propriété de singularité. Cette proposition sera utilisée sur la plupart des systèmes étudiés dans les deux chapitres suivants.

Tenant compte de la proposition 4.1, on suppose bien sûr que le système étudié est différentiellement plat et possède au moins une singularité de platitude, telle que décrite dans la définition des système plats (page 25). Il existe donc au moins deux ensembles ouverts et connexes $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ sur lesquels le système est plat. $\mathbb{M}_1$ et $\mathbb{M}_2$ partagent une frontière commune $\mathbb{I}_{12} \subset \widehat{\mathbb{M}}_0$ dans le voisinage de laquelle la platitude est mise en défaut. On reprend également les notations des fonctions ψ , ϕ_1 et ϕ_2 , caractérisant la platitude du système.

De façon à retrouver les notations de la figure 3.1, on pose $\mathbb{M}_- = \mathbb{M}_1$, $\mathbb{M}_+ = \mathbb{M}_2$ et $\mathbb{M}_0 = \mathbb{I}_{12} \subset \widehat{\mathbb{M}}_0$. On pose aussi $\phi_- = \phi_1$ et $\phi_+ = \phi_2$.

La situation générale est résumée sur la figure 4.2.

Supposons de plus que le système possède les propriétés suivantes :

1. $\exists C > 0, \forall \mathcal{Y} \in \mathbb{K}, \|\phi_{-,X}(\mathcal{Y}) - \phi_{+,X}(\mathcal{Y})\| \geq C$ (hypothèse issue du lemme 4.3).
2. Soit $\mathbb{K}_0 \subset \widehat{\mathbb{K}}_0$ la partie de la frontière de $\mathbb{K}$ telle que $\forall \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_0, \exists \mathcal{X} \in \mathbb{M}_0, \psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$. On suppose que $\mathbb{K}_0$ est de codimension au moins 2, dans $T^q\mathbb{H}$ (comme suggéré par la proposition 4.4).

Proposition 4.5. *Sous les conditions précédentes, $\mathbb{M}_0 = \mathbb{I}_{ij}$ est G -singulière par rapport à Y et d , avec un saut C .*

Preuve. Soit $\mathcal{X}_s \in \Sigma_{\pm}$ et l'instant τ correspondant à la traversée de l'hyper-surface $\mathbb{M}_0$.

On doit premièrement prouver qu'il existe une suite de trajectoires $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(Y_n, Y_s) = 0$
- (ii) $\forall n, \nexists t \in (t_0, t_f), \mathcal{X}_n(t) \in \mathbb{M}_0$.

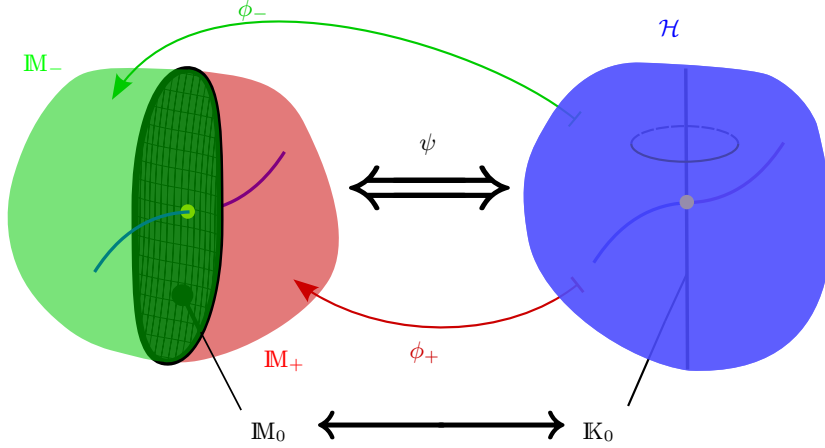


Fig. 4.2. Relation entre les $\mathbb{M}_i$ et leur frontières d'une part, et $\mathcal{H}$ et $\mathbb{K}_0$ d'autre part. Comparer avec la figure 3.1.

Tirons $\mathcal{Y}_s = (Y_s, \dot{Y}_s, \dots, Y_s^{(q)}) \in \mathbb{K}$ à partir des sorties Y_s . Une trajectoire $\mathcal{Y}$ ne peut être choisie arbitrairement, parce qu'elle suit elle-même une évolution imposée par une contrainte différentielle. En effet, si l'on pose $U_Y = Y^{(q+1)}$, $\mathcal{Y}$ peut être interprétée comme l'ensemble des variables d'état d'un système linéaire contrôlable :

$$\dot{\mathcal{Y}} = A\mathcal{Y} + BU_Y$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & I_p & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_p \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p(q+1) \times p(q+1)} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p(q+1) \times p}.$$

Alors, tirant parti de l'hypothèse (2), il est possible de proposer une loi de commande U_Y , dépendant du rang n telle que les propriétés (i) et (ii) ci-dessus sont satisfaites pour une suite de trajectoires $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenues à partir de conditions initiales et de la loi de commande. En effet, l'hypothèse (2) implique que $\mathbb{K}_0$ est de dimension inférieure à celle d'une hypersurface, et donc qu'elle ne sépare pas, même localement, l'espace $T^q\mathbb{H}$ en deux parties non connexes, comme c'est le cas dans la définition topologique de $\mathbb{M}_0$ page 42.

Deuxièmement, il est nécessaire de montrer que $\forall (\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que (i) et (ii) sont vraies, on a

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| \geq C.$$

Soit $(\mathcal{X}_n)$ une trajectoire ayant ces propriétés, $Y_n = h(\mathcal{X}_n)$ les $\mathcal{Y}_n$ associés. Soit $\eta > 0$ suffisamment petit. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} d(Y_n, Y_s) = 0 &\Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, q\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n^{(i)}(\tau_{\mathcal{X}_s} \pm \eta) = Y_s^{(i)}(\tau_{\mathcal{X}_s} \pm \eta) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{Y}_n(\tau_{\mathcal{X}_s} \pm \eta) = \mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} \pm \eta) \end{aligned}$$

Soit $\phi_{-,X}$ et $\phi_{+,X}$ les parties de ϕ_- et ϕ_+ qui donnent X en fonction de $(Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$.

Soit $\delta(\eta) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_n(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\|$. Alors dans le cas où² $\mathcal{X}_n \subset \mathbb{M}_-$:

$$\delta(\eta) = \|\phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) - \phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta))\|.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \delta(\eta) &= \|\phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) - X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) \\ &\quad + X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - \phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta))\| \\ &= \|\phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) - \phi_{+,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) \\ &\quad + X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| \\ &\geq \|\phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) - \phi_{+,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta))\| \\ &\quad - \|X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\|. \end{aligned}$$

Comme $X_s(t)$ est continue sur $[t_0, t_f]$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \|X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta) - X_s(\tau_{\mathcal{X}_s} - \eta)\| = 0,$$

et on a : $\|\phi_{-,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta)) - \phi_{+,X}(\mathcal{Y}_s(\tau_{\mathcal{X}_s} + \eta))\| \geq C$. Alors il est clair que $\liminf_{\eta \rightarrow 0^+} \delta(\eta) \geq C$. $\square$

4.3 Un mot sur la non inclusion réciproque

Nous venons de voir ce qui caractérise un système plat G -singulier. De plus, tous les exemples illustrant cette thèse sont des systèmes plats avec singularités. Bien sûr un système plat sans singularité n'aura pas non plus de singularité de saut, comme nous l'avons démontré avec la proposition 4.1. Cependant deux petites questions attendent une réponse.

- Tous les systèmes plats avec singularités sont-ils G -singuliers ?
- Tous les systèmes G -singuliers sont-ils nécessairement plats ?

La réponse est non dans les deux cas. En effet, le système très simple :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

² (ii) pourrait aussi impliquer $\mathcal{X}_n \subset \mathbb{M}_+$, mais ça ne change rien au raisonnement.

est plat avec une singularité de platitude³ pour $y = x = 0$. Comme dans les parties précédentes, utilisons la norme infinie pour définir une distance entre des trajectoires de sortie :

$$d(y, z) = \|y - z\|_\infty. \quad (4.4)$$

Choisissons par exemple la trajectoire $(x_s, u_s) = (t, 1)$ pour $t \in [-1, 1]$. Cette trajectoire traverse la variété $M_0 = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$ sur laquelle il y a une singularité de platitude. La sortie correspondante est $y_s = t^2$. La suite de trajectoires $(x_n, u_n) = (|t| + \frac{1}{n}, \text{signe}(t))$ est telle que $y_n = t^2 + 2\frac{|t|}{n} + \frac{1}{n^2}$ tend uniformément (donc pour la distance d) vers y_s . De son côté, la suite de trajectoires (x_n, u_n) converge vers $(|t|, \text{signe}(t))$. Certes, cette trajectoire est distincte de (x_s, u_s) mais le simple fait qu'il y ait convergence montre qu'il n'y a pas de singularité de saut par la contre-apposée de la proposition 3.3. On verrait également que l'application de la définition conduirait à un saut $C = 0$ ce qui est contradictoire avec la nature même d'un saut $C > 0$. Ainsi, il y a bien des systèmes plats qui ont des singularités de platitude sans avoir de singularité de saut.

Pour la seconde question, on peut au moins donner la réponse évidente suivante : si on a un système plat avec singularité de saut, il est aisé de l'augmenter, selon le schéma de la proposition 3.5, avec de nouvelles variables $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ de façon à ce qu'il ne soit plus plat. Dans ce cas, la singularité de saut demeure, du moment que le sur-système construit ainsi respecte les hypothèses de la proposition.

A la fin de ce chapitre, nous disposons maintenant d'outils pour discerner si un système plat possède ou non des singularités de saut. On pourrait rétorquer que cela n'est que déplacer le problème puisque l'on sait bien que déterminer si un système donné est différentiellement plat ou non est une question qui est loin d'être évidente, et qui pour l'instant n'a pas de réponse générique. Cependant, on connaît déjà beaucoup de systèmes plats, et on dispose également d'outils analytiques pour répondre à la question précédente pour certaines classes de systèmes. Ainsi, comme c'est le cas dans le chapitre suivant, on pourra tirer profit de l'analyse de ce chapitre lorsque l'on parvient à dire qu'un système est différentiellement plat.

³ Notons que dans cet exemple (trop ?) simple comme dans le cas du rail rotatif il existe une sortie plate évidente x qui ne provoque aucune singularité.

Une série d'illustrations

Notation	Description
$\mathbf{E}$	: espace d'état
$\mathbf{F}$	: espace des entrées
$\mathbf{H}$	: espace des sorties
X	: vecteur des variables d'état
U	: vecteur des variables d'entrées
Y	: vecteur des sorties
m	: dimension de l'espace des entrées et de l'espace des sorties plates
$(u_1, \dots, u_m)$	: composantes de U
$(y_1, \dots, y_m)$	: composantes de Y
f	: fonction définissant la dynamique d'un système
h	: fonction définissant les sorties plates
$\mathcal{X}$	: $\doteq (X, U)$
$\mathcal{E}$	: espace de $\mathcal{X}$
$\mathbf{M}_0$	: surface G -singulière
$\widehat{\mathbf{M}}_0$	: domaine des singularités de platitude
$\mathcal{X}_0$	: un point de $\mathbf{M}_0$
$d(\cdot, \cdot)$	: une distance sur $\mathcal{C}_{pm}^q([t_0, t_f], \mathbf{H})$
C	: le saut (réel strictement positif)
$\mathcal{Y}$	: $\doteq (Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$ vecteur des sorties plates et leurs dérivées
$\psi(\cdot, \cdot)$	: fonction définissant une relation implicite de platitude
$\mathcal{H}$	: espace de $\mathcal{Y}$
$\mathbf{M}_i$	: $i^{\text{ième}}$ ouvert sur lequel le système est plat
$\mathbf{M}_-, \mathbf{M}_+$	: deux $\mathbf{M}_i$ de part et d'autre d'une surface G -singulière $\mathbf{M}_0$
$\mathbb{I}_j$	: hypersurface entre deux $\mathbf{M}_i$

Notation	Description
$\phi_i(\cdot), \phi_-(\cdot), \phi_+(\cdot)$	: fonctions exprimant $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_i$ (respectivement $\mathbb{M}_-, \mathbb{M}_+$) à partir de $\mathcal{Y}$
$\phi_{iX}(\cdot)$	: composantes de ϕ_i donnant X
$\widehat{\mathbb{M}}_0$	: domaine des singularités de platitude
$\widehat{\mathbb{K}}_0, \mathbb{K}_0$	: équivalent dans $\mathcal{H}$ de $\widehat{\mathbb{M}}_0$ et $\mathbb{M}_0$
$\mathbb{K}$	: sous-espace de $\mathcal{H}$ sur lequel sont définis les ϕ_i
$T^q\mathbb{H}$	: fibré tangent d'ordre q de l'espace $\mathbb{H}$
(μ, θ)	: variables d'état du rail rotatif
(x_1, x_2, θ, v)	: variables d'état de l'unicycle après extension dynamique
(ω, u)	: entrées de l'unicycle après extension dynamique
(θ, γ)	: variables d'état du bras sphérique
R	: rayon du bras sphérique
(r, θ, γ)	: variables d'état de l'extension combinée bras sphérique / rail rotatif
P	: un point de $R\mathbb{S}_3$ ou de $\mathbb{R}_3$.

Dans ce chapitre, il s'agit surtout d'appliquer la proposition 4.5 à différents systèmes pour montrer qu'ils sont G -singuliers. En outre, on expose en détail le lien entre les deux systèmes déjà mentionnés (le rail rotatif et le robot unicycle) et les deux sections théoriques qui précèdent. Deux autres exemples leur font suite. Un exemple plus complexe viendra dans le chapitre 6 dédié au robot à plusieurs roues orientables.

5.1 Le rail rotatif

Pour le système du rail rotatif, en conformité avec les équations (1.2) et (1.3) et dans le cadre des notations adoptées dans cet ouvrage pour les systèmes plats et les singularités de sauts, on pose :

- $\mathbb{E} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ et $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{X} = (\mu, \theta, u_1, u_2) \in \mathbb{H}$, $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \in T\mathbb{H}$,
- $\psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} y_1 - \mu \cos \theta \\ y_2 - \mu \sin \theta \\ \mu u_1 - \dot{y}_1 y_1 - \dot{y}_2 y_2 \\ \mu^2 u_2 - \dot{y}_2 y_1 + \dot{y}_1 y_2 \end{pmatrix}$,
- la distance d définie dans l'espace des trajectoires des sorties :

$$d(Y, Y') = \|Y - Y'\|_\infty + \|\dot{Y} - \dot{Y}'\|_\infty. \quad (5.1)$$

La troisième et la quatrième composantes de ψ s'obtiennent en dérivant respectivement les égalités $\mu^2 = y_1^2 + y_2^2$ et $y_1 \sin \theta = y_2 \cos \theta$ issues des deux égalités (1.3) définissant les sorties.

Mettons en évidence la singularité de platitude :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \mu \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & -\mu \cos \theta & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & \mu & 0 \\ 2\mu u_2 & 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \text{ et } \det \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} \right) = \mu^4$$

On retrouve ici la singularité mentionnée dans l'introduction qui donne lieu à deux couples possibles de coordonnées (μ, θ) pour chaque couple de coordonnées cartésiennes $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$. Ainsi on peut définir les zones de $\mathcal{E}$ où le système est différentiellement plat :

- $\mathbb{M}_+ = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, \mu > 0\}$,
- $\mathbb{M}_- = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, \mu < 0\}$.

Ces deux demi-espaces sont séparés par l'hypersurface $\mathbb{I}_0 = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, \mu = 0\}$. Sur chacun de ces demi-espaces on peut exprimer $\mathcal{X}$ en fonction de $\mathcal{Y}$:

$$\phi_+(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \text{atan}_2(y_2, y_1) \\ \frac{\dot{y}_1 y_1 + \dot{y}_2 y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix} [2\pi], \quad \text{et} \quad \phi_-(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \text{atan}_2(y, x) + \pi \\ -\frac{\dot{y}_1 y_1 + \dot{y}_2 y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix} [2\pi].$$

Proposition 5.1. *L'hypersurface $\mathbb{I}_0$ est G -singulière par rapport aux sorties Y et à la distance d , avec un saut $C = \pi$.*

Preuve. Il suffit de constater que les différentes hypothèses de la proposition 4.5 sont réunies. Pour une bonne correspondance des notations, on pose $\mathbb{M}_0 = \mathbb{I}_0$ et $\mathbb{K}_0 = \{\mathcal{Y} \in T\mathbb{H}, (y_1, y_2) = (0, 0)\}$. Il est clair que $\mathbb{K}_0$ est l'ensemble de $T\mathbb{H}$ correspondant à $\mathbb{M}_0$ dans $\mathcal{E}$. De plus $\mathbb{K}_0$ est évidemment de codimension 2 puisqu'il est défini par deux équations indépendantes d'hyperplans. Enfin, on remarque que

$$\phi_{+,X}(\mathcal{Y}) - \phi_{-,X}(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \pi \\ [2\pi] \end{pmatrix},$$

qui fait apparaître $\|\phi_{+,X}(\mathcal{Y}) - \phi_{-,X}(\mathcal{Y})\| \geq \pi$. □

Afin de saisir les différentes facettes du problème, on peut décrire pour ce système les configurations équivalentes auxquelles on a fait référence à la section 2.1.4 et déjà évoquées pour cet exemple dans l'introduction. On peut remarquer sur la figure 1.5 page 11 que le passage par la singularité peut s'avérer économique du point de vue de la rotation du rail.

Sur cette figure, la masse que l'on souhaite déplacer parcourt des trajectoires très proches entre le mouvement a) et le mouvement b), en revanche la trajectoire d'état est extrêmement différente. On retrouve donc d'une part l'idée qu'à

la partie différentiellement plate de l'espace des sorties correspondent deux variétés distinctes dans l'espace des entrées, et d'autre part que cette distinction est couplée avec une distance irréductible qui est le saut de π de l'angle θ entre deux configurations équivalente pour les sorties.

5.2 Le robot unicycle

Les propriétés structurelles du robot unicycle ont plusieurs similarités avec celles du rail rotatif. De la même manière que dans le paragraphe précédent, on pourrait montrer à partir des équations présentées dans l'introduction que la surface $\mathbb{M}_0 = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, v = 0\}$ est bien G -singulière. De façon à mieux voir le lien avec le rail rotatif, nous allons plutôt proposer un point de vue très proche en posant $u = \dot{v}$. De cette façon on opère une extension dynamique du système pour la variable de vitesse longitudinale. Les équations (1.1) deviennent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v \cos \theta \\ \dot{x}_2 &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{v} &= u \end{aligned}, \quad (5.2)$$

avec les mêmes sorties (définies par l'équation (1.11)) que nous renommons ici $Z = (z_1, z_2) = (x_1, x_2)$. Il est alors tout à fait limpide qu'il y a correspondance entre le couple de variables (v, θ) pour le robot d'une part et le couple (μ, θ) pour le rail rotatif d'autre part. La différence fondamentale vient du fait qu'il y a un degré de dérivation supplémentaire, ce qui fait du rail rotatif un sous-système du robot unicycle. On peut alors appliquer la proposition 3.5 pour montrer que $\mathbb{M}_0$ est G -singulière avec un saut π par rapport à $Z = (z_1, z_2)$ si l'on choisit comme distance :

$$\widehat{d}(Z, Z') = \|Z(t) - Z'(t)\|_\infty + \|\dot{Z}(t) - \dot{Z}'(t)\|_\infty + \|\ddot{Z}(t) - \ddot{Z}'(t)\|_\infty.$$

Preuve. Identifions donc (v, θ) avec (μ, θ) . Il est alors clair que les sorties $Y = (y_1, y_2)$ du système (1.2), données par (1.3), sont les dérivées des sorties $Z = (z_1, z_2)$ du système (5.2).

On constate d'abord que si l'on pose $K = 1$, on a bien

$$d(Z, Z') = \widehat{d}(Y, Y') - \|Y(t) - Y'(t)\|_\infty \leq K \widehat{d}(Y, Y'),$$

où d est définie par (5.1).

Vérifions maintenant la dernière hypothèse nécessaire pour utiliser la proposition 3.5. Avec les notations des chapitres précédents, $\mathcal{X} = (x_1, x_2, \theta, v, \omega, u)$. Soit $\mathcal{X}_s$ une trajectoire de 5.2 sur $[t_0, t_f]$ telle qu'il existe $\tau \in]t_0, t_f[$, tel que :

- $v(\tau) = 0$,
- $v(t) < 0$ pour $t < \tau$,
- $v(t) > 0$ pour $t > \tau$.

On sait que l'on est en mesure de trouver une suite de trajectoires Y_n pour le système du rail rotatif, telles que la suite des sorties tend bien vers Y_s au sens de d sans que μ , c'est à dire v , ne s'annule. Alors, par intégration de Y_n , on obtient une suite de trajectoires Z_n qui garde cette propriété. De plus pour assurer la convergence de Z_n vers Z_s au sens de $\hat{d}$, il suffit de choisir pour chaque n la constante d'intégration telle $Z_n(t_0) = Z_s(t_0)$. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Par ailleurs, comme on peut le constater sur la figure 1.3 du chapitre d'introduction, le passage de la singularité revient à suivre un chemin avec un point de rebroussement, ce que l'on visualise très bien lorsque l'on fait une manœuvre avec une voiture. La figure illustre également, comme pour le cas du rail rotatif, la possibilité de traverser ou non la singularité pour passer d'une configuration des sorties plates à une autre. Le cas du robot unicycle fait apparaître de manière très évidente la différence de nature entre les deux types de trajectoires, à cause de la nécessité de l'arrêt du robot ($v = 0$) et du point de rebroussement, comme cela avait été suggéré dans l'introduction de la thèse.

5.3 Un bras de robot sphérique

Soit $P(\theta, \gamma) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \gamma \\ \sin \theta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$ l'extrémité d'un bras à deux axes, où

- θ est l'angle de rotation du premier segment autour de la verticale,
- et γ est l'angle de rotation du deuxième segment par rapport au premier dans un plan vertical.

On peut comparer θ et γ à une latitude et une longitude. En effet la disposition est telle que l'extrémité se déplace sur une sphère de rayon R qui est la longueur du deuxième segment. Le mouvement de l'extrémité du deuxième bras est donc similaire à celui d'un pendule sphérique, avec la spécificité que la liaison à deux axes qui est présente ici modélise une liaison rotule à doigt plutôt qu'une liaison rotule classique¹. Ceci est visible sur la figure 5.1 où l'on fait apparaître d'une part (à gauche) les liaisons mécaniques du bras et d'autre part (à droite) le repérage de l'extrémité P sur la sphère.

En désignant par u_2 et u_3 les vitesses angulaires² de ces deux segments, on peut écrire le système sous la forme $\dot{X} = f(\mathcal{X})$:

¹ La rotule à doigt possède seulement deux degré de liberté, contre trois pour la rotule.

² La pertinence de ce choix d'indices apparaîtra dans la section suivante 5.4.

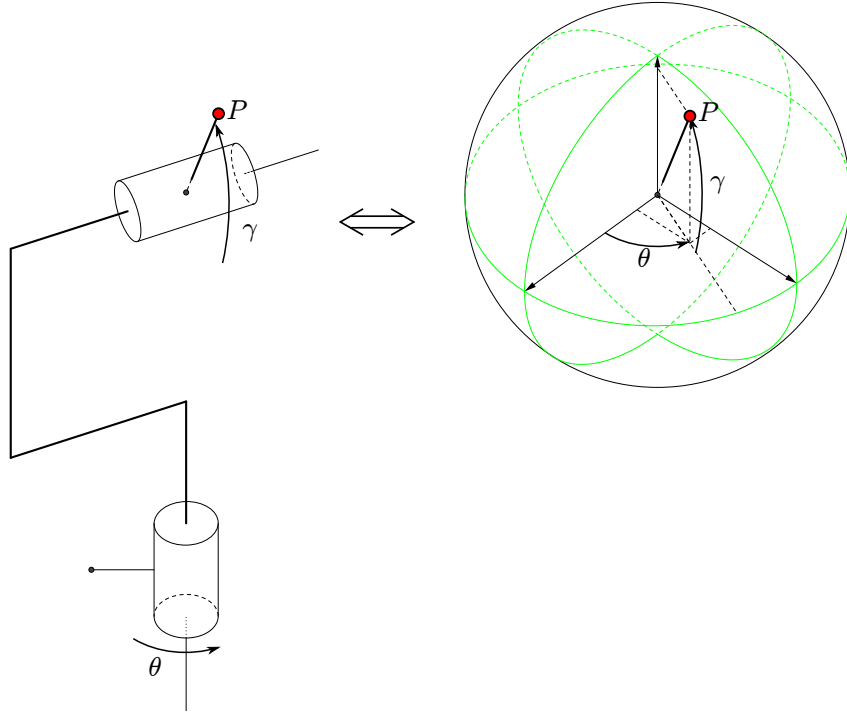


Fig. 5.1. Un bras deux axes dont l'extrémité se déplace sur une sphère

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= u_2 \\ \dot{\gamma} &= u_3.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Les variables sont telles que $(\theta, \gamma) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, $(u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$. On peut choisir comme sorties $Y = \frac{1}{R}P(\theta, \gamma) = h(\mathcal{X}) \in \mathbb{H} = \mathbb{S}_3 = \{Y \in \mathbb{R}^3, \|Y\|_2 = 1\}$, qui représente la position du point P projetée sur la sphère unité (ce qui revient à une homothétie de rapport $\frac{1}{R}$). Dans $\mathbb{R}^3$, $h(\mathcal{X})$ a 3 coordonnées, mais elle est contrainte à la sphère $\mathbb{S}_3$ qui est bien sûr une variété de dimension 2. Cela signifie qu'en dépit de la présence de trois sorties (y_1, y_2, y_3) , seules deux d'entre elles sont indépendantes pour chaque état du système. On conservera néanmoins cette description-ci pour ne pas avoir à distinguer différents cas suivant la position des sorties sur la sphère.

Pour deux trajectoires (Y, Z) incluses dans $\mathbb{H}$ définies sur $[t_0, t_f]$, on définit la distance d dans l'espace des trajectoires des sorties :

$$d(Y, Z) = \|Y(t) - Z(t)\|_\infty + \|\dot{Y} - \dot{Z}\|_\infty.$$

Proposition 5.2. $\mathbb{M}_0 = \{(\mathcal{X}), \cos \gamma = 0\} = \{(\mathcal{X}), \gamma \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{[2\pi]}\}$ est G -singulière pour le système (5.3) par rapport à Y et d avec un saut π .

Preuve. Introduisons des notations compatibles avec les hypothèses de la proposition 4.5 :

- $\mathbb{E} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \mathbb{E} \times \mathbb{F}$, $\mathbb{H} = h(\mathcal{E}) = \mathbb{S}^3$,
- $\mathcal{X} = (\theta, \gamma, u_2, u_3)$ et $\mathcal{Y} = (Y, \dot{Y})$,
- $\mathbb{M}_- = \{\mathcal{X}, \cos \gamma > 0\} = \{\mathcal{X}, \gamma \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\pmod{[2\pi]}\}$,
- $\mathbb{M}_+ = \{\mathcal{X}, \cos \gamma < 0\} = \{\mathcal{X}, \gamma \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\pmod{[2\pi]}\}$,
- $\mathbb{M}_0 = \overline{\mathbb{M}_-} \cap \overline{\mathbb{M}_+}$,
- $\mathbb{K}_0 = \{\mathcal{Y}, (y_1, y_2) = (0, 0)\} = \{\mathcal{Y}, |y_3| = 1\}$ qui est de codimension 2,

f et h sont bien de classe C^∞ et définissent de manière implicite un système différentiellement plat, ce que l'on peut traduire aisément par le biais de la fonction suivante :

$$\psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} Y - h(\mathcal{X}) \\ \dot{Y} - \frac{\partial h}{\partial \mathcal{X}} f(\mathcal{X}) \end{pmatrix}$$

On constate que $\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}}$ n'est pas de plein rang, si et seulement si $\cos \gamma = 0$, c'est à dire si $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_0$.

Sur $\mathbb{M}_-$ et $\mathbb{M}_+$ on peut alors définir :

$$\begin{aligned} \phi_-(\mathcal{Y}) &= \begin{pmatrix} \text{atan}_2(y_2, y_1) \pmod{[2\pi]} \\ \text{asin}(y_3) \pmod{[2\pi]} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \\ \frac{\dot{y}_3}{\sqrt{1 - y_3^2}} \end{pmatrix} \\ \phi_+(\mathcal{Y}) &= \begin{pmatrix} \text{atan}_2(y_2, y_1) + \pi \pmod{[2\pi]} \\ \pi - \text{asin}(y_3) \pmod{[2\pi]} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \\ -\frac{\dot{y}_3}{\sqrt{1 - y_3^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La différence entre les deux fonctions $\phi_{-,X}$ et $\phi_{+,X}$ est toujours sujette à un saut évident de π , ce qui permet d'appliquer 4.5. $\square$

On peut constater que contrairement au cas du rail rotatif ou du robot unicycle, la surface G -singulière n'est pas connexe, elle est séparée en deux surfaces connexes, correspondant aux deux valeurs $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$. Cette non connexité fait que l'on pourrait très bien considérer chaque composante connexe comme une surface G -singulière. Dans l'espace des sorties, on retrouve ce "dédoublément", correspondant aux deux pôles de la sphère. Cependant, ce dédoublément disparaîtrait dans l'espace des sorties, si l'on ne s'intéressait qu'aux variables de

sorties (y_1, y_2) . La propriété de singularité de saut serait en effet toujours présente, et M_0 resterait inchangée, en revanche ce choix de sorties correspond à la projection de la sphère dans son plan équatorial, ce qui donne bien sûr pour K_0 un seul point, le projeté des deux pôles de la sphère³.

En outre la comparaison de cet exemple avec celui du rail montre à quel point les singularités de saut sont liées au choix des sorties, puisqu'il n'y a, du point de vue de l'état, que très peu de différence entre les systèmes (1.2) et (5.3). L'unique différence est dans la nature de $\mu \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, mais on a choisi de définir γ de la sorte, uniquement par commodité, et pour refléter au mieux la nature angulaire de γ . Un choix du type $\gamma \in \mathbb{R}$ aurait conduit à une infinité de singularités, correspondant à la translation de M_0 de tous les multiples entiers de 2π .

5.4 Extension combinée du bras sphérique et du rail rotatif

Nous allons considérer ici un système qui présente simultanément une singularité semblable à celle du rail rotatif et une autre semblable à celle du bras à deux axes présenté dans la section précédente. Mécaniquement parlant, on s'intéresse à un bras de robot muni de deux axes comme précédemment, mais sur lequel on place un objet ponctuel mobile, en translation le long du bras. Le point mobile a pour coordonnées dans l'espace :

$$P(r, \theta, \gamma) = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \gamma \\ \sin \theta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix},$$

où θ et γ conservent la même définition et r correspond à la position le long du second segment. On considèrera que le segment est symétrique par rapport à l'origine, ce qui laisse à r la possibilité de changer de signe. Ce système contient alors les équations (5.3) plus celle décrivant la translation du point :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u_1 \\ \dot{\theta} &= u_2 \\ \dot{\gamma} &= u_3 \end{aligned} \tag{5.4}$$

u_1 désignant la vitesse algébrique le long du segment. Les variables sont telles que $(r, \gamma, \theta) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. On s'intéresse aux sorties donnant la position de P dans l'espace : $Y = P(r, \theta, \gamma) = h(\mathcal{X}) \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^3$.

³ On peut ajouter que ces sorties plates conduisent à l'ajout d'une singularité de platitude qui n'est pas une singularité de saut pour les hypersurfaces d'équations $\gamma = 0 \quad [\pi]$, correspondant à $y_1^2 + y_2^2 = 1$, c'est à dire l'équateur de la sphère.

Proposition 5.3. *Les deux surfaces $\mathbb{M}_{01} = \{(r, \theta, \gamma, u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{E}, r = 0\}$ et $\mathbb{M}_{02} = \{(r, \theta, \gamma, u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{E}, \cos \gamma = 0\}$ sont G -singulières pour le système 5.4, par rapport aux sorties Y et à la distance d , avec à chaque fois un saut de π .*

Preuve. Pour constater qu'il y a bien des G -singularités, on pourrait essayer d'appliquer 2 fois la proposition 3.5 : une fois sur la partie du système similaire au rail rotatif, et une autre fois sur celle contenant le bras sphérique. Même si cette démonstration est faisable moyennant certaines précautions, il est plus rapide ici d'utiliser le résultat concernant les systèmes différentiellement plats.

On procède comme pour le robot précédent :

- $\mathbb{E} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \mathbb{E} \times \mathbb{F}$, $\mathbb{H} = h(\mathcal{E}) = \mathbb{S}^3$,
- $\mathcal{X} = (r, \theta, \gamma, u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{Y} = (Y, \dot{Y})$,
- on a 4 ouverts $\mathbb{M}_i$ où le système est différentiellement plat :
 $\mathbb{M}_{\delta_1\delta_2} = \{\mathcal{X}, \delta_1 r > 0, \delta_2 \cos \gamma > 0\}$, pour $(\delta_1, \delta_2) \in \{-, +\}^2$
- entre une paire $\mathbb{M}_{\delta_1\delta_2}$ et $\mathbb{M}_{\epsilon_1\epsilon_2}$ on a une interface $\mathbb{I}_{\epsilon_1\epsilon_2}^{\delta_1\delta_2} = \overline{\mathbb{M}}_{\delta_1\delta_2} \cap \overline{\mathbb{M}}_{\epsilon_1\epsilon_2}$,
- $\mathbb{K}_{01} = \{\mathcal{Y}, (y_1, y_2) = (0, 0)\}$ est de codimension 2.
- $\mathbb{K}_{02} = \{\mathcal{Y}, (y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)\}$ est de codimension 3.

f et h sont bien de classe C^∞ et définissent de manière implicite un système différentiellement plat, ce que l'on peut traduire aisément par le biais de la fonction suivante :

$$\psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} Y - h(\mathcal{X}) \\ \dot{Y} - \frac{\partial h}{\partial \mathcal{X}} f(\mathcal{X}) \end{pmatrix}$$

On constate que $\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}}$ n'est pas de plein rang, si et seulement si $r \cos \gamma = 0$, c'est à dire si $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_{01}$ ou $\mathcal{X} \in \mathbb{M}_{02}$.

Sur les quatre $\mathbb{M}_{\delta_1\delta_2}$ on peut alors définir :

$$\phi_{\delta_1\delta_2}(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} \delta_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \\ \text{atan}_2(\delta_1 \delta_2 (y_2, y_1)) [2\pi] \\ \pi \frac{1-\delta_2}{2} + \delta_2 \text{asin}(\delta_1 \frac{y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}) [2\pi] \\ \delta_1 \frac{y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2 + y_3 \dot{y}_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - y_1 \dot{y}_2}{y_1^2 + y_2^2} \\ \frac{\dot{y}_3 (y_1^2 + y_2^2) - y_3 (y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}^3} \end{pmatrix}.$$

Il est très clair que la différence de deux de ces fonctions entraîne un saut d'au moins π .

On peut donc appliquer la proposition 4.5.

□

Le chapitre que nous achevons nous a surtout permis de nous familiariser avec les notations, définitions, concepts et propriétés introduits dans les

trois chapitres précédents, et de constater en outre l'existence de systèmes mécaniques possédant les caractéristiques étudiées dans cette thèse. Le chapitre suivant approfondit plus encore l'application de ces principes sur un système dynamique plus complexe que les précédents.

Le robot à plusieurs roues orientables et motrices

Notation :	Description
$(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$	: repère du plan
$\vec{z}_0$	: verticale ascendante
r	: nombre de roues du robot
P	: point de référence du robot
(x_1, x_2)	: coordonnées de P dans le plan
$(\vec{x}_R, \vec{y}_R)$	: base attachée au robot
θ	: angle d'orientation du robot dans le plan
R_i	: centre de la $i^{\text{ième}}$ roue
(a_i, b_i)	: coordonnées cartésiennes de R_i par rapport au robot
(ρ_i, α_i)	: coordonnées polaires de R_i par rapport au robot
$(\vec{x}_i, \vec{y}_i)$	: base attachée à la roue i
β_i	: orientation de la $i^{\text{ième}}$ roue par rapport au robot
u_i	: $\dot{\beta}_i$ vitesse d'orientation de la roue i par rapport au robot
v_i	: vitesse (scalaire) de R_i par rapport au plan
$\vec{V}$	: vitesse $\vec{V}$ de P par rapport au plan
(V_1, V_2)	: projection de la vitesse $\vec{V}$ de P sur $(\vec{x}_R, \vec{y}_R)$
$\mathcal{V}$	: $\dot{=}(V_1, V_2, \dot{\theta})$, vecteur des variables de vitesses de translation et de rotation
$\hat{V}$	: valeur scalaire de $\mathcal{V}$
β	: $\dot{=}(\beta_1, \dots, \beta_r)$
U	: $\dot{=}(u_1, \dots, u_r)$
V	: $\dot{=}(v_1, \dots, v_r)$

Notation :	Description
$G_i : \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_i \\ 0 & 1 & a_i \end{bmatrix}$	
$G : \doteq [G_1 \dots G_r]^T$	
$f_i(\beta_i, v_i) : \doteq \begin{bmatrix} -v_i \sin \beta_i \\ v_i \cos \beta_i \end{bmatrix}$	
$F(\beta, V) : \doteq [f_1 \dots f_r]^T$	
$H_i : \doteq [\cos \beta_i \quad \sin \beta_i \quad a_i \sin \beta_i - b_i \cos \beta_i]$	
$H(\beta) : \doteq [H_1 \dots H_r]^T$	
$\mathcal{M}$:	variété de contrainte des β_i
$\mu(\beta)$:	fonction décrivant implicitement $\mathcal{M}$
$\mathcal{K}(\beta)$:	définit le direction de V pour $\beta \in \mathcal{M}$
$\tilde{H}_i : \doteq [\sin \beta_i \quad -\cos \beta_i]$	
$\tilde{H}(\beta) : \doteq [\tilde{H}_1 \dots \tilde{H}_r]^T$	
$C : \doteq [a_1 \sin \beta_1 - b_1 \cos \beta_1 \dots a_r \sin \beta_r - b_r \cos \beta_r]$	
I :	centre instantané de rotation
(x_I, y_I) :	coordonnées cartésiennes de I par rapport au robot
$X_I = \doteq (x_I, y_I)$	
$\bar{I}$:	projection stéréographique de I
$\bar{R}_\infty$:	“pôle nord” de la sphère de Riemann
$p_i, \bar{p}_i$:	critères de traversée d’une surface G -singulière
$\xi : \doteq (x_1, x_2, \theta)^T$	
a :	distance entre P et R_1 pour le robot à deux roues
I_-, I_+ :	limites de I proche de l’axe $(R_1 R_2)$ pour le robot à deux roues
X :	variables d’état
$Y : \doteq (y_1, \dots, y_m)$	vecteur des sorties plates
f :	fonction définissant la dynamique d’un système
h :	fonction définissant les sorties plates
$\mathcal{X} : \doteq (X, U)$	
$\mathcal{Y} : \doteq (Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$	vecteur des sorties plates et leurs dérivées
$\delta_i, \gamma_i, \epsilon$:	signe ($= \pm 1$)
$\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_{\delta_1 \dots}$	$\mathbf{M}_\pm$: ouverts sur lesquels le système considéré est plat
$\mathbb{I}_{\delta_1 \dots}^{\gamma_1 \dots}$	: interface entre $\mathbf{M}_{\delta_1 \dots}$ et $\mathbf{M}_{\gamma_1 \dots}$
$\mathbf{M}_0$:	surface G -singulière
$v, \omega, \hat{v}, \hat{\omega}$:	paramètres d’une de famille trajectoires du robot

Ce chapitre étudie dans le détail l’existence de singularités de saut dans le système dynamique représentant la cinématique d’un robot à plusieurs roues orientables et motrices, avec une contrainte de roulement sans glissement. En

réalité ce robot a été le point de départ de la réflexion qui a conduit à la définition de singularités de saut. Comme cela apparaît dans la suite, on peut considérer que ce système contient quasiment tous les types de singularités présentées dans les exemples du chapitre précédent.

Les robots à plusieurs roues orientables ont été étudiés par plusieurs auteurs. Ce type de robot apparaît dans la classification des différents types de robots mobiles à roues d'après leur mobilité, définie par Campion et al dans [7]. D'autres propriétés structurelles et cinématiques ont été approfondies par Thuilot [42]-[43] et Motte [28] qui proposent également des lois de commande pour ces robots. Les travaux récents de Gracia et al [18] présentent une analyse de ces robots parmi d'autres, dans le contexte de singularités cinématiques dues à la présence de roues castor ou de roues suédoises.

Dans un premier temps, on décrit les contraintes cinématiques qui s'appliquent au robot en cas de roulement sans glissement. Ces contraintes font apparaître une hiérarchie dans leur application et sont classées de ce fait en deux groupes. La première catégorie de contraintes est résumée sous le vocable "contrainte de coordination" et s'applique exclusivement aux angles d'orientation des roues. Elle fait l'objet d'une étude particulière en tant que sous-système de l'ensemble du robot dans le cas des robots possédant au moins trois roues. Cette étude montre qu'il peut y avoir des singularités de saut si l'on décrit ce sous-système à l'aide de sorties plates reflétant une notion généralisée de centre instantané de rotation.

Ensuite on examine le système dynamique complet du robot dans le cas le plus simple analytiquement, c'est à dire avec seulement deux roues. Les singularités de saut du système complet sont décrites en détail dans cette section-là ainsi que le type de trajectoires correspondant à leur traversée. On constate des similitudes entre les singularités de la contrainte de coordination et celles du comportement complet du robot.

Aussi bien concernant la contrainte de coordination que pour le système complet, l'essentiel des singularités de saut coïncide avec le passage du centre instantané de rotation par le centre de l'une des roues.

6.1 Description géométrique et cinématique du robot

Tout d'abord, nous commençons par décrire le robot de manière générale en nous appuyant essentiellement sur la description proposée dans la thèse d'Isabelle Motte pour un robot quelconque avec un nombre r de roues orientables. Dans un second temps nous développerons les calculs liés aux problèmes spécifiques abordés dans le présent ouvrage en nous restreignant au cas où $r = 2, 3$, qui sont les plus élégants à présenter, non seulement parce que les calculs sont un peu plus légers, mais aussi parce que cela permet des interprétations graphiques que l'on ne peut représenter dans des dimensions supérieures.

6.1.1 Définition des contraintes cinématiques

Nous considérons, comme cela est fait très souvent, des robots “parfaits” du point de vue cinématique, c’est à dire tels que le contact entre chacune des roues et le sol est ponctuel et vérifie la contrainte de roulement sans glissement. Le plan étant muni d’un repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et le robot d’un repère $(P, \vec{x}_R, \vec{y}_R)$, avec les relations :

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= x_1 \vec{x}_0 + x_2 \vec{y}_0 \\ \vec{x}_R &= \cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0 \\ \vec{y}_R &= -\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

On retrouve ces notations pour le robot à trois roues orientables sur la figure 6.1. Les roues étant orientables, elles disposent de deux axes de rotations, l’un

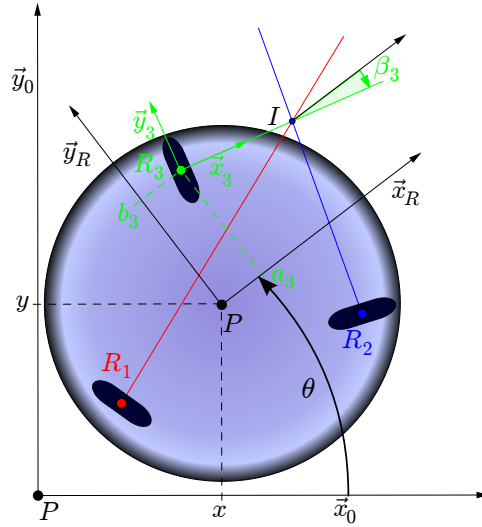


Fig. 6.1. Un robot à trois roues orientables

horizontal pour le roulement, l’autre vertical pour l’orientation. La position de chacune des roues est donnée par les coordonnées (a_i, b_i) de son point de contact R_i avec le sol dans $(P, \vec{x}_R, \vec{y}_R)$. Ce point coïncide avec l’axe vertical de rotation de la roue. Le point R_i pourra également être décrit par ses coordonnées polaires, (ρ_i, α_i) , où¹ $\rho_i > 0$.

Sur chaque roue i on place un repère $(R_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$, de sorte que le vecteur $\vec{x}_i$ a la même direction que l’axe horizontal de la roue. Du fait du roulement

¹ On ne considère pas les cas où P serait confondu avec l’une des roues, pour éviter des cas particuliers de calculs.

sans glissement, la vitesse instantanée de la roue i par rapport au sol est dirigée selon le vecteur $\vec{y}_i$. On notera donc cette vitesse par le scalaire v_i , son signe étant défini par rapport à l'axe $(R_i, \vec{y}_i)$. De plus, l'orientation de la roue i est donnée par l'angle β_i , qui est l'angle de rotation $(\vec{x}_R, \vec{x}_i)$ de la roue par rapport au robot. La vitesse d'orientation u_i de cette roue est la dérivée de cet angle : $u_i = \dot{\beta}_i$.

Appelons $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point P dans le plan. Ce vecteur se décompose dans le repère du robot de la manière suivante :

$$\vec{V} = V_1 \vec{x}_R + V_2 \vec{y}_R. \quad (6.2)$$

Le robot étant un solide indéformable, la relation entre la vitesse $\vec{V}$ du point P et la vitesse du centre R_i de la roue i est telle que :

$$\vec{V} = \vec{V}(R_i) + \overrightarrow{PR_i} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 \quad (6.3)$$

où $\vec{z}_0$ est le vecteur unitaire dirigé selon la verticale ascendante et $\wedge$ désigne le produit vectoriel. Cette égalité implique une contrainte cinématique entre les β_i et les v_i des différentes roues. Cette contrainte est active pour tout i .

En projetant (6.3) sur la base $(\vec{x}_R, \vec{y}_R)$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_i \\ 0 & 1 & a_i \end{bmatrix} \mathcal{V} = \begin{bmatrix} -v_i \sin \beta_i \\ v_i \cos \beta_i \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

où $\mathcal{V}$ est le vecteur contenant les trois composantes $(V_1, V_2, \dot{\theta})$ de la vitesse du robot en tant que solide par rapport au plan (dans le repère lié au robot).

Posons $G_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_i \\ 0 & 1 & a_i \end{bmatrix}$ et $f_i(\beta_i, v_i) = \begin{bmatrix} -v_i \sin \beta_i \\ v_i \cos \beta_i \end{bmatrix}$. Ensuite posons $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{bmatrix}$

et $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix}$. On obtient l'égalité :

$$G\mathcal{V} = F(\beta, V), \quad (6.5)$$

où l'on a noté $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ et $V = (v_1, \dots, v_r)$. Comme $r \geq 2$ et que les roues ne sont bien sûr pas confondues, on peut montrer aisément que la matrice constante G de dimensions $2r \times 3$ est de plein rang².

L'ensemble des contraintes cinématiques dérive de l'équation (6.5) sous la forme :

$$F(\beta, V) \in \text{Im}G. \quad (6.6)$$

² La démonstration de cette propriété est faite dans l'annexe 9.2.

En effet d'après (6.5) il existe un vecteur vitesse $\mathcal{V}$ si et seulement si (6.6) est vérifiée. Dans ce cas on a :

$$\mathcal{V} = (G^T G)^{-1} G^T F(\beta, V), \quad (6.7)$$

qui est l'expression de la vitesse du robot en fonction des angles β_i des roues et des vitesses v_i de celles-ci.

6.1.2 Hiérarchisation des contraintes

Jusque là les variables angulaires β_i et les vitesses v_i sont “mélangées”. Au contraire des premières, les secondes proviennent de manière intrinsèque d'une dérivation par rapport au temps. De ce fait parvenir à hiérarchiser les $2r - 3$ contraintes (6.6) en relation avec cette différence de nature présente un grand intérêt. Dans ce but on tire de (6.4)

$$\cos \beta_i V_1 + \sin \beta_i V_2 + (a_i \sin \beta_i - b_i \cos \beta_i) \dot{\theta} = 0 \quad (6.8)$$

d'où l'on obtient :

$$H(\beta) \mathcal{V} = 0, \quad (6.9)$$

avec $H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_r \end{bmatrix}$ et $H_i = [\cos \beta_i \quad \sin \beta_i \quad a_i \sin \beta_i - b_i \cos \beta_i]$. Cette formu-

lation fait apparaître que $\mathcal{V} \in \ker H$. Lorsque le robot est en mouvement³ cela implique que H n'est pas de plein rang :

$$\text{rg } H \leq 2. \quad (6.10)$$

Cependant, comme on peut montrer que le rang de H ne peut pas être inférieur à 2, la variété à laquelle β appartient est donc :

$$\mathcal{M} = \{\beta \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^r, \text{rg } H(\beta) = 2\}. \quad (6.11)$$

Rappelons que d'un point de vue strictement cinématique la contrainte $\beta \in \mathcal{M}$ n'est active que lorsque $\mathcal{V} \neq 0$. Cependant, tant cette contrainte n'est pas vérifiée, le robot est condamné à l'immobilité. En conséquence, de façon à permettre la mise en mouvement du robot à tout instant, nous imposerons cette contrainte même lorsque le robot est à l'arrêt ($\mathcal{V} = 0$). $H(\beta)$ étant de dimensions $r \times 3$, dire que $\text{rg } H = 2$ revient à trouver $r - 2$ contraintes linéaires sur les lignes de H . Ainsi, sur les $2r - 3$ contraintes cinématiques, $r - 2$ concernent exclusivement β , indépendamment de V et se traduisent par l'appartenance de

³ c'est à dire $\mathcal{V} \neq 0$. En effet, si $\mathcal{V} = 0$, l'égalité (6.9) est automatiquement vérifiée et β n'est pas contraint.

β à la variété $\mathcal{M}$ qui est de dimension 2.

Lorsque ces contraintes sont vérifiées, l'ensemble des vecteurs $\mathcal{V}$ vérifiant (6.9) est une droite, puisque le noyau de H est de dimension 1. Ainsi, si l'on se donne un vecteur unitaire de $e(\beta)$ de cette droite, il existe un réel $\widehat{V}$ tel que $\mathcal{V} = \widehat{V}e(\beta)$.

La relation (6.8) ne reprend qu'une partie de (6.4). Pour qu'il y ait équivalence il faut tirer de cette dernière une équation supplémentaire, par exemple pour la roue i :

$$-\sin \beta_i V_1 + \cos \beta_i V_2 + (a_i \cos \beta_i - b_i \sin \beta_i) \dot{\theta} = v_i. \quad (6.12)$$

ce qui revient pour les r roues à

$$K(\beta)\mathcal{V} = V, \quad (6.13)$$

où $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_r \end{bmatrix}$ et $K_i = [-\sin \beta_i \quad \cos \beta_i \quad a_i \cos \beta_i + b_i \sin \beta_i]$. D'après ce qui précède, on peut réécrire (6.13) en

$$V = \widehat{V}K(\beta)e(\beta) \quad (6.14)$$

Cela signifie que, une fois déterminé $\beta \in \mathcal{M}$, le vecteur V est dans la direction du vecteur $K(\beta)e(\beta)$, et le rapport des normes entre ces deux vecteurs est la norme $|\widehat{V}|$ du vecteur vitesse $\mathcal{V}$ du robot. En d'autres termes, de même que β appartient à la variété $\mathcal{M}$ de dimension deux, V appartient à la droite

$$\mathcal{K}(\beta) = \{\widehat{V}K(\beta)e(\beta) | \widehat{V} \in \mathbb{R}\}. \quad (6.15)$$

Cette dernière condition, qui fixe le choix de V à un espace de dimension un, est équivalente à un ensemble de $r - 1$ contraintes sur (β, V) complétant les $r - 2$ contraintes de (6.11) en $2r - 3$ équivalentes à (6.6).

Résumons-nous :

$$G\mathcal{V} = F(\beta, V) \Leftrightarrow \begin{cases} H(\beta)\mathcal{V} = 0 \\ K(\beta)\mathcal{V} = V \end{cases}, \quad (6.16)$$

et

$$F(\beta, V) \in \text{Im}G \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \in \mathcal{M} \\ V \in \mathcal{K}(\beta) \end{cases}, \quad (6.17)$$

qui reflètent bien une hiérarchie entre les contraintes sur β qui sont indépendantes de V et celles sur V que l'on peut imposer une fois β défini. Cette

hiérarchie est importante et assez intuitive finalement, puisque la contrainte sur β que nous dénommerons dorénavant “contrainte de coordination” reflète comme nous le verrons dans la section suivante le lien entre la présence du centre instantané de rotation et les angles β_i des roues, tandis que la contrainte sur V signifie que, une fois le centre instantané de rotation déterminé, il ne reste qu’un degré de liberté dans le mouvement instantané qui est l’amplitude (et le signe) de la vitesse de rotation autour de ce centre et qui se traduit par une relation de proportionalité entre les valeurs de vitesses v_i des roues.

6.1.3 Le centre instantané de rotation et sa projection stéréographique

La définition de $\mathcal{M}$ impose qu’il existe une combinaison linéaire nulle des trois colonnes de H à chaque instant du mouvement. Deux cas de figures peuvent avoir lieu.

1. Si la composante de rotation du robot n’est pas nulle, c’est à dire si $\dot{\theta} \neq 0$, on peut diviser la relation (6.8) par $\dot{\theta}$, et en définissant le point I du plan par ses coordonnées $(x_I, y_I) = (-\frac{V_2}{\dot{\theta}}, \frac{V_1}{\dot{\theta}})$ dans le repère $(P, \vec{x}_R, \vec{y}_R)$, on peut écrire :

$$\sin \beta_i (a_i - x_I) = \cos \beta_i (b_i - y_I) \quad (6.18)$$

Cette égalité montre que I est le point de concours des axes de roulement des roues $(R_i, \vec{x}_i)$: I est le centre instantané de rotation du robot. Du point de vue de la matrice H , on a exprimé la troisième colonne en fonction des deux premières, à l’aide des coefficients $-y_I$ et x_I . Ainsi, posant

$$\begin{aligned} -\tilde{H} &= \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 \\ \vdots \\ \tilde{H}_r \end{bmatrix}, \text{ où } \tilde{H}_i = [\sin \beta_i \quad -\cos \beta_i] \\ -\text{et } C &= \begin{bmatrix} a_1 \sin \beta_1 - b_1 \cos \beta_1 \\ \vdots \\ a_r \sin \beta_r - b_r \cos \beta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ \vdots \\ \rho_r \sin(\beta_r - \alpha_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

les coordonnées $X_I = (x_I, y_I)$ de I sont telles que⁴ :

$$X_I = (\tilde{H}^T \tilde{H})^{-1} \tilde{H}^T C \quad (6.19)$$

⁴ On trouvera une description plus complète des matrices impliquées dans les équations suivantes à l’annexe 9.2

$$\begin{aligned}
x_I &= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq r} \sin(\beta_i - \beta_j) (\rho_i \sin(\beta_i - \alpha_i) \cos \beta_j - \rho_j \sin(\beta_j - \alpha_j) \cos \beta_i)}{\sum_{1 \leq i < j \leq r} \sin^2(\beta_i - \beta_j)} \\
y_I &= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq r} \sin(\beta_i - \beta_j) (\rho_i \sin(\beta_i - \alpha_i) \sin \beta_j - \rho_j \sin(\beta_j - \alpha_j) \sin \beta_i)}{\sum_{1 \leq i < j \leq r} \sin^2(\beta_i - \beta_j)} \quad (6.20)
\end{aligned}$$

2. Si $\dot{\theta} = 0$, le centre instantané de rotation n'est pas défini, on ne dispose que de sa "direction"⁵ donnée par $(-V_2, V_1)$ dans le repère du robot puisque l'on a pour chaque roue i :

$$\cos \beta_i V_1 + \sin \beta_i V_2 = 0 \quad (6.21)$$

qui montre que tous les β_i sont égaux modulo π .

Cette description a l'avantage de présenter une interprétation cinématique claire, son inconvénient principal en revanche est que l'on doit distinguer les cas d'annulation de $\dot{\theta}$.

Pour éviter l'inconvénient de devoir distinguer le cas des roues parallèles, et permettre une définition du centre instantané de rotation qui soit valable dès que $\beta \in \mathcal{M}$, on peut considérer la projection stéréographique du plan lié au robot, sur une sphère centrée en P . Le projeté du centre instantané de rotation est défini même quand les roues sont parallèles, dans ce cas, c'est le "pôle nord" de la sphère. En revanche, on perd la capacité à définir la direction "à l'infini" du centre instantané de rotation lorsque son projeté est au pôle. Cette description est représentée sur la figure 6.2.

Géométriquement, la projection stéréographique consiste simplement à définir le segment joignant un point du plan au pôle nord de la sphère : le projeté du point du plan sur la sphère est le point d'intersection du segment avec la sphère. Ainsi, tout le plan est projeté sur la sphère et le pôle nord correspond aux points "à l'infini".

Le nom généralement utilisé pour désigner cette surface de projection est "la sphère de Riemann" que nous noterons $\mathbb{S}_3$, comme cela est de coutume pour la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$.

Le lien entre le point I de coordonnées (x_I, y_I) du plan et sa projection stéréographique $\bar{I}$ de coordonnées $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}_3$ est tel que :

⁵ On dit parfois que le centre instantané de rotation est "à l'infini".

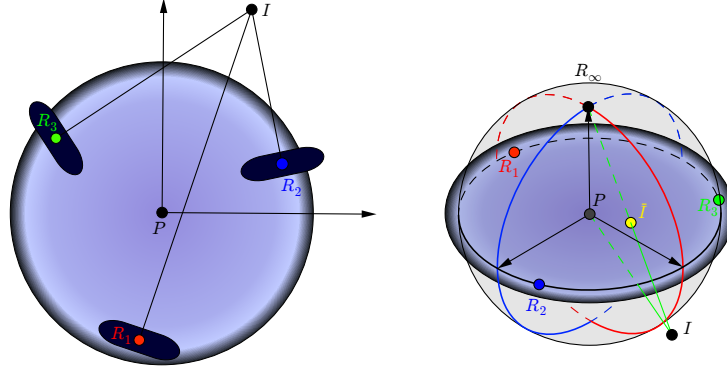


Fig. 6.2. A gauche : définition du centre instantané de rotation comme point de concours des axes des roues. A droite : projection stéréographique du centre instantané de rotation sur une sphère centrée en P .

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_I}{x_I^2 + y_I^2 + 1}, \frac{2y_I}{x_I^2 + y_I^2 + 1}, \frac{x_I^2 + y_I^2 - 1}{x_I^2 + y_I^2 + 1} \right) \quad (6.22)$$

$$(x_I, y_I) = \left(\frac{y_1}{1 - y_3}, \frac{y_2}{1 - y_3} \right) \quad (6.23)$$

De la même manière, on peut associer à chaque centre de roue R_i un point $\bar{R}_i$ sur $\mathbb{S}_3$. Enfin il est clair que l'image $\bar{P}$ de P par la même projection donne le “pôle sud” de la sphère, tandis que l’on notera $\bar{R}_\infty$ l’image “des points à l’infini” qui est le pôle nord de la sphère de Riemann.

Le calcul de (y_1, y_2, y_3) en fonction des β se fera en pratique plutôt à partir de l’insertion de (6.20) dans (6.22). Il n’est cependant pas évident que la fonction obtenue soit prolongeable par continuité en une fonction qui soit lisse lorsque les β_i sont égaux entre eux modulo π . Ceci est néanmoins vrai et démontré dans l’annexe 9.3. Quoiqu’il en soit l’expression analytique de cette fonction étant assez peu compacte, en notant $Y = (y_1, y_2, y_3)$ nous écrirons seulement :

$$Y = h(\beta). \quad (6.24)$$

6.2 Cinématique de la contrainte de coordination pour le robot à $r \geq 3$ roues

Pour le robot à deux roues, la contrainte de coordination est bien entendu automatiquement satisfaite, et n’a donc pas d’utilité, en revanche elle garde tout son sens avec un nombre plus important de roues. Après une introduction

sur le cas général, pour simplifier les calculs, nous ne proposons dans la section suivante que l'étude que du robot à trois roues.

6.2.1 Présentation Générale

D'après l'égalité (6.9), la contrainte de coordination qui lie entre eux les angles β n'est en théorie active que lorsque le robot est en mouvement, c'est à dire lorsque $\mathcal{V} \neq 0$. Dans ce cas là, on a vu qu'elle se traduit par l'appartenance de β à la variété $\mathcal{M}$. En revanche, à l'arrêt du robot, on a $\mathcal{V} = 0$, qui implique également par (6.13) que $V = 0$ et donc que la vitesse v_i de chaque roue est nulle, mais qui laisse libre β . Cependant, comme nous l'avons déjà expliqué, on choisira tout de même de respecter la contrainte $\beta \in \mathcal{M}$ de façon à ce que le mouvement du robot puisse reprendre à tout instant. On cherchera donc à imposer cette contrainte, lorsque le robot ne bouge pas mais que l'on souhaite changer la configuration des roues avant de repartir, ce qui est une pratique courante dans le cas de manœuvres.

De plus, lorsque le robot est en mouvement, on a vu qu'il est possible de hiérarchiser les contraintes cinématiques, permettant d'isoler le comportement des β_i . En outre on a défini la vitesse d'orientation de chaque roue par $u_i = \dot{\beta}_i$. De ce fait le vecteur U de ces vitesses angulaires est tel que $U \in T_\beta \mathcal{M}$. On peut donc considérer indépendamment du reste du robot le système :

$$\dot{\beta} = U, \quad (\beta, U) \in T\mathcal{M}, \quad (6.25)$$

où β apparaît comme les variables d'état, U les entrées et où l'on peut reprendre la notation $\mathcal{X} = (\beta, U) \in \mathcal{E} = T\mathcal{M}$.

Dans le cas de manœuvres notamment, on s'intéresse finalement plus à la position du centre instantané de rotation I qu'à celle des roues. Ainsi on pourrait choisir de prendre les coordonnées de ce point comme sorties du système. Néanmoins, comme nous l'avons indiqué, un problème apparaît lorsque I se trouve "à l'infini". On va donc plutôt considérer sa projection stéréographique $\bar{I}$ sur la sphère de Riemann $\mathbb{S}_3$ centrée en P , comme cela est proposé page 79 et décrit sur la figure 6.2. Ces sorties Y sont reprises dans l'équation (6.24).

Avant d'aller plus loin, précisons ce qu'est $\mathcal{E}$ analytiquement parlant.

6.2.2 Description de la dynamique de coordination quand $r = 3$

Comme annoncé, nous nous restreignons au cas $r = 3$, par souci de simplicité, cependant le lecteur intéressé par un nombre de roues plus important peut se reporter à l'annexe 9.4 pour un complément.

Lorsque le robot est muni d'exactly trois roues, la matrice $H(\beta)$ a l'avantage d'être carrée :

$$H(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & a_1 \sin \beta_1 - b_1 \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & a_2 \sin \beta_2 - b_2 \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & a_3 \sin \beta_3 - b_3 \cos \beta_3 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Cela simplifie nettement les calculs,

$$\begin{aligned} \beta \in \mathcal{M} &\Leftrightarrow \det H(\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}_3} (a_i \sin \beta_i - b_i \cos \beta_i) \sin(\beta_{i-1} - \beta_{i+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}_3} \bar{a}_i \cos \bar{\beta}_i + \bar{b}_i \sin \bar{\beta}_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}_3} \bar{\rho}_i \cos(\bar{\beta}_i - \bar{\alpha}_i) = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

où on a posé $\bar{a}_i = a_i - a_{i-1}$, $\bar{b}_i = b_i - b_{i-1}$, $\bar{\beta}_i = \beta_{i-1} + \beta_i - \beta_{i+1}$ et où $(\bar{\rho}_i, \bar{\alpha}_i)$ sont les coordonnées polaires de $(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$. En posant $\mu(\beta) = \det H(\beta)$, la contrainte vérifiée par les u_i est ensuite :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta} U = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}_3} \bar{\rho}_i \sin(\bar{\beta}_i - \bar{\alpha}_i) \bar{u}_i = 0 \quad (6.28)$$

où $\bar{u}_i = \dot{\bar{\beta}}_i = u_{i-1} + u_i - u_{i+1}$. Ainsi, le sous-système (6.25) du robot uniquement constitué des variables d'état β et des entrées U , auquel on adjoint les sorties Y définies par (6.24), est mis sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= U \\ \mu(\beta) &= 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta} U &= 0 \\ Y &= h(\beta) \end{aligned} \quad (6.29)$$

En réalité, s'il n'y a aucune perturbation, et que $\mu(\beta) = 0$ à un instant donné, il suffit que $\frac{\partial \mu}{\partial \beta} U = 0$ soit vérifié à tout instant pour que $\mu(\beta) = 0$ le soit aussi.

6.2.3 Platitude différentielle du système (6.29)

Si $y_3 \neq 1$, on sait que le centre instantané de rotation existe et est donné par :

$$x_I = \frac{y_1}{1 - y_3}, \quad y_I = \frac{y_2}{1 - y_3}.$$

De plus, tant que I est défini et que $I \neq R_i$, c'est à dire tant que $(x_I, y_I) \neq (a_i, b_i)$ il est possible de déduire β_i à π près, par la relation (6.18). Il est donc clair que

- soit $\beta_i = \text{atan}_2(y_I - b_i, x_I - a_i)$,
- soit $\beta_i = \text{atan}_2(y_I - b_i, x_I - a_i) + \pi$,

et par continuité de β_i , une seule de ces deux expressions est nécessaire quand I est défini, entre deux passages successifs de I par R_i . Définissant la projection p_i du vecteur $\overrightarrow{R_i I}$ sur l'axe $(R_i, \overrightarrow{x}_i)$, on a la condition :

$$\beta_i = \text{atan}_2(y_I - b_i, x_I - a_i) \quad \text{si } p_i > 0 \quad (6.30)$$

$$\beta_i = \text{atan}_2(y_I - b_i, x_I - a_i) + \pi \quad \text{si } p_i < 0 \quad (6.31)$$

Bien sûr, l'inconvénient est que p_i n'est pas défini lorsque I ne l'est pas, c'est à dire lorsqu'il est à "l'infini". Comme nous ne sommes intéressés que par le signe de p_i , on peut le remplacer par $\bar{p}_i = p_i / (x_I^2 + y_I^2 + 1)$, variable qui vaut 0 lorsque I n'est pas défini, et qui a toujours le même signe que p_i . Les deux variables précédentes sont telles que :

$$p_i = (x_I - a_i) \cos \beta_i + (y_I - b_i) \sin \beta_i \quad (6.32)$$

$$\bar{p}_i = \frac{(x_I - a_i) \cos \beta_i + (y_I - b_i) \sin \beta_i}{x_I^2 + y_I^2 + 1} \quad (6.33)$$

En remplaçant dans ces deux égalités x_I et y_I par leur expression en fonction de β , $\bar{p}_i(\beta)$ est définie et continue pour tout état du système.

En posant $\mathcal{X} = (\beta, U)$, et $\mathcal{E} = \{\mathcal{X} \in T\mathcal{M}\}$, on peut alors partitionner l'espace $\mathcal{E}$ en 8 ouverts,

$$\mathbb{M}_{\delta_1 \delta_2 \delta_3} = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E} \mid \delta_1 \bar{p}_1 > 0, \delta_2 \bar{p}_2 > 0, \delta_3 \bar{p}_3 > 0\}, (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \{-, +\}^3,$$

et leurs frontières. Au sujet de ces dernières, on pourrait les noter sous la forme $\mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}$. Néanmoins, par souci de clarté nous tirerons parti du fait que seulement deux cas de figure sont possibles :

- soit un seul des trois $\bar{p}_i$ change de signe, ce qui correspond au passage du centre instantané de rotation I par le centre R_i de la roue i ,
- soit les trois changent de signe simultanément, ce qui correspond au passage de $\bar{I}$ par le "pôle" nord R_∞ de la sphère de Riemann.

Les hypersurfaces se trouvant dans la première situation n'étant caractérisées que par un seul changement de signe, on se contentera de les noter $\mathbb{I}_{\delta_1 \delta_2 \delta_3}$, avec $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \{-, 0, +\}^3$ où ces notations ne sont pas ambiguës puisqu'un seul des trois δ_i est nul. Ainsi on peut les répartir en trois groupes de quatre hyper surfaces :

- $\mathbb{I}_{0\delta_2\delta_3}$, $(\delta_2, \delta_3) \in \{-, +\}^2$,
- $\mathbb{I}_{\delta_1 0\delta_3}$, $(\delta_1, \delta_3) \in \{-, +\}^2$,
- $\mathbb{I}_{\delta_1 \delta_2 0}$, $(\delta_1, \delta_2) \in \{-, +\}^2$,

correspondant respectivement au passage de I au travers de R_1 , R_2 et R_3 , ou encore de $\bar{I}$ au travers de $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ et $\bar{R}_3$.

En revanche, le dernier groupe de quatre hypersurfaces, qui correspond au second cas de figure et au passage de $\bar{I}$ par R_∞ , doit conserver la notation

initiale $\mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}$, sinon on ne pourrait pas les distinguer puisqu'elles s'écriraient toutes $\mathbb{I}_{000}$.

Posons maintenant, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{H} = \mathbb{S}^3$ pour désigner les sorties, et $\mathcal{Y} = (Y, \dot{Y}) \in T\mathbb{H}$. Sur chaque $\mathbb{M}_{\delta_1 \delta_2 \delta_3}$, on peut définir une fonction donnant β et U en fonction de $\bar{I}$ et de sa dérivée.

$$\begin{aligned} & \phi_{\delta_1 \delta_2 \delta_3}(\mathcal{Y}) \\ &= \begin{pmatrix} \text{atan}_2(\delta_1(y_2 - b_1(1 - y_3)), y_1 - a_1(1 - y_3)) \\ \text{atan}_2(\delta_2(y_2 - b_2(1 - y_3)), y_1 - a_2(1 - y_3)) \\ \text{atan}_2(\delta_3(y_2 - b_3(1 - y_3)), y_1 - a_3(1 - y_3)) \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 + (1 - y_3)(b_1 \dot{y}_1 - a_1 \dot{y}_2) + (1 - \dot{y}_3)(a_1 y_2 - b_1 y_1)}{(y_1 - a_1(1 - y_3))^2 + (y_2 - b_1(1 - y_3))^2} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 + (1 - y_3)(b_2 \dot{y}_1 - a_2 \dot{y}_2) + (1 - \dot{y}_3)(a_2 y_2 - b_2 y_1)}{(y_1 - a_2(1 - y_3))^2 + (y_2 - b_2(1 - y_3))^2} \\ \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 + (1 - y_3)(b_3 \dot{y}_1 - a_3 \dot{y}_2) + (1 - \dot{y}_3)(a_3 y_2 - b_3 y_1)}{(y_1 - a_3(1 - y_3))^2 + (y_2 - b_3(1 - y_3))^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Le système est donc différentiellement plat avec des singularités de platitude. Montrons qu'il s'agit de singularités de saut.

6.2.4 Singularités de saut

Posons $d(Y, Y') = \|Y - Y'\|_\infty + \|\dot{Y} - \dot{Y}'\|_\infty = \|\mathcal{Y} - \mathcal{Y}'\|_\infty$.

Proposition 6.1. *Pour le système dynamique (6.29), toutes les surfaces $\mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}^{\delta_1 \delta_2 \delta_3}$ sont G -singulières par rapport aux sorties Y et à la distance d , avec un saut π .*

Preuve. Il suffit de constater qu'outre toutes les conditions liées à la platitude du système qui sont bien sûres remplies, on a bien les deux conditions suffisantes de la proposition 4.5. Il est assez clair que dans l'espace $\mathcal{H} = T\mathbb{H}$, les variétés mentionnées sont de codimension supérieure à 2. Analysons cela sous l'angle de la géométrie, si $\bar{I}$ est égal à $\bar{R}_i$, $i = 1, 2, 3, \infty$, alors, sur la sphère de Riemann qui est de dimension 2, $\bar{I}$ est contraint à rester en un point. Quelques soient les valeurs des dérivées de Y dans $T_{\bar{R}_i} \mathbb{H}$, on est restreint à une sous-variété de codimension 2.

Deuxièmement, si l'on fait la différence entre les fonctions $\phi_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, X}$ et $\phi_{\delta_1 \delta_2 \delta_3, X}$ il est clair d'après l'expression (6.34) que l'on aura un saut d'au moins π . $\square$

6.2.5 Représentation Graphique

La surface $\mathcal{M}$ est représentée sur la figure 6.3. Le repère de la figure est celui des trois angles des roues $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Signalons d'abord que comme chacune de

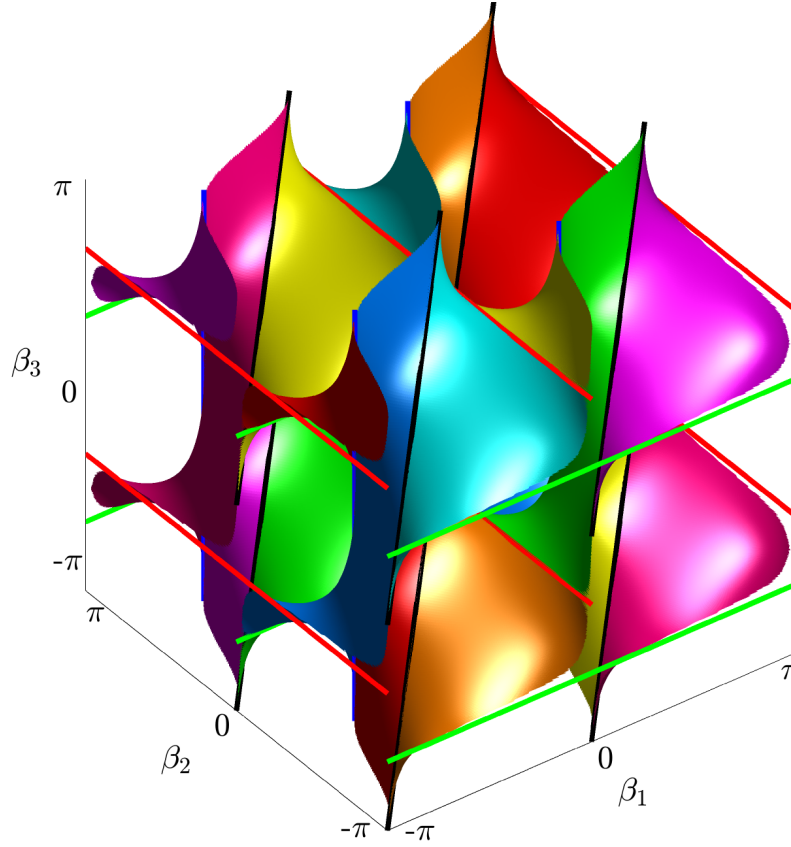


Fig. 6.3. La surface $\mathcal{M}$, avec les singularités de sauts, et les différents $\mathbb{M}_i$ en différentes couleurs, ceci pour un robot dont les roues sont en triangle équilatéral.

ces trois variables est cyclique (par sa nature angulaire) la topologie de l'espace est celle d'un hypertore, c'est à dire que chaque face du cube est identifiée avec la face opposée. Chaque couleur de la surface représente la projection d'un ouvert $\mathbb{M}_i$ sur la surface $\mathcal{M}$. Chaque relation de platitude ϕ_i permet d'établir une correspondance biunivoque entre une trajectoire dans l'un des $\mathbb{M}_i$ et une trajectoire sur la sphère de Riemann, privée des quatre points $\bar{R}_i$, $i \in \{1, 2, 3, \infty\}$. A chacun des quatre points sur la sphère correspond un ensemble de droites parallèles sur la figure. Trois des directions de droites correspondent au passage de I par le centre de chacune des roues :

- en vert, les droites parallèles à l’axe de β_1 signifient que pour cette configuration du couple (β_2, β_3) la valeur de β_1 est libre, ce qui est bien le sens cinématique du passage de I par R_1 ,
- en rouge, les droites parallèles à l’axe de β_2 jouent le même rôle pour β_2 ,
- en bleu, on a les mêmes conclusions pour β_3 .

En revanche, la dernière direction en noir, correspond au passage de $\bar{I}$ par $\bar{R}_\infty$, c’est à dire à I à l’infini. D’une certaine manière, on peut conclure que tout se passe dans ce dernier cas, comme s’il y avait une roue située à l’infini. D’ailleurs, comme cela correspond à des configurations du robot pour lesquelles toutes les roues sont parallèles, on pourrait assigner à cette roue virtuelle “à l’infini” la même borne sur sa vitesse de rotation que pour les trois autres roues.

Le passage de $\bar{I}$ par l’un des points singuliers de la sphère de Riemann correspond à la traversée sur la surface $\mathcal{M}$ d’une des droites frontières entre les projections de deux $\mathbb{M}_i$.

6.2.6 Pour deux roues seulement

Si le robot n’est équipé que de deux roues orientables, bien que la contrainte de coordination soit toujours satisfaite, on pourrait voir apparaître des singularités similaires aux singularités de saut en choisissant comme sorties les coordonnées du centre instantané de rotation. Néanmoins, un problème se pose lorsque le robot est dans la configuration unicycle, c’est à dire avec les axes de roulement des deux roues confondus. Dans ce cas, le centre instantané de rotation n’est pas défini par les angles des roues, ce qui fait que l’on peut difficilement utiliser ses coordonnées comme sorties du système. On verra dans la section suivante que lorsque l’on considère le système complet, les sorties plates “naturelles” du système donnent lieu à des singularités de saut que l’on pourrait éventuellement envisager de projeter sur le sous-système constitué uniquement des angles des roues, mais on sort de la définition des singularités de saut que l’on s’est donnée.

6.2.7 Pour $r \geq 4$

Enfin, pour un nombre de roues supérieur ou égal à 4 les propriétés énnées avec $r = 3$ demeurent toutes, mais le nombre de singularités augmente avec le nombre de R_i et de $\bar{R}_i \in \mathbb{S}_3$. La singularité en $\bar{R}_\infty$ n’est pas modifiée.

Pour de plus amples détails analytiques sur la fonction $\mu(\beta)$ notamment, on pourra se reporter à l’annexe 9.4.

Cette section a permis un détour par une étude approfondie de la contrainte de coordination, préalable utile à la compréhension des singularités de saut du système complet que nous abordons dans la section suivante. Dans cette perspective, on retiendra particulièrement le rôle joué par le centre instantané de rotation et la position du centre de chacune des roues.

6.3 La cinématique complète du robot

Dans cette section, nous définissons le système dynamique comprenant le robot complet ainsi que toutes les contraintes cinématiques explicitées par les équations (6.5), (6.16) et (6.17). Comme dans la section précédente, nous abordons premièrement le cas général, où le nombre de roues r est quelconque, puis dans un second temps nous limiterons notre étude au cas $r = 2$.

6.3.1 Définition du système

Comme le vecteur $\vec{V}$ représente la vitesse de P dans le plan, il s'écrit :

$$\vec{V} = \dot{x}_1 \vec{x}_0 + \dot{x}_2 \vec{y}_0. \quad (6.35)$$

En combinant cette expression avec (6.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \vec{x}_0 + \dot{x}_2 \vec{y}_0 = V_1 \vec{x}_R + V_2 \vec{y}_R &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{R}(\theta) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\text{où } \mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De là, posant $\xi = (x_1, x_2, \theta)^T$ et choisissant (ξ, β) comme variables d'état du système, et (U, V) comme entrées, on peut écrire les équations d'état⁶ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathcal{R}(\theta)^T (G^T G)^{-1} G^T F(\beta, V) \\ \dot{\beta} &= U \end{aligned} \quad (6.37)$$

sous les contraintes suivantes définissant $\mathcal{E}$ l'espace des variables $\mathcal{X} = (\xi, \beta, U, V)$ et issues de (6.17) :

$$F(\beta, V) \in \text{Im} G \Leftrightarrow \begin{cases} (\beta, U) \in T\mathcal{M} \\ V \in \mathcal{K}(\beta) \end{cases}. \quad (6.38)$$

Le système ainsi défini est "identique" à celui défini dans la thèse d'I.Motte, à ceci près que l'on n'a pas introduit d'entrées virtuelles, desquelles seraient déduites les entrées réelles en utilisant la contrainte cinématique entre les roues.

⁶ On trouvera une description plus complète des matrices impliquées dans les équations suivantes à l'annexe 9.2.

6.3.2 Le robot à 2 roues

Géométrie et cinématique du robot

On reprend les notations introduites dans le cas général en choisissant pour P le milieu des deux roues dont les coordonnées dans le repère du robot seront simplement $R_1 = (a, 0)$ and $R_2 = (-a, 0)$.

Ces notations sont reprises sur la figure 6.5.

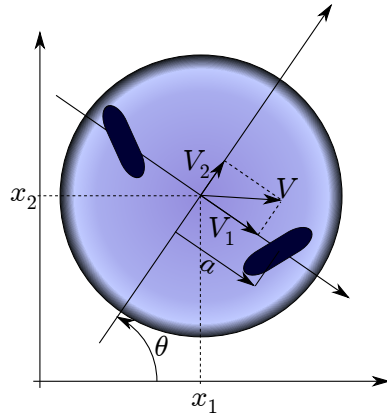


Fig. 6.4. Variables principales du robot

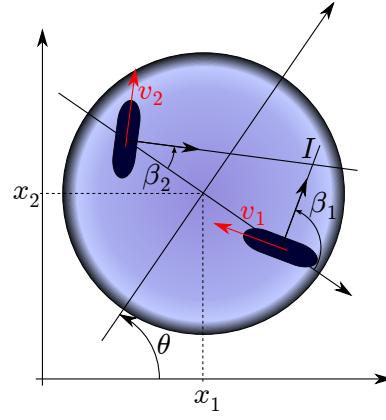


Fig. 6.5. Variables des roues, configuration générique A

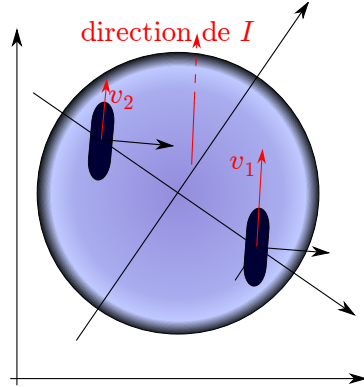


Fig. 6.6. Configuration B : roues parallèles

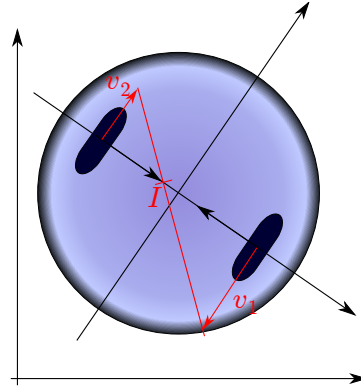


Fig. 6.7. Configuration C équivalente à l'unicycle

La contrainte de coordination est inexistante et les contraintes cinématiques (6.38) se réduisent simplement à :

$$v_1 \sin \beta_1 = v_2 \sin \beta_2. \quad (6.39)$$

L'évolution du système quant à elle est caractérisée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2}(v_1 \sin \beta_1 + v_2 \sin \beta_2) \\ V_2 &= \frac{1}{2}(v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2) \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2a}(v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Les coordonnées du centre instantané de rotation I sont données par

$$\begin{aligned} x_I &= -\frac{V_2}{\dot{\theta}} \\ y_I &= \frac{V_1}{\dot{\theta}}. \end{aligned}$$

On peut distinguer trois types de configurations :

- Configuration A : c'est la configuration générique, $\sin \beta_1 \sin \beta_2 \neq 0$, et I est l'intersection des axes des roulement des deux roues, comme représenté sur la figure 6.5.
- Configuration B : $\beta_1 = \beta_2 \not\equiv 0 \pmod{[\pi]}$. Ici I n'est pas vraiment défini, mais on peut considérer qu'il se trouve à l'infini dans la direction de l'axe de roulement des roues (cf. figure 6.6), cela correspond à $\bar{I}$ au pôle nord de la sphère. Dans ce cas, on écrira par convention $I = I_\infty$.
- Configuration C : $\beta_1 = \beta_2 \equiv 0 \pmod{[\pi]} \Leftrightarrow \cos \beta_1 \cos \beta_2 = \pm 1$. Les axes de roulement des deux roues sont confondus avec la droite $(R_1 R_2)$, l'axe des abscisses du robot. Si $v_2 - \cos \beta_1 \cos \beta_2 v_1 = 0$ alors on est dans la même situation que pour la configuration B , sinon I est localisé sur l'axe des abscisses du robot et sa position est définie par v_1 , v_2 et $\varepsilon_{12} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 = \pm 1$:

$$x_I = a \frac{v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2}{v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1} = a \frac{v_2 + \varepsilon_{12} v_1}{v_2 - \varepsilon_{12} v_1}$$

Cette configuration, qui correspond au robot unicycle, est représentée sur la figure 6.7.

Modèle et platitude différentielle

Pour garder l'homogénéité avec les exemples précédents, nous posons :

- $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^4$, $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$
- $X = (x_1, x_2, \theta, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{E}$ les variables d'état,
- $(U, V) = (u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{F}$, les entrées du système,
- $\mathcal{X} = (X, U, V)$ le vecteur combinant variables d'état et d'entrées,
- $Y = (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, \theta) \in \mathbb{H}$, les sorties.
- Dans l'espace des trajectoires des sorties nous introduisons la distance suivante : $d(Y(t), \tilde{Y}(t)) = \|Y - \tilde{Y}\|_\infty + \|\dot{Y} - \dot{\tilde{Y}}\|_\infty + \|\ddot{Y} - \ddot{\tilde{Y}}\|_\infty$

Soit $\mathcal{E} = \{(X, U, V) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}, v_1 \sin \beta_1 = v_2 \sin \beta_2\}$ l'espace où sont confinées les variables $\mathcal{X}$ d'après les contraintes cinématiques. $\mathcal{E}$ est une variété de $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ de dimension 8. Pour $\mathcal{X} \in \mathcal{E}$, le système est gouverné par l'équation différentielle : $\dot{X} = f(\mathcal{X})$, où

$$f(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v_1 \sin(\theta - \beta_1) + v_2 \sin(\theta - \beta_2)) \\ \frac{1}{2}(v_1 \cos(\theta - \beta_1) + v_2 \cos(\theta - \beta_2)) \\ \frac{1}{2a}(v_1 \cos(\beta_1) - v_2 \cos(\beta_2)) \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Les singularités de saut

Tenant compte de la contrainte de roulement sans glissement, on obtient l'égalité différentielle suivante :

$$\psi(\mathcal{X}, Y, \dot{Y}, \ddot{Y}) \doteq \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \theta - y_3 \\ \cos \beta_1 v_1 - (V_2 + a\dot{y}_3) \\ \sin \beta_1 v_1 + V_1 \\ \cos \beta_2 v_2 - (V_2 - a\dot{y}_3) \\ \sin \beta_2 v_2 + V_1 \\ v_1^2 u_1 + \dot{V}_1(V_2 + a\dot{y}_3) - V_1(\dot{V}_2 + a\ddot{y}_3) \\ v_2^2 u_2 + \dot{V}_1(V_2 - a\dot{y}_3) - V_1(\dot{V}_2 - a\ddot{y}_3) \end{pmatrix} = 0$$

Avec $\mathcal{Y} = (Y, \dot{Y}, \ddot{Y}) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^6$. Alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -\sin \beta_1 v_1 & & \cos \beta_1 & & & \\ & & & \cos \beta_1 v_1 & & \sin \beta_1 & & & \\ & & & & -\sin \beta_2 v_2 & & \cos \beta_2 & & \\ & & & & \cos \beta_2 v_2 & & \sin \beta_2 & & \\ & & & & & v_1^2 & 2u_1 v_1 & & \\ & & & & & v_2^2 & 2u_2 v_2 & & \end{pmatrix}$$

Soit $\widehat{\mathbb{M}}_0 \times \widehat{\mathbb{K}}_0 = \{(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \det \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} \right) = 0, \psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0\}$:

$$\det \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{X}} \right) = 0, \psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 v_2^2 = 0 \\ \psi(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \widehat{\mathbf{M}}_0 &= \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, \quad v_1 v_2 = 0\}, \\ \text{et } \widehat{\mathbf{K}}_0 &= \{\mathcal{Y} \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^6, \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + a\dot{y}_3^2 + 2a\dot{y}_3(\dot{y}_1 \cos y_3 + \dot{y}_2 \sin y_3) = 0 \\ &\quad \text{ou} \quad \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + a\dot{y}_3^2 - 2a\dot{y}_3(\dot{y}_1 \cos y_3 + \dot{y}_2 \sin y_3) = 0\} \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{M}_{\delta_1 \delta_2} = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, \delta_1 v_1 > 0, \delta_2 v_2 > 0\}$

Soit $\mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2}^{\delta_1 \delta_2} \subset \widehat{\mathbf{M}}_0$ la frontière entre $\mathbf{M}_{\delta_1 \delta_2}$ et $\mathbf{M}_{\gamma_1 \gamma_2}$, pour $(\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \{\pm 1\}^4$.

On peut alors trouver quatre fonctions $\psi_{\delta_1 \delta_2}$ définies sur $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^6 \setminus \widehat{\mathbf{K}}_0$ telles que $\forall (\delta_1, \delta_2) \in \{\pm 1\}^2, \forall \mathcal{X} \in \mathbf{M}_{\delta_1 \delta_2}, \exists \mathcal{Y} \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^6, \mathcal{X} = \psi_{\delta_1 \delta_2}(\mathcal{Y})$:

$$\psi_{\delta_1 \delta_2}(\mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \text{atan}_2(\delta_1(V_2 + a\dot{y}_3), -\delta_1 V_1) \\ \text{atan}_2(\delta_2(V_2 - a\dot{y}_3), -\delta_2 V_1) \\ \frac{V_1(\dot{V}_2 + a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 + a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2} \\ \frac{V_1(\dot{V}_2 - a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 - a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2} \\ \delta_1 \sqrt{\frac{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2}{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2}} \\ \delta_2 \sqrt{\frac{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2}{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2}} \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Les $\mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2}^{\delta_1 \delta_2}$ sont des variétés de $\mathcal{E}$ de dimension 7, et donc de codimension 1 dans $\mathcal{E}$; en effet il est clair que si $\mathcal{X} \in \mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2}^{\delta_1 \delta_2}$, et $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$, cela ajoute une contrainte supplémentaire à la contrainte cinématique qui définit $\mathcal{E}$. En conséquence la dimension décroît de 1. Même lorsque les deux contraintes $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$ sont ajoutées simultanément, cela ne réduit la dimension que d'une unité, parce qu'il y a redondance de ces contraintes avec la définition de $\mathcal{E}$: $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$ impliquent que la contrainte cinématique soit satisfaite. On peut ajouter qu'il ressort de tout cela que :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \widehat{\mathbf{K}}_0 \\ &= \{\mathcal{Y} \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^6, \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + a\dot{y}_3^2 + 2a\dot{y}_3(\dot{y}_1 \cos y_3 + \dot{y}_2 \sin y_3) = 0 \\ &\quad \text{ou} \quad \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + a\dot{y}_3^2 - 2a\dot{y}_3(\dot{y}_1 \cos y_3 + \dot{y}_2 \sin y_3) = 0\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Formulons la proposition suivante.

Proposition 6.2. Soit $(\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \{\pm 1\}^4$ avec $(\delta_1, \delta_2) \neq (\gamma_1, \gamma_2)$. $\mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2}^{\delta_1 \delta_2}$ est G -singulière par rapport à y et à la distance d , avec un saut $C = \pi$.

Preuve. Soit $\mathbf{M}_0 = \mathbb{I}_{\gamma_1 \gamma_2}^{\delta_1 \delta_2}$, $\mathbf{M}_- = \mathbf{M}_{\delta_1 \delta_2}$, $\mathbf{M}_+ = \mathbf{M}_{\gamma_1 \gamma_2}$, $\psi_- = \psi_{\delta_1 \delta_2}$ et $\psi_+ = \psi_{\gamma_1 \gamma_2}$. Les hypothèses définissant la platitude du système ont déjà été vérifiées, appliquons maintenant la proposition 4.5.

- Reprenant l'égalité (6.42), on observe facilement $\|\psi_{-,x}(\mathcal{Y}) - \psi_{+,x}(\mathcal{Y})\| \geq \pi$.
- De plus le fait que $\mathbb{K}_0$ est de codimension 2, apparaît bien lorsqu'on écrit les égalités de (6.43) apparaissant dans sa définition sous la forme : $V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2$ ou $V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2$. Dans le premier des deux cas, cette réécriture revient à dire

$$\begin{aligned} V_1 = 0 \text{ et } V_2 + a\dot{y}_3 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 \cos y_3 + \dot{y}_2 \sin y_3 = 0 \\ -\dot{y}_1 \sin y_3 + \dot{y}_2 \cos y_3 + a\dot{y}_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = -a\dot{y}_3 \cos y_3 \\ \dot{y}_2 = a\dot{y}_3 \sin y_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Il semble clair dans cette dernière formulation que l'on a deux coordonnées de $\mathcal{Y}$ qui s'expriment en fonction des autres lorsque $\mathcal{Y} \in \mathbb{K}_0$, ce qui fait de cette variété l'intersection de deux hypersurfaces, elle est donc de codimension 2. □

Description de la topologie des singularités du robot

Le but de cette section est de décrire la topologie des surfaces G -singulières $\mathbb{I}_{\delta_1\delta_2}^{\gamma_1\gamma_2}$. Pour ce faire, nous considérerons des trajectoires continues $\mathcal{X}_s(t)$ passant de $\mathbb{M}_{\delta_1\delta_2}$ dans $\mathbb{M}_{\gamma_1\gamma_2}$ qui traversent instantanément $\mathbb{I}_{\delta_1\delta_2}^{\gamma_1\gamma_2}$ à un certain instant $t = \tau$. Ce type de trajectoires correspond à l'ensemble $\Sigma_{\pm}$ dans la définition des singularités de saut. Sur les six hypersurfaces $\mathbb{I}_{\delta_1\delta_2}^{\gamma_1\gamma_2}$, on ne conservera cette notation que pour $\mathbb{I}_{11}^{-1-1} = \mathbb{I}_{-1-1}^{11}$ et $\mathbb{I}_{1-1}^{-11} = \mathbb{I}_{-11}^{1-1}$, pour les quatre autres, on les écrira sous la forme : $\mathbb{I}_{0\delta_2}$ ou $\mathbb{I}_{\delta_1 0}$ qui n'est pas équivoque dans ces cas là. Alors :

$$\begin{aligned} \forall t < \tau \quad \mathcal{X}_s(t) &\in \mathbb{M}_{\delta_1\delta_2} \\ \mathcal{X}_s(\tau) &\in \mathbb{I}_{\delta_1\delta_2}^{\gamma_1\gamma_2} \\ \forall t > \tau \quad \mathcal{X}_s(t) &\in \mathbb{M}_{\gamma_1\gamma_2} \end{aligned}$$

Ceci implique que pour $t \neq \tau$ le robot est en mouvement, parce que $v_1 v_2 \neq 0$. Ainsi, pour $t \neq \tau$ le centre instantané de rotation I est bien défini ou éventuellement localisé dans une direction à l'infini ($= \mathbb{I}_{\infty}$ par convention). Il est alors certain que I a une limite pour $t \rightarrow \tau^-$ et pour $t \rightarrow \tau^+$. Ces limites sont respectivement notées I_- et I_+ . Si $I_- = I_+$, $I(\tau)$ est considéré comme étant égal à la limite commune. La figure 6.8 représente les différents $\mathbb{M}_{\delta_1\delta_2}$ du système, projetés dans le plan (v_1, v_2) .

a. $\mathbb{I}_{10}$: soit $\mathcal{X}_s$ une trajectoire dans $\mathcal{E}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall t < \tau, \mathcal{X}_s(t) &\in \mathbb{M}_{11} \\ \text{et } \forall t > \tau, \mathcal{X}_s(t) &\in \mathbb{M}_{1-1}. \end{aligned}$$

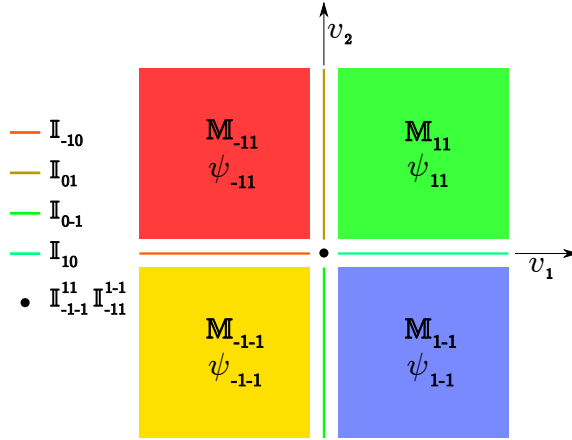


Fig. 6.8. Projection des singularités de saut dans le plan (v_1, v_2)

Afin d'identifier $\mathbb{I}_{10}$, il est nécessaire de comprendre ce qui se produit lorsque $t = \tau$. dans tous les cas $I_-, I_+ \in (R_1 R_2) \cup \{I_\infty\}$. Trois types de configurations sont possibles.

1. Premièrement, lorsque $I_- = I_+ = R_2$, alors $I(\tau)$ existe et se situe au centre de la seconde roue $I(\tau) = R_2$; c'est le cas générique. Du fait de la contrainte cinématique et comme $v_2(\tau) = 0$, alors $\sin \beta_1(\tau) = 0$. Les propriétés sont les suivantes :
 - comme le signe de v_2 change, le centre instantané de rotation traverse l'axe $(R_2, \vec{y}_2)$ de la seconde roue.
 - $v_1(\tau) \geq 0$.
 - $\sin \beta_1(\tau) = 0$.
 - β_2 peut prendre n'importe quelle valeur.⁷ Si $\sin \beta_2(\tau) \neq 0$, alors l'axe des abscisses de la seconde roue est différent de $(R_1 R_2)$ et comme I se déplace le long de cet axe, le signe de $\sin \beta_1$ doit changer. Ce n'est pas nécessairement le cas si $\sin \beta_2(\tau) = 0$.
 - Le mouvement du centre R_2 de la seconde roue a un point de rebroussement de première espèce (voir la figure 6.9).

Dans ce qui suit, $\epsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ permet de définir le signe de certaines variables. L'évolution des variables impliquées dans la contrainte cinématique est décrite dans les tableaux suivants :

⁷ En respectant bien sur la continuité de la variable, mais on veut signifier ici que la valeur prise n'est pas contrainte par les autres variables.

t	τ^-	τ	τ^+		t	τ^-	τ	τ^+
v_1	+		+	ou	v_1	+		+
$\sin \beta_1$	ϵ	$\emptyset$	$-\epsilon$		$\sin \beta_1$	ϵ_1	$\emptyset$	ϵ_2
v_2	-	$\emptyset$	+		v_2	-	$\emptyset$	+
$\sin \beta_2$	$-\epsilon$		$-\epsilon$		$\sin \beta_2$	$-\epsilon_1$	$\emptyset$	ϵ_2

2. Deuxièmement, $I_- = I_+ = R_1$, alors $I(\tau)$ existe et se situe sur le centre de la première roue $I(\tau) = R_1$. On a alors les propriétés suivantes :

- Comme le signe de v_2 change et que le signe de v_1 reste positif, le centre instantané de rotation traverse l'axe longitudinal $(R_1, \vec{y}_1)$ de la première roue.
- $v_1(\tau) = v_2(\tau) = 0$.
- $\sin \beta_2(\tau) = 0$.
- β_1 peut prendre n'importe quelle valeur⁸ Si $\sin \beta_1(\tau) \neq 0$, alors l'axe des ordonnées de la première roue est distinct de $(R_1 R_2)$ et comme I se déplace le long de cet axe, le signe de $\sin \beta_1$ change nécessairement excepté si $\sin \beta_1(\tau) = 0$.
- Le mouvement du centre R_2 de la seconde roue décrit un point de rebroussement de seconde espèce et le mouvement du centre R_1 de la première roue a un point d'inflexion (voir la figure 6.9).

L'évolution des variables impliquées dans la contrainte cinématique est décrite dans les tableaux suivants :

t	τ^-	τ	τ^+		t	τ^-	τ	τ^+
v_1	+	$\emptyset$	+	ou	v_1	+	$\emptyset$	+
$\sin \beta_1$	ϵ		ϵ		$\sin \beta_1$	ϵ_1	$\emptyset$	ϵ_2
v_2	-	$\emptyset$	+		v_2	-	$\emptyset$	+
$\sin \beta_2$	$-\epsilon$	$\emptyset$	ϵ		$\sin \beta_2$	$-\epsilon_1$	$\emptyset$	ϵ_2

3. Troisièmement, $(R_1 R_2) \cup \{I_\infty\} \ni I_- \neq I_+ \in (R_1 R_2) \cup \{I_\infty\}$. Alors $I(\tau)$ n'existe pas. On a $I_- \in [R_1 R_2]$ et $I_+ \in (-\vec{x}_2, R_2] \cup [R_1, \vec{x}_1) \cup \{I_\infty\}$ ou l'inverse. En d'autres termes, I saute d'une position située entre les deux roues à une position située à "l'extérieur" ou l'inverse.

On observe les propriétés suivantes :

- Le saut de I peut être interprété comme le croisement discontinu d'une des deux roues.

⁸ cf. la note 7

- $v_1(\tau) = v_2(\tau) = \sin \beta_1 = \sin \beta_2 = 0$.
- I_- et I_+ sont déterminés par la limite du rapport $\frac{v_1}{v_2}$, pour $t \rightarrow \tau^\pm$.
- Le mouvement du centre R_2 de la seconde roue décrit un point de rebroussement : il est de première espèce si le saut de I est par dessus R_2 et de seconde espèce s'il est au dessus de R_1 et dans ce dernier cas le chemin suivi par R_1 décrit un point d'inflexion (voir la figure 6.9).

L'évolution des variables impliquées dans la contrainte cinématique est décrite dans le tableau suivant :

t	τ^-	τ	τ^+
v_1	+	0	+
$\sin \beta_1$	ϵ_1	0	ϵ_2
v_2	–	0	+
$\sin \beta_2$	$-\epsilon_1$	0	ϵ_2

- b.** La description des propriétés pour les surfaces G -singulières $\mathbb{I}_{-10}$, $\mathbb{I}_{01}$, $\mathbb{I}_{0-1}$ se déduit aisément de celle de $\mathbb{I}_{10}$.
- c.** $\mathbb{I}_{11}^{-1-1}$: soit $\mathcal{X}_s = (x_s, u_s)$ une trajectoire dans $\mathcal{E}$ telle que

$$\begin{aligned} & \forall t < \tau, \mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{M}_{11} \\ \text{et } & \forall t > \tau, \mathcal{X}_s(t) \in \mathbb{M}_{-1-1}. \end{aligned}$$

Dans le voisinage de τ le comportement du système est résumé par les propriétés suivantes :

- $v_1(\tau) = v_2(\tau) = 0$. v_1 and v_2 changent de signe.
- $I(\tau)$ existe dès que le robot n'est pas en configuration C . Mais dans ce dernier cas I_- et I_+ continuent d'exister et peuvent se situer n'importe où sur $(R_1 R_2) \cup \{I_\infty\}$.
- Chaque roue décrit un point de rebroussement qui est de seconde espèce la plupart du temps sauf si
 - I traverse (ou effectue un saut par dessus) la roue $i \in \{1, 2\}$, alors le point de rebroussement décrit par R_i est de première espèce,
 - ou que toutes les roues sont parallèles en $t = \tau$, I est alors à l'infini et les roues peuvent effectuer un point de rebroussement d'une espèce ou de l'autre, mais il est de la même nature pour toutes les roues.

Succinctement, traverser cette surface G -singulière signifie que le robot stoppe et repart en arrière. L'évolution des variables impliquées dans la contrainte cinématique est décrite dans le tableau suivant :

t	τ^-	τ	τ^+
v_1	+	0	-
$\sin \beta_1$	ϵ		$-\epsilon$
v_2	+	0	-
$\sin \beta_2$	$-\epsilon$		$-\epsilon$

d. On déduit facilement une description similaire pour $\mathbb{I}_{23}$.

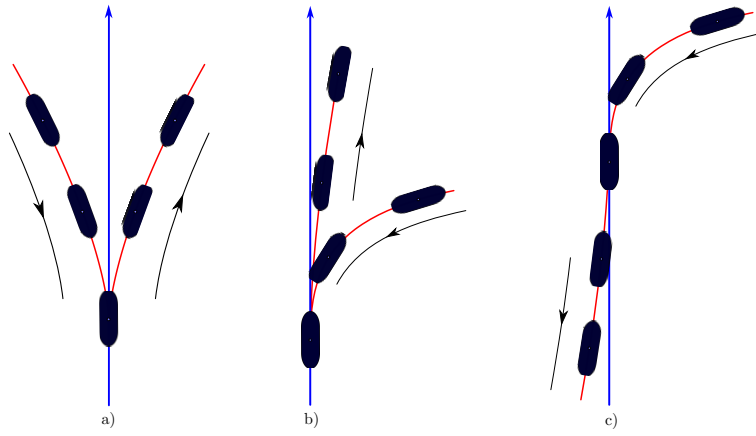


Fig. 6.9. Types de chemins parcourus par les roues lors de la traversée d'une singularité de saut : a) point de rebroussement de première espèce, b) point de rebroussement de seconde espèce, c) point d'inflexion.

6.3.3 Pour $r \geq 3$ roues

Sans introduire toutes les variables et équations, on souhaite mentionner dans cette section les propriétés communes et les différences avec le cas $r = 2$. Ici on considèrera que au moins trois roues du robot ne sont pas alignées.

Avec r roues, on définit $\widehat{\mathbb{M}}_0 = \{\mathcal{X} \in \mathcal{E}, \prod_{i=1}^r v_i = 0\}$ et l'ensemble $\widehat{\mathbb{K}}_0$ correspondant. Ceci définit 2^r zones $\mathbb{M}_i$ comme représenté sur la figure 6.10 pour trois roues.

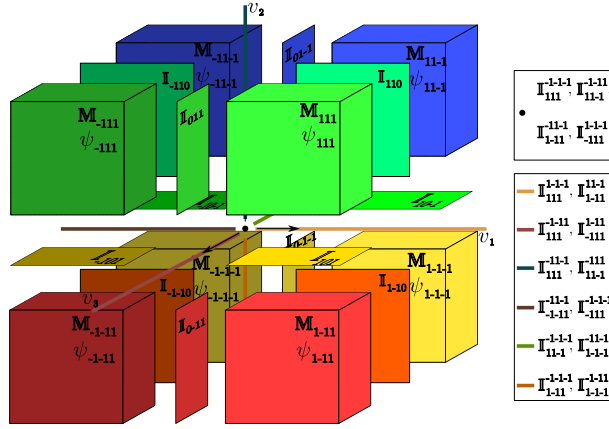


Fig. 6.10. Projection des G -singularités dans l'espace (v_1, v_2, v_3) .

La différence majeure lorsque $r \geq 3$ est que la configuration C est impossible parce que les axes de toutes les roues ne peuvent pas se confondre, du fait du non-alignement supposé. Cela implique également que I ne fait pas de saut. Trois types de surfaces G -singulières $\mathbb{I}_{\delta_1 \delta_2 \delta_3}^{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}$ apparaissent. Le fait déterminant, relevé dans la thèse d'Isabelle Motte, est qu'il est possible qu'une seule roue s'arrête alors que les $r-1$ autres continuent leur mouvement, mais si deux roues s'immobilisent la contrainte cinématique impose l'arrêt de toutes les roues (et donc du robot).

- a.** La première situation est celle où pour la roue i , v_i change de signe, tandis que le signe des autres v_j est constant. Dans ce cas I traverse R_i dont le mouvement décrit un point de rebroussement de première espèce, et les $r-1$ autres roues présentent un chemin plus "lisse".
- b.** Le second type est le dual du précédent : pour la roue i , v_i conserve le même signe, tandis que le signe des autres v_j change. Ici, I traverse également R_i , mais le chemin que décrit R_i a un point de rebroussement de seconde espèce et toutes les roues sont à l'arrêt pour $t = \tau$.
- c.** Dans le dernier type de situation, le signe de tous les v_i change, et I peut se trouver dans n'importe quelle région du plan.

Les cas **a.** et **b.** correspondent en fait à la séparation en deux hypersurfaces distinctes des cas (1) et (2) pour les surfaces du type $\mathbb{I}_{10}$ concernant le robot à deux roues. Le cas **c.** correspond aux surfaces telles que $\mathbb{I}_{11}^{-1-1-1}$ pour le robot à deux roues.

Signalons enfin que, comme les trois seules possibilités de traversée d'une G -singularité sont l'arrêt d'une roue, de $r-1$ roues ou encore de r roues, pour $r \geq 4$, certaines interfaces $\mathbb{I}_{\delta_1 \dots \delta_r}^{\gamma_1 \dots \gamma_r}$ seront en réalité vides.

La présence de contraintes cinématiques pour ce robot force aussi à prendre certaines précautions du point de vue de la modélisation du système et de l'application d'une commande, notamment quand $r \geq 3$. En effet, les sorties plates (x_1, x_2, θ) étant au nombre de 3, cela signifie qu'il y a aussi seulement 3 entrées indépendantes. C'est d'ailleurs ce qu'a montré l'analyse des contraintes cinématiques qui imposent $2r - 3$ équations aux $2r$ entrées $(u_1, \dots, u_r)$ et $(v_1, \dots, v_r)$.

Ainsi on pourrait être tenté de choisir 3 de ces entrées et les privilégier dans les calculs et les équations, puis imposer aux $2r - 3$ autres des valeurs permettant de satisfaire les contraintes. S'il est effectivement vrai, y compris sur les surfaces G -singulières⁹, que l'on peut choisir exactement 3 entrées indépendantes¹⁰, le trio choisi ne peut pas être générique et dépend de l'état du système comme cela a été démontré complètement par Thuilot dans [42]. Cela se comprend bien puisque pour les singularités de saut correspondant au passage du centre instantané de rotation par l'une des roues, toute valeur donnée à l'angle d'orientation de celle-ci ainsi qu'à l'entrée associée satisfait les contraintes cinématiques. Dans ce cas, cette entrée fait nécessairement partie du trio d'entrées indépendantes.

Le choix fait dans ce chapitre de garder une certaine symétrie entre les variables de même type est donc un moyen pour ne pas avoir à changer de variables d'entrées, dans le déroulement d'une commande par exemple.

6.3.4 Lien avec la contrainte de coordination seule

Pour le robot ayant au moins trois roues orientables, il est évident qu'il y a un lien fort entre les singularités de saut de la contrainte de coordination des roues vue comme un sous-système et les singularités de saut du système complet. Certaines singularités sont transmises du sous-système au système complet, d'autres sont "déplacées". Le fait que tout ne soit pas purement et simplement transmis vient de la différence de nature des sorties choisies dans les deux cas.

En effet, on pourra noter que les singularités de saut correspondant au passage du centre instantané de rotation par le centre de l'une des roues sont présentes dans les deux cas.

En revanche, la singularité correspondant au passage de $\bar{I}$ par R_∞ , n'a pas d'équivalent direct pour le robot complet, parce que dans ce dernier cas R_∞ correspond cinématiquement à $\dot{\theta} = 0$, qui ne donne pas lieu à une singularité de platitude pour les sorties $Y = (x_1, x_2, \theta)$.

⁹ qui sont des singularités de platitude.

¹⁰ Il existe une exception cependant s'il n'y a que 2 roues, dans le cas où les axes des deux roues sont confondus et que les vitesses des roues sont nulles : on n'est plus en mesure de choisir instantanément un triplet de variables adéquat, sans avoir une idée de l'évolution future des différentes variables.

6.3.5 Lien avec le robot unicycle

Dans ce qui précède, on a pu remarquer qu'en réalité, chaque roue se comporte comme un robot unicycle, et que les singularités de saut du robot correspondent à des singularités de l'une ou de plusieurs des roues, en considérant chaque roue comme un pseudo robot unicycle. En réalité, pour identifier le mouvement de chaque roue comme celui d'un système unicycle, la roue i doit être assimilée au système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \cos \gamma_i \\ \dot{y}_i &= v_i \sin \gamma_i \\ \dot{\gamma}_i &= \omega_i\end{aligned}\tag{6.45}$$

où l'on a noté

- (x_i, y_i) les coordonnées de la roue i dans le plan où s'effectue le mouvement,
- $\gamma_i = \theta + \beta_i$,
- $\omega_i = \dot{\theta} + u_i$.

Bien sûr, la mise "en commun" de tous ces sous-systèmes ne suffit pas, il faut adjoindre la contrainte cinématique. On a alors la correspondance entre un ensemble d'agents unicycles autonomes ayant un mouvement semblable à celui d'une structure rigide, et un robot à plusieurs roues orientables. Il découle de cela qu'un tel ensemble de robots unicycles reste G -singulier, même sous la contrainte de rigidité.

6.3.6 Une trajectoire avec singularités de saut : translation et rotation uniformes

Un exemple de trajectoire traversant une singularité de saut est la suivante : un point du robot se déplace en translation uniforme, tandis que le robot tourne sur lui-même à une vitesse constante, qui est liée à la position des roues et la vitesse de translation. Le cas le plus simple est celui du robot à deux roues où l'on a :

$$\begin{aligned}x_{1r}(t) &= vt \\ x_{2r}(t) &= 0 \\ \theta_r(t) &= \omega t\end{aligned}\tag{6.46}$$

Pour un robot décrit 6.3.2, d'après la définition de K_0 donnée par (6.43) cette trajectoire passe par des singularités de saut si :

$$|a\omega| = |v| \quad (\neq 0).\tag{6.47}$$

Dans ce cas, on traverse successivement des singularités correspondant à chacune des deux roues. Ces dernières décrivent des cycloïdes. Bien entendu, le robot passe près de la singularité pour des trajectoires telles que l'égalité (6.47)

est “presque” vérifiée. Dans ces cas-là, les trajectoires des roues sont des trochoïdes.

Nous allons maintenant réduire le nombre de paramètres au maximum en définissant des variables sans dimension appropriées. Supposant que la vitesse d'orientation u_i de chaque roue est bornée par un réel positif Ω , on pose :

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{a} \quad (6.48)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{x_2}{a} \quad (6.49)$$

$$\hat{u}_i = \frac{u_i}{\Omega}, \quad i = 1, 2 \quad (6.50)$$

$$\hat{v}_i = \frac{v_i}{a\Omega}, \quad i = 1, 2 \quad (6.51)$$

$$\tau = \Omega t \quad (6.52)$$

Alors, avec $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \theta, \beta_1, \beta_2)$ et $\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_1, \hat{v}_2)$, on a $\frac{d\hat{X}}{d\tau} = \hat{f}(\hat{X})$ avec

$$\hat{f}(\hat{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\hat{v}_1 \sin(\theta - \beta_1) + \hat{v}_2 \sin(\theta - \beta_2)) \\ \frac{1}{2}(\hat{v}_1 \cos(\theta - \beta_1) + \hat{v}_2 \cos(\theta - \beta_2)) \\ \frac{1}{2}(\hat{v}_1 \cos(\beta_1) - \hat{v}_2 \cos(\beta_2)) \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix},$$

où les entrées $\hat{u}_i$ sont bornées par 1, et les $\hat{v}_i$ vérifient : $\hat{v}_1 \sin \beta_1 = \hat{v}_2 \sin \beta_2$.

En outre la trajectoire de référence (6.46) est remplacée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1r}(\tau) &= \hat{v}\tau \\ \hat{x}_{2r}(\tau) &= 0 \\ \theta_r(\tau) &= \hat{\omega}\tau \end{aligned} \quad (6.53)$$

où $\hat{v} = \frac{v}{a\Omega}$ et $\hat{\omega} = \frac{\omega}{\Omega}$. La condition (6.47) est remplacée par

$$\left(\frac{\hat{\omega}}{\hat{v}} \right)^2 = 1. \quad (6.54)$$

Cette mise à l'échelle a ainsi permis de supprimer deux paramètres : a et Ω .

On comprend facilement que, comme dans le cas de la famille de trajectoires rectilignes uniformes proposée pour illustrer le comportement du système “rail rotatif”, la famille de trajectoires correspondant à (6.53) sera “quasi-singulière” lorsque l'on sera proche de la condition (6.54) et que l'on peut ainsi obtenir des valeurs arbitrairement grandes pour $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$. Par exemple on peut observer que :

$$\hat{u}_{1r} = \hat{v}\hat{\omega} \frac{\hat{\omega} \sin \omega\tau - \hat{v}}{\hat{v}^2 + \hat{\omega}^2 - 2\hat{v}\hat{\omega} \sin \omega\tau},$$

si $\hat{v} \neq \hat{\omega}$ alors :

$$\hat{u}_{1r}\left(\frac{\pi}{2\hat{\omega}}\right) = \hat{v}\hat{\omega} \frac{\hat{\omega} - \hat{v}}{\hat{v}^2 + \hat{\omega}^2 - 2\hat{v}\hat{\omega}} = \frac{\hat{v}\hat{\omega}}{\hat{\omega} - \hat{v}},$$

qui tend bien vers l'infini quand $\hat{v}$ tend vers ω .

Sur les figures 6.11 à 6.13 sont représentées trois types de trajectoires pour le robot pour différentes valeurs des paramètres. On observe que les roues tracent dans le plan des trochoïdes. La figure 6.12 correspond au passage par les singularités de saut, et les roues décrivent alors des cycloïdes qui sont des cas particuliers de trochoïdes. Soulignons notamment la position particulière de la roue lors du passage par le point de rebroussement, qui diffère des deux autres cas, que l'on dénommera respectivement cycloïde raccourcie et cycloïde allongée pour les figures 6.11 et 6.13.

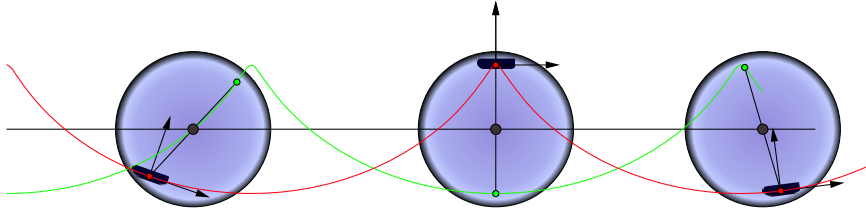


Fig. 6.11. Exemple de trajectoire quand $\hat{v} > \hat{\omega}$

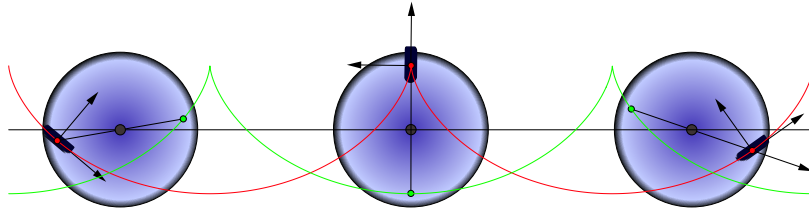


Fig. 6.12. Exemple de trajectoire quand $\hat{v} = \hat{\omega}$

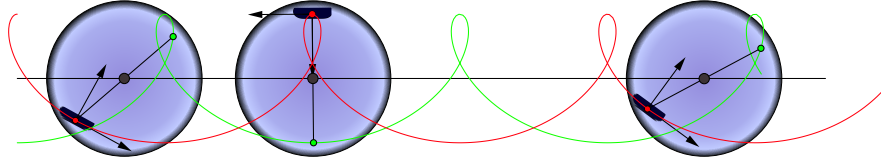


Fig. 6.13. Exemple de trajectoire quand $\hat{v} < \hat{\omega}$

Dans toutes les situations, la trajectoire effectuée par le centre instantané de rotation dans le plan est rectiligne uniforme, parallèle à la trajectoire du point de coordonnées (x_1, x_2) . Pour le cas G -singulier, cette droite contient les points de rebroussement des roues.

Cette famille de trajectoires est particulièrement simple à décrire tout en présentant les caractéristiques que nous souhaitons similaires à celles des trajectoires rectilignes uniformes que nous avons proposées pour le système du rail rotatif. On réutilisera ces trajectoires comme références dans un problème de suivi, adapté au robot à deux roues orientables. La définition de ce problème sera faite en 7.1.4 et analysé dans la partie consacrée aux simulations numériques 7.5.2, de façon à illustrer l'influence, sur certains algorithmes de commande optimale, des singularités qui ont été décrites en détail dans ce chapitre.

6.4 En guise de conclusion

En comparaison avec les illustrations relativement simples que constituent les systèmes du rail rotatif, du robot unicycle ou des bras de robots du chapitre 5, le robot à roues orientables concentre une série de difficultés supplémentaires.

1. Le degré de dérivation et/ou le nombre de variables d'état et d'entrées est plus important, et bien que fondamentalement la nature des singularités n'est pas très différente, elle est plus "camouflée" dans les équations.
2. Un nombre plus important de singularités¹¹.
3. L'espace $\mathcal{E}$ était simplement $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ tandis qu'ici il est une sous-variété de $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ définie par la contrainte cinématique.

¹¹ A l'exception de l'extension combinée du bras simple et du rail rotatif, les autres systèmes n'avaient qu'une seule singularité de saut.

4. En mouvement, on constate la présence de singularités de saut, que l'on retrouve également à l'arrêt, mais sous une forme différente en considérant le sous-système des roues auxquelles on applique la contrainte de coordination.

Le chapitre suivant s'intéresse à la question du traitement d'un problème de commande optimale en présence de singularités de saut. Les informations récoltées jusqu'à présent sur la localisation des singularités de saut des différents systèmes étudiés y sont mises à profit dans le cadre d'une exploitation efficace des sorties plates de ces systèmes.

Commande optimale pour systèmes G -singuliers différentiellement plats

Notation :	Description
X	vecteur des variables d'état
U	vecteur des variables d'entrées
Y	$\dot{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ vecteur des sorties plates
f	fonction définissant la dynamique d'un système
h	fonction définissant les sorties plates
$\mathcal{X}$	$\dot{\mathcal{X}} = (X, U)$
$\mathcal{Y}$	$\dot{\mathcal{Y}} = (Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(q)})$ vecteur des sorties plates et leurs dérivées
$\mathbb{M}_0$	surface G -singulière
$[t_0, t_f]$	intervalle de définition des trajectoires
τ	instant particulier de $[t_0, t_f]$
$J(\cdot)$	fonction de coût
$L(\cdot)$	fonction intervenant dans la partie intégrale du coût
$C(\cdot)$	fonction de contrainte
$c_{\max}$	borne supérieure de $C(\cdot)$
(μ, θ)	variables d'état du système "rail rotatif"
δ	paramètre d'une famille de trajectoires du "rail rotatif"
δ^*	valeur charnière de δ pour un problème de poursuite
$\hat{v}, \hat{\omega}$	paramètres d'une de famille trajectoires du robot
$\gamma(\cdot)$	courbe paramétrée, spline
$B^i(\cdot), B_s^i(\cdot)$	$i^{\text{ième}}$ fonction d'une base de B -splines d'ordre N
γ_i	coordonnées de $\gamma(\cdot)$ dans la base précédente
$\hat{Y}$	vecteur/matrice des coordonnées de la spline décrivant Y
N	taille de $\hat{Y}$
$k + 1$	nombre de contraintes après discrétisation

Notation :	Description
p :	nombre de points de collocation
d :	degré d'un polynôme dans un algorithme
s :	ordre des splines
D :	direction de recherche au cours d'une "line search"
A_1, A_2 :	deux algorithmes à comparer
N_1, N_2 :	nombre d'opérations par itération pour A_1 et A_2
r_1, r_2 :	nombre d'itérations pour A_1 et A_2
K :	complexité de l'évaluation de $C(\cdot)$
R :	rapport des complexités des deux algorithmes
$\nabla_{\hat{Y}}$:	gradient par rapport au variables $\hat{Y}$

Les chapitres précédents ont permis d'établir des propriétés spécifiques aux systèmes G -singuliers. Ces propriétés peuvent influencer l'élaboration de lois de commande. En particulier, dans ce chapitre nous nous intéressons à l'utilisation de la commande optimale ayant une fonction de coût relative aux sorties plates de ces systèmes, notamment parce que c'est sans doute le type de commandes qui reflète le plus l'impact des singularités de saut. Une des constatations majeures de ce chapitre est le fait qu'une prise en compte adaptée de ces singularités peut en faire des atouts plutôt que des inconvénients.

Dans un premier temps, nous donnerons quelques exemples de problèmes de commande optimale appliqués aux systèmes décrits dans les chapitres précédents. Les sections suivantes 7.2 et 7.3 seront consacrées à la présentation d'algorithmes et de logiciels ("Nonlinear Trajectory Generation" notamment) conçus pour les systèmes à "dynamique rapide", surtout s'ils sont différentiellement plats. Dans les sections 7.4 et 7.5, nous utiliserons ces algorithmes sur les problèmes proposés afin de compléter l'analyse théorique faite pour les systèmes G -singuliers. Enfin en 7.6 et 7.7, nous proposerons une alternative à la manière dont ces algorithmes traitent les contraintes de parcours pouvant conduire à de meilleures performances (vitesse et précision de l'algorithme) notamment dans le cas des systèmes qui nous intéressent.

7.1 Exemples d'applications en commande optimale

7.1.1 Point de vue général

Nous souhaitons analyser brièvement ici les conséquences de l'isolation topologique de trajectoires G -singulières dans l'espace des trajectoires des sorties sur la localisation d'un optimum pour un problème de commande optimale. Le problème se pose particulièrement si l'on tient compte de bornes sur les variables, notamment sur les entrées.

Un algorithme de commande optimale se déroule de manière itérative : des trajectoires successives sont calculées de proche en proche, de manière à faire décroître la fonction de coût, tout en respectant les contraintes.

Or d'après le corollaire 3.4) de la proposition 3.3, on ne peut facilement passer continûment de l'ensemble des trajectoires non singulières à l'ensemble des trajectoires G -singulières. La procédure de convergence d'un algorithme sera donc mise en difficulté par cette isolation topologique.

De plus la dimension de cet ensemble de trajectoires dans l'espace des sorties est reliée à celle de $\mathbb{K}_0$, qui est de codimension 2 (au moins pour les systèmes plats), ce qui est un argument supplémentaire indiquant que l'on doit étudier et/ou rechercher séparément les minima locaux G -singuliers, puisque la dimension de cet espace facilite la possibilité qu'un algorithme l'évite.

Prise en compte de la singularité de saut

Soit un système ayant une singularité de saut sur une hypersurface $\mathbb{M}_0$ par rapport à des sorties Y . Soit $J(\mathcal{Y})$ une fonction de coût que l'on souhaite minimiser. Soit $C(\mathcal{X}) \leq c_{\max}$ une contrainte telle que $\lim_{\|\mathcal{X}\| \rightarrow +\infty} C(\mathcal{X}) = +\infty$.

On considère donc le problème de commande optimale suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}} J(\mathcal{Y}) \\ \dot{X} &= f(\mathcal{X}) \\ Y &= h(\mathcal{X}) \\ C(\mathcal{X}) &\leq c_{\max} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Il se pourrait que la solution optimale du problème (si elle existe) traverse la singularité de saut. Dans ce cas, d'après la proposition 3.3 et le corollaire 3.4 un algorithme fondé sur l'utilisation des sorties du système serait incapable de trouver ce minimum du fait de l'apparition de valeurs arbitrairement grandes pour $\|(\mathcal{X})\|$ et donc pour $C(\mathcal{X})$, à moins qu'à chaque itération, la trajectoire calculée traverse la singularité de saut, ce qui semble assez improbable si cette information n'a pas été introduite intentionnellement.

En conséquence, pour permettre à l'algorithme de converger vers une trajectoire traversant la singularité de saut, il est nécessaire d'introduire quelques informations structurelles supplémentaires dans l'algorithme. On peut par exemple formuler un problème de commande optimale modifié, utilisant un paramètre supplémentaire τ à optimiser ainsi qu'une contrainte supplémentaire :

$$\begin{aligned}
\min_{\mathcal{Y}, \tau} J(\mathcal{Y}) \\
\dot{X} &= f(\mathcal{X}) \\
Y &= h(\mathcal{X}) \\
C(\mathcal{X}) &\leq c_{\max} \\
t_0 &\leq \tau \leq t_f \\
\mathcal{X}(\tau) &\in \mathbb{M}_0
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Ensuite, en pratique, il faudra résoudre successivement le problème de départ (7.1) puis le problème modifié (7.2) et sélectionner la meilleure des deux solutions, qui sont chacune des minima locaux.

7.1.2 Rail rotatif : poursuite optimale de trajectoires

Dans cette section, un problème de poursuite optimale est envisagé et un cas particulier sera analysé en détail pour le système du rail rotatif.

Le problème de poursuite

Nous reprenons le problème qui a été proposé et résolu en section 2.2.4, page 36 et le reformulons à l'aide des sorties plates. L'intérêt ici n'est pas l'obtention des solutions par cette méthode, mais de disposer d'un problème dont on a les solutions analytiques et pour lequel on pourra donc établir des comparaisons avec des solutions numériques.

Soit (μ_d, θ_d) une trajectoire désirée, définie sur $] -\infty, \infty[$. Soit une fonction de coût

$$J(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|Y_d(t) - Y(t)\|^2 dt,$$

et une contrainte $|u_2| \leq u_{2\max}$, aboutissant au problème suivant :

$$\begin{aligned}
\min_{\mathcal{Y}} J(\mathcal{Y}) \\
\left| \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right| &\leq u_{2\max}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

De nouveau, pour tenir compte des trajectoires G -singulières on examine aussi le problème modifié, comme cela était mentionné dans les pages précédentes :

$$\begin{aligned}
\min_{\mathcal{Y}, \tau} J(\mathcal{Y}) \\
\left| \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right| &\leq u_{2\max} \\
t_0 &\leq \tau \leq t_f \\
(y_1(\tau), y_2(\tau)) &= (0, 0)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

On notera rapidement qu'un nouveau problème se pose : à l'endroit où l'on impose de passer par la singularité, la fonction de contrainte n'est pas définie,

puisque son dénominateur et son numérateur s'annulent. Plusieurs possibilités sont envisageables pour remédier à cet inconvénient. Une première idée est de modifier la contrainte à proximité de la singularité, avec des méthodes fondées sur la règle de L'Hospital. Cela a tendance à augmenter la complexité de traitement du problème du point de vue algorithmique, et risque également de provoquer des imprécisions dans la zone critique autour de la singularité.

Une approche plus simple en l'occurrence et généralisable à beaucoup d'autres situations est de reformuler la contrainte en multipliant les deux membres par le dénominateur, qui est toujours positif¹. Cela donne simplement :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}, \tau} J(\mathcal{Y}) \\ |y_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2| \leq u_{2\max}(y_1^2 + y_2^2) \\ t_0 \leq \tau \leq t_f \\ (y_1(\tau), y_2(\tau)) = (0, 0) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Le problème d'existence disparaît. Nous traitons dans ce qui suit, une classe de sous problèmes pour lesquels on dispose de la solution optimale sous forme analytique.

Analyse pour des trajectoires de référence particulières

Analysons la solution générale des problèmes précédents pour une trajectoire de référence rectiligne uniforme sur un intervalle de temps infini. En considérant les invariances par rotation et symétrie, la trajectoire de référence se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} y_{1d}(t) &= vt \\ y_{2d}(t) &= y_{20}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

pour une fonction de coût

$$J(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (vt - y_1(t))^2 + (y_{20} - y_2(t))^2 dt.$$

Introduisons une variable de temps adimensionnelle $\bar{t} = u_{2\max} t$ et le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v}{u_{2\max}}, \quad \delta = \frac{y_{20}}{\bar{v}} \\ \bar{u}_i &= \frac{u_i}{u_{2\max}}, \quad \text{for } i = 1, 2, \\ \bar{y}_i &= \frac{y_i}{\bar{v}}, \quad \text{for } i = 1, 2. \end{aligned}$$

¹ Si le dénominateur n'est pas toujours positif on peut envisager de multiplier par le carré.

Il apparaît que cette formulation sans dimension dépend seulement du paramètre δ :

$$\min_{(\bar{y}_1, \bar{y}_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{y}_1(t))^2 + (\delta - \bar{y}_2(t))^2 dt.$$

$$\left| \frac{\frac{d\bar{y}_2}{dt} \bar{y}_1 - \frac{d\bar{y}_1}{dt} \bar{y}_2}{\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2} \right| \leq 1 \quad (7.7)$$

C'est exactement le cas de figure étudié dans la section 2.2.4 page 36. Comme nous l'avons démontré, deux minima locaux peuvent être obtenus analytiquement. Le premier est une trajectoire non-singulière tandis que la seconde traverse la singularité de saut et est donc solution du problème restreint 7.4.

Notant J_{ns} et J_s les coûts respectifs des minima locaux non-singuliers et G -singuliers, il est possible d'établir une comparaison, dépendant de la valeur de $\delta \geq 0$ (les valeurs négatives donnent des résultats symétriques) :

- $\delta \geq 1$: la meilleure solution est la référence elle-même car c'est une trajectoire admissible.
- $\delta^* < \delta < 1$: la meilleure solution est la non-singulière car $J_{ns} < J_s$.
- $\delta = \delta^* \approx 0.36$: les deux trajectoires sont équivalentes pour le coût J : $J_{ns} = J_s = J^* \approx 0.123$, le choix peut s'appuyer sur un critère secondaire.
- $0 < \delta < \delta^*$: le minimum G -singulier est global car $J_{ns} > J_s$.
- $\delta = 0$: la meilleure solution est de nouveau la référence elle-même car elle est admissible, et en l'occurrence G -singulière.

Ces résultats apparaissent sur les figures 7.1, 7.2 et 7.3. La figure 7.1 montre l'évolution de J_{ns} et J_s en fonction de δ , on fait ainsi apparaître le coût minimal $J_{\min}$ en fonction de δ . La figure 7.2 montre une comparaison entre les deux trajectoires minima locaux ainsi que la référence, pour trois valeurs de δ . Pour les mêmes valeurs de δ , la figure 7.3 illustre l'évolution temporelle des entrées : pour la seconde entrée, la violation de la borne apparaît clairement concernant la référence, de même que le temps de saturation pour les deux minima admissibles.

Nous exploiterons les résultats de cette étude dans la partie concernant les simulations numériques en 7.5.1.

7.1.3 Robot unicycle : changement de posture en temps minimal

Comme ce problème rentre dans le cadre de la thèse, nous souhaitons l'évoquer ici, mais le survolons succinctement car plusieurs variantes ont été décrites dans différents ouvrages qui en proposent une résolution très détaillée.

Posé à partir d'une modélisation cinématique et des contraintes sur les entrées, il a généralement une solution analytique connue, si l'on ne considère pas la présence d'obstacles. On pourra consulter par exemple [13], [1] ou encore

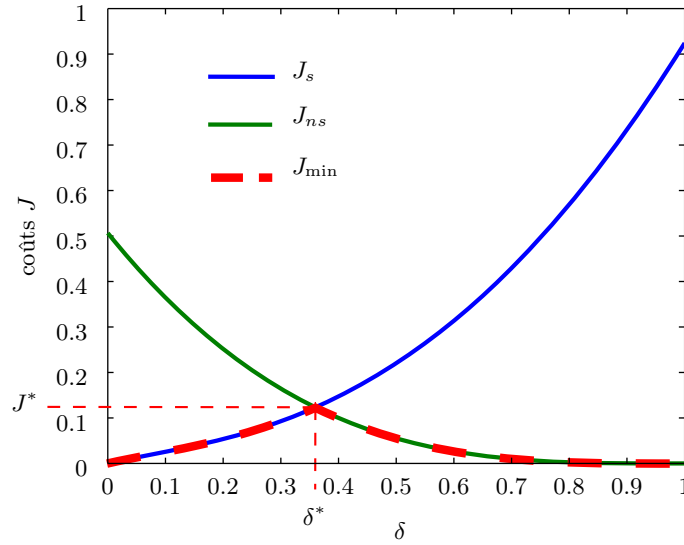


Fig. 7.1. J_{ns} et J_s en fonction de $\delta \in [0, 1]$.

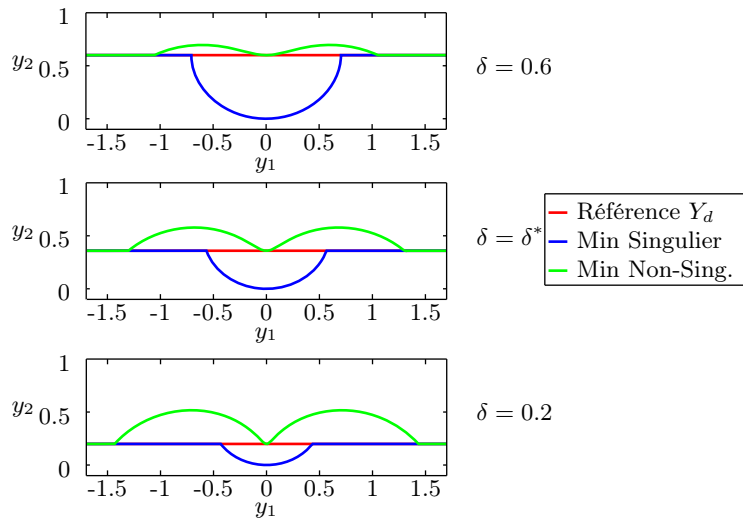


Fig. 7.2. Les deux trajectoires minima locaux pour différentes valeurs de $\delta \in [0, 1]$.

[34] qui donnent la solution du problème pour différents types de contraintes cinématiques.

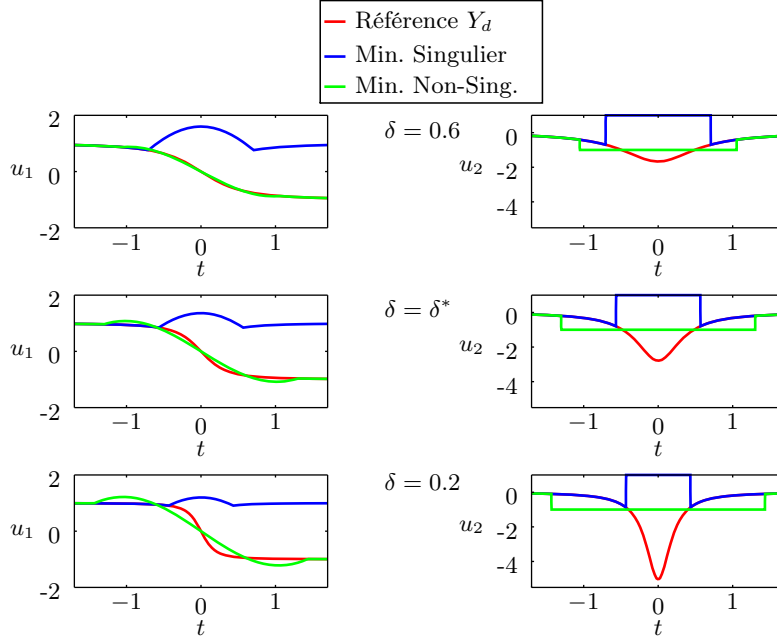


Fig. 7.3. Evolution des entrées pour différentes valeurs de $\delta \in [0, 1]$.

L'approche que nous proposons ici a ceci de spécifique qu'elle considère que le robot n'a pas "d'avant" ni "d'arrière". Si l'on se réfère au système (1.1) cela revient à ne s'intéresser qu'aux variables de position (x_1, x_2) en ne tenant pas compte de θ . Ce point de vue est donc adapté aux robots possédant une symétrie, sinon circulaire (ce qui est courant), au moins par rapport à l'axe des roues.

Posons le problème : on veut passer en temps minimal d'un état initial $(x_{10}, x_{20}, \theta_0)$ à un état final contraint par :

$$(x_1(t_f), x_2(t_f), \theta(t_f)) = (x_{1f}, x_{2f}, \theta_f \in [\pi]).$$

En d'autres termes, l'état final est fixé avec une orientation définie à π près. Bien entendu on veut tenir compte de contraintes qui peuvent être de l'un des types mentionnés dans les ouvrages cités plus haut.

Dans le cas d'une résolution sans obstacle, il suffit alors d'appliquer les solutions analytiques existantes déjà mentionnées : puisque l'orientation finale n'est donnée qu'à π près, on doit simplement comparer les deux solutions analytiques correspondant aux deux orientations finales possibles, puis on choisit la plus avantageuse. Comme on s'en rendra compte en consultant les articles proposés,

dans de nombreux cas, l'une des deux orientations conduira à une trajectoire G -singulière, tandis que l'autre conduira à une trajectoire non singulière.

En cas de présence d'obstacles répartis dans le plan, il devient moins évident d'appliquer immédiatement les solutions analytiques précédentes. Dans cette perspective, l'étude de l'impact de la singularité de saut de ces robots peut s'avérer utile, surtout si l'on souhaite employer un logiciel tel que NTG, présenté dans la suite de ce chapitre.

7.1.4 Poursuite d'une trajectoire pour le robot à roues orientables

Comme cela a été fait pour le rail rotatif, nous proposons une formulation d'un problème de suivi optimal d'une trajectoire de référence, en utilisant les sorties plates.

Soit $\mathcal{X}_d \subset \mathcal{E}$ une trajectoire désirée dans l'espace d'état et des entrées, définie sur $] -\infty, \infty[$. Soit une fonction de coût dépendant des sorties $Y = (x_1, x_2, \theta)$

$$J(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|Y_d(t) - Y(t)\|^2 dt,$$

donnant lieu au problème de commande optimale suivant :

$$\begin{aligned} \min_Y J(Y) \\ |u_1| \leq u_{\max} \\ |u_2| \leq u_{\max} \end{aligned} \quad (7.8)$$

que l'on peut traduire en fonction des sorties plates sous la forme :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}} J(\mathcal{Y}) \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 + a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 + a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2} \right| \leq u_{\max} \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 - a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 - a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2} \right| \leq u_{\max} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Il s'agit bien du même type de problèmes que celui du rail rotatif. Les enjeux sont donc les mêmes, mais le système considéré est nettement plus complexe et possède un plus grand nombre de singularités. Trouver des solutions analytiques pour ce problème est assez ardu pour ne pas dire impossible. On se contentera donc de tenter des résolutions numériques à l'aide du logiciel NTG présenté dans la section 7.3.

Cela dit on pourra parfois tirer profit des résultats du problème du rail rotatif, des propriétés des singularités de saut et du fait qu'il s'agit d'un problème de poursuite, ce qui permet d'avoir une certaine intuition sur l'allure de la trajectoire optimale, par comparaison avec la référence si celle-ci dépasse

“modérément” les bornes sur les entrées.

De nouveau, pour tenir compte des trajectoires G -singulières on doit également examiner des problèmes modifiés. Une différence notable avec le rail rotatif est qu’il y a plusieurs singularités de saut, définies dans l’espace des sorties par d’autant plus d’équations qu’il y a de roues : pour r roues, on a 2^r combinaisons de passage ou non par des singularités, en admettant que les trajectoires ne sont pas trop biscornues et ne nécessitent pas le passage par une singularité plus d’une fois sur l’intervalle de temps considéré.

Dans notre cas, $r = 2$, on a donc trois problèmes supplémentaires possibles :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}, \tau} J(\mathcal{Y}) \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 + a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 + a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2} \right| &\leq u_{\max} \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 - a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 - a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2} \right| &\leq u_{\max} \\ t_0 \leq \tau \leq t_f \\ (V_1(\tau), V_2(\tau) + a\dot{y}_3(\tau)) &= (0, 0) \end{aligned} \quad (7.10)$$

ou

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}, \tau} J(\mathcal{Y}) \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 + a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 + a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2} \right| &\leq u_{\max} \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 - a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 - a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2} \right| &\leq u_{\max} \\ t_0 \leq \tau \leq t_f \\ (V_1(\tau), V_2(\tau) - a\dot{y}_3(\tau)) &= (0, 0) \end{aligned} \quad (7.11)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}, \tau_1, \tau_2} J(\mathcal{Y}) \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 + a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 + a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 + a\dot{y}_3)^2} \right| &\leq u_{\max} \\ \left| \frac{V_1(\dot{V}_2 - a\ddot{y}_3) - \dot{V}_1(V_2 - a\dot{y}_3)}{V_1^2 + (V_2 - a\dot{y}_3)^2} \right| &\leq u_{\max} \\ t_0 \leq \tau_1 \leq t_f \\ t_0 \leq \tau_2 \leq t_f \\ (V_1(\tau_1), V_2(\tau_1) + a\dot{y}_3(\tau_1)) &= (0, 0) \\ (V_1(\tau_2), V_2(\tau_2) - a\dot{y}_3(\tau_2)) &= (0, 0) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ce problème de poursuite étant maintenant posé, le cas de trajectoires de référence trochoïdales² sera analysé dans la partie consacrée aux simulations numériques 7.5.2.

7.2 Paramétrisations adaptées

Cette section reprend une idée utilisée depuis longtemps en planification de trajectoires lorsque l'on dispose de sorties plates. Lorsque l'on utilise de telles sorties, notamment en vue d'obtenir l'état et les entrées leur correspondant, on est amené à calculer des dérivées de ces fonctions, éventuellement à plusieurs ordres. Dans ce cadre, du point de vue numérique, certaines paramétrisations sont peu fiables ou impliquent une utilisation de filtres. C'est se qui ce passe lorsque l'on discrétise une fonction et que l'on veut obtenir sa dérivée : un bruit numérique important apparaît, et il peut devenir catastrophique dès la dérivée seconde. Une possibilité est d'utiliser un filtre de façon à gommer les irrégularités inhérentes à ce genre de paramétrisations qui correspond en fait à projeter la fonction de départ dans un espace où l'on considère tout au plus que les fonctions sont continues, puisque cela revient à dire que l'on approche la fonction de départ comme si c'était une somme pondérée de fonctions rectangles ou triangles.

Afin d'éviter toutes ces difficultés il est clairement préférable de projeter les sorties dans un espace où l'on sait que l'on peut appliquer l'opérateur de dérivation autant de fois que nécessaire, éventuellement seulement par morceaux. De nombreuses possibilités sont envisageables, mentionnons simplement les sommes de Fourier, les fonctions polynômiales par morceaux et les NURBS. Le logiciel NTG utilise pour sa part des B -splines qui sont des polynômes par morceaux, apparentées aux courbes de Bézier.

Quelle que soit la méthode choisie parmi les précédentes, le principe est toujours le même. On définit, sur un intervalle de temps adéquat, une base de fonctions de cardinal fini $s + 1$: $(B^i(t))_{i \in \{0, \dots, s\}}$. Une fonction γ est alors simplement décrite par ses coordonnées γ_i dans cette base :

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^s B^i(t) \gamma_i.$$

En pratique, les γ_i peuvent être des vecteurs de coordonnées, plutôt que des scalaires, car en dehors des systèmes SISO, il y a souvent plusieurs sorties.

² L'aspect trochoïdal de la trajectoire concerne surtout les roues.

7.3 Un exemple de logiciel en commande optimale : NTG

Les méthodes numériques de résolution de problèmes de commande optimale sont nombreuses et de différentes sortes, les unes dites “directes”, proches des méthodes d’optimisation, les autres dites “indirectes” liées à la résolution numérique d’équations différentielles avec conditions aux deux bouts. Rares, parmi ces méthodes, sont celles qui peuvent être exploitées sur des systèmes dynamiques en temps réel. Nous nous pencherons sur un cas particulier de méthode directe, qui tire parti du degré relatif des sorties du système et permet dans plusieurs cas d’obtenir des solutions quasi-optimales pour un temps de calcul réduit.

NTG, acronyme pour “Nonlinear Trajectory Generation”, est un logiciel, mis au point dans les années 2000 à 2002 à CalTech (voir par exemple [25], [31]), permettant de transformer un problème de commande optimale en un problème d’optimisation non linéaire, puis de le transmettre sous cette forme à un solveur non linéaire, en l’occurrence le logiciel NPSOL. L’objectif principal de cette démarche est de parvenir à un outil suffisamment rapide pour être utilisé en temps réel sur des systèmes mécaniques. Une toolbox Matlab, dénommée OPTRAGEN (voir [2]), est issue de ce travail et permet l’utilisation des mêmes outils, dans un programme Matlab, mais n’a en revanche pas pour vocation une utilisation “temps réel”.

7.3.1 Le problème initial

A la suite de la section 2.2, nous examinons un problème de commande optimale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 J(U, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} L(\mathcal{X}, t) dt \\
 \dot{X} &= f(\mathcal{X}) && \text{contrainte différentielle,} \\
 C_i(X(t_0), t_0) &\leq 0 && \text{contraintes initiales,} \\
 C_p(\mathcal{X}, t) &\leq 0 && \text{contraintes de parcours,} \\
 C_f(X(t_f), t_f) &\leq 0 && \text{contraintes finales.}
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

D’un point de vue analytique, X et U sont des fonctions définies sur l’intervalle de temps $[t_0, t_f]$ et sont à valeurs dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. En général, ces fonctions appartiennent à un espace de dimension infinie. Cet espace peut varier suivant le type de problèmes, mais on peut considérer par exemple qu’il s’agit de fonctions continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En outre, la fonction définissant les contraintes de parcours est de même nature.

La recherche des fonctions U et X optimales revient à la recherche de leur valeur à chaque instant, ce qui est un problème de dimension infinie du point

de vue des variables. Du même coup, le problème possède aussi une infinité de contraintes. Dans le langage de l'optimisation ce genre de problèmes de commande optimale est un problème de programmation non linéaire infini.

Le but d'NTG est d'en faire un problème de programmation non linéaire fini.

7.3.2 Exploitation des sorties plates

L'idée majeure qui sous-tend NTG est de parvenir à réduire un problème initialement de dimension non dénombrable à un problème avec un nombre fini de variables. Bien que l'on puisse étendre l'utilisation à n'importe quel type de système différentiel, l'efficacité d'NTG repose sur l'utilisation de sorties plates. A défaut d'avoir un système parfaitement plat, on peut choisir des sorties ayant un degré relatif élevé, ce qui simplifie malgré tout les calculs et réduit le nombre de variables.

En effet, dans le cas général d'un système $\dot{X} = f(X)$ où l'on n'exploite pas de sorties plates, il peut s'avérer nécessaire de paramétrer non seulement les entrées U de dimension m , mais également l'état X de dimension n . Il faudra ensuite s'assurer que ces paramétrisations vérifient bien la contrainte différentielle du système. Il est donc clair que l'introduction de sorties plates peut à elle seule simplifier grandement le problème, puisqu'en remplaçant U et X par leur expression en fonction des sorties, on obtient un coût et des contraintes qui ne dépendent plus que de m fonctions au lieu de $m + n$ et de plus on peut se passer de la contrainte différentielle dans la formulation du problème. Formellement, on passe de (7.13) au problème :

$$\begin{aligned} \bar{J}(Y, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} L(\psi(\mathcal{Y}, t)) dt, \\ \bar{C}_i(\mathcal{Y}(t_0)) &\leq 0 && \text{contraintes initiales,} \\ \bar{C}_p(\mathcal{Y}(t), t) &\leq 0 && \text{contraintes de parcours,} \\ \bar{C}_f(\mathcal{Y}(t_f)) &\leq 0 && \text{contraintes finales.} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Jusqu'ici nous n'avons pas encore discuté de la nature de l'espace des fonctions dans lequel le problème est posé. Souvent on considère que l'entrée U sera une fonction éventuellement discontinue tandis que l'état sera constitué de fonctions au moins continues dont la régularité dépendra de leur implication dans l'équation différentielle du système ; intuitivement une variable d'état sera d'autant plus lisse que le nombre de niveaux d'intégration qui la sépare d'une variable d'entrée est grand. En conséquence, la reformulation en terme de sorties plates devrait tenir compte de cela, mais on ne peut pas toujours établir d'équivalence, et c'est une des raisons pour lesquelles l'étude approfondie des systèmes plats est généralement faite pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, les entrées y compris, ce qui permet d'avoir alors une parfaite correspondance entre une trajectoire des sorties et une trajectoire du système.

NTG supprime complètement ce problème en pratique, comme le présente le paragraphe suivant.

7.3.3 Introduction des B -splines

L'étape suivante réduit le problème à un espace de fonctions de dimension finie. Comme on l'a déjà mentionné plus haut, NTG paramètre les sorties Y à l'aide de B -splines³. La base des B -splines sera dénotée en fonction du degré des polynômes et du nombre d'intervalles, le tout conduisant à $N + 1$ fonctions de base : $(B_s^i(t))_{i=0}^s$. D'où l'écriture de Y dans cette base :

$$Y(t) = \sum_{i=0}^s B(t)_s^i \hat{y}_i, \quad (7.15)$$

où les $\hat{y}_i$ sont des vecteurs à m composantes, autant que de sorties plates.

Les B -splines étant des fonctions polynômiales par morceaux, elles sont définies sur une succession d'intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ à l'intérieur desquels elles sont de classe C^∞ . Cette propriété permet donc d'éviter tout problème de régularité des fonctions, à ceci près qu'il convient d'imposer des conditions supplémentaires à la jonction de deux intervalles successifs. Les instants t_i de jonction sont appelés noeuds. Ces différents éléments sont repris sur les figures 7.4 et 7.5.

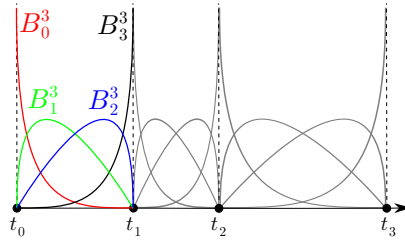


Fig. 7.4. Base de fonctions B -spline d'ordre trois.

L'introduction de la paramétrisation de Y sous forme de B -spline, implique que $Y(t)$, et donc également $\mathcal{Y}(t)$ est entièrement décrit par l'ensemble de vecteurs $\hat{Y} = [\hat{y}_0 \dots \hat{y}_s]$. Le problème de départ est maintenant projeté dans le nouvel espace de fonctions, ce qui donne :

³ Sur ce sujet se reporter par exemple à [4]

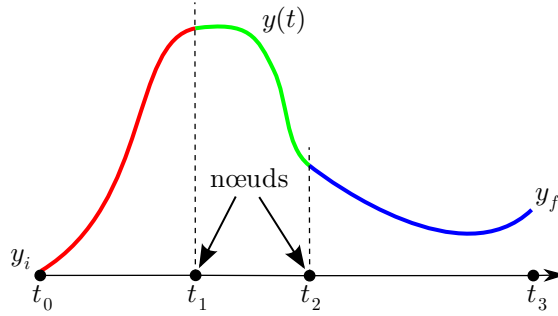


Fig. 7.5. Un exemple de B -spline scalaire sur trois intervalles successifs.

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}(\hat{Y}, t_f) &= \int_0^{t_f} \tilde{L}(\hat{Y}, t) dt, \quad \text{où } \hat{Y} = [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_s] \\
 \tilde{C}_i(\hat{Y}) &\leq 0 \quad \text{contraintes initiales,} \\
 \tilde{C}_p(\hat{Y}, t) &\leq 0 \quad \text{contraintes de parcours,} \\
 \tilde{C}_f(\hat{Y}, t_f) &\leq 0 \quad \text{contraintes finales.}
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Au stade où nous en sommes, le nombre de variables du problème est fini, mais les contraintes de parcours restent non dénombrables. On est passé d'un problème infini à un problème dit "semi-infini".

7.3.4 Discrétisation des contraintes de parcours

Pour ramener le problème à un ensemble fini de contraintes, on va ajouter à l'ensemble des noeuds, un ensemble de points dits "de collocation" pour lesquels les contraintes de parcours devront être vérifiées. Le choix de cet ensemble de points doit être d'un pas suffisamment fin pour capturer précisément la contrainte sans risquer qu'elle soit violée entre deux points de collocation. D'un autre côté, il ne doit pas être trop grand non plus pour limiter la complexité du problème d'optimisation. Le problème d'optimisation non linéaire obtenu est sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}(\hat{Y}) &= \int_0^{t_f} \tilde{L}(\hat{Y}, t) dt, \\
 \tilde{C}_0(\hat{Y}) &\leq 0 \\
 &\vdots \\
 \tilde{C}_k(\hat{Y}, t_f) &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

Dans la pratique, les solveurs utilisent toujours une certaine tolérance (dont la valeur est réglable dans les options) quant au dépassement des contraintes.

Il est maintenant possible de transférer ce problème à un solveur non-linéaire.

7.3.5 Le solveur non linéaire

Le solveur non-linéaire NPSOL utilise fondamentalement une méthode SQP. Les détails de la programmation de cette méthode sont bien entendu gardés secrets par les concepteurs, mais nous pouvons au moins présenter les points généraux de la méthode comme cela est fait dans le manuel du logiciel [17].

Une méthode SQP, pour “Sequential Quadratic Programming” est une méthode dite de point intérieur, c’est à dire qu’elle procède par itérations successives de façon à ce que chaque itéré appartienne au domaine défini par les contraintes. Dans le cas SQP, on alterne entre des itérations majeures et des itérations dites mineures. Plus précisément, une suite d’itérations mineures prépare chaque itération majeure.

Appelons $\hat{Y}$ le vecteur des variables du problèmes au début de l’itération majeure en cours, et $\hat{Y}_+$ le même vecteur après avoir été modifié pendant cette itération. Les itérations mineures auront pour objectif de déterminer une direction de recherche D , à partir de laquelle on cherchera le prochain itéré sous la forme

$$\hat{Y}_+ = \hat{Y} + \alpha D,$$

où α est obtenue à l’aide d’une “line search” dans la direction D , qui s’effectue à l’aide de critères comme les conditions de Wolfe par exemple.

Les itérations mineures sont utilisées pour résoudre le problème quadratique suivant, qui est une approximation locale du problème initial :

$$\begin{aligned} \min_D \quad & \frac{1}{2} D^T H^*(\hat{Y}) D + \nabla_{\hat{Y}} \tilde{J}(\hat{Y})^T D \\ & \tilde{C}_i(\hat{Y}) + \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}_i(\hat{Y})^T D \leq 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, k\} \end{aligned} \quad (7.18)$$

où l’on a une approximation quadratique du coût $\tilde{J}$ à l’aide de sa matrice hessienne et de son jacobien pris en $\hat{Y}$, et une approximation linéaire des contraintes⁴.

7.4 NTG pour des systèmes G -singuliers

La section 7.1.1 a démontré qu’il est nécessaire d’apporter une adaptation d’un problème de commande optimale dans le cas d’un système avec singularité de saut, si l’on veut être en mesure de détecter une trajectoire optimale (au moins localement) G -singulière.

⁴ C’est de la succession de ces problèmes quadratiques que provient le nom de la famille d’algorithmes SQP.

Examinons rapidement comment cette adaptation peut se formuler dans le cadre de l'utilisation d'un logiciel comme NTG avec un système différentiellement plat. Pour ce genre de systèmes il est très naturel d'avoir une fonction de coût sous la forme $J(\mathcal{Y})$, comme on l'a vu avec le problème 7.14. Dans ce contexte, les problèmes (7.1) et (7.2) deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}} J(\mathcal{Y}) \\ \widehat{C}(\mathcal{Y}) \leq c_{\max} \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{Y}, \tau} J(\mathcal{Y}) \\ \widehat{C}(\mathcal{Y}) \leq c_{\max} \\ t_0 \leq \tau \leq t_f \\ \mathcal{Y}(\tau) \in \mathbb{K}_0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Pour un emploi dans NTG, la conséquence de cette courte description est que l'ensemble des paramètres pour le problème d'optimisation que l'on considère est constitué d'une part du vecteur $\widehat{Y}$ définissant les trajectoires des sorties, et d'autre part du paramètre τ que l'on a ajouté pour tenir compte de minima locaux G -singuliers.

τ est soumis à deux types de contraintes. La première de ces contraintes est une double inégalité, qui ne fait intervenir que τ . Etant tout à fait explicite, il n'y a pas grand chose à approfondir de ce côté. En revanche, la seconde contrainte, est très différente : elle met τ en rapport avec $\mathcal{Y}$ et est formulée comme une contrainte d'appartenance à la variété $\mathbb{K}_0$. Comme dans les exemples que nous avons présentés, cette variété est souvent un sous-espace vectoriel, ou tout au moins une variété différentielle que l'on peut définir à partir d'une équation du type $F(\mathcal{Y}(\tau)) = 0$ qui se traduira alors dans le problème d'optimisation par :

$$\tilde{F}(\widehat{Y}, \tau) = 0.$$

S'il s'agit d'un sous-espace vectoriel pour $\mathcal{Y}$, alors cette dernière contrainte est linéaire en $\widehat{Y}$ et polynômiale par morceaux en τ .

7.5 Simulations numériques

Le but de cette section est de mettre en évidence, à partir de simulations, les éléments évoqués dans la thèse quant à l'impact des singularités de saut sur la résolution de problèmes de commande optimale, et d'analyser les performances de logiciels comme NTG dans la résolutions des problèmes proposés dans la thèse. On reprendra notamment le problème de poursuite du rail rotatif résolu en 7.1.2. Les simulations ont été réalisées avec MATLAB, à l'aide de la boîte à outils OPTRAGEN 2 (cf. [2]). OPTRAGEN est l'équivalent de NTG pour MATLAB, néanmoins on doit noter deux différences importantes :

- d’une part, contrairement à NTG, cette boîte à outils est ralentie par le fait qu’elle utilise Matlab, ce qui augmente le temps de calcul par rapport à NTG qui est un programme compilé. Ceci fait qu’OPTRAGEN n’est pas destiné à une application réelle, mais à des simulations,
- d’autre part, le logiciel d’optimisation avec lequel est interfacé OPTRAGEN est SNOPT, tandis qu’NTG utilise NPSOL. Même si ces deux solveurs utilisent les mêmes outils théoriques, fondés sur des algorithmes SQP, il se peut que les performances de l’un soient plus faibles que celles de l’autre.

On s’attachera donc à évaluer l’influence du nombre de paramètres, du nombre de points de collocation, du choix de la trajectoire initiale et de la manière d’imposer les contraintes, sur la convergence ou non de l’algorithme, sur sa capacité à détecter un minimum G -singulier ou non et sur le type d’erreurs survenues.

7.5.1 Poursuite d’une trajectoire pour le rail rotatif

Reprenons le problème proposé en 7.1.2. Les figures 7.6 à 7.8 comparent les résultats obtenus par OPTRAGEN-SNOPT avec les solutions exactes du problème pour les trois valeurs de δ déjà utilisées sur les figures 7.2 et 7.3. Les paramètres utilisés pour obtenir ces figures sont les suivants :

- nombre d’intervalles de splines : 3,
- degré des polynômes : 5,
- nombre de points de collocation : 101.

Quelques remarques s’imposent. Tout d’abord, dans les exemples proposés ici, la convergence a été assez rapide, en choisissant comme essai initial

- la trajectoire de référence qui n’est pas admissible, pour $\delta > \delta^*$,
- une trajectoire proche de l’optimum non-singulier pour $\delta < \delta^*$.

Ensuite, il est évident que la solution obtenue est effectivement non singulière et proche de la véritable solution optimale non singulière non projetée dans un sous-espace de fonctions.

Néanmoins, pour obtenir un comportement suffisamment stable de l’algorithme, il a été nécessaire d’être assez sévère sur le choix des paramètres : le nombre de variables définissant les trajectoires n’est pas très important, tandis que le nombre de points de collocation semble surdimensionné. En effet, si l’on choisit immédiatement un nombre important d’intervalles ou un degré élevé de polynômes, l’algorithme peut diverger de manière tout à fait imprévisible comme dans les figures 7.9 et 7.10 où l’on a procédé exactement comme précédemment, mais on a augmenté le nombre d’intervalles à 5.

De même, quelqu’un souhaitant capturer une solution singulière et commençant proche de celle-ci peut obtenir des résultats apparemment probants comme on le voit sur la figure 7.11. En réalité, les points de collocation ne permettent pas de capturer la violation de la contrainte que l’on peut observer sur variable u_2 . Ceci n’est donc pas en contradiction avec le corollaire 3.4 affirmant

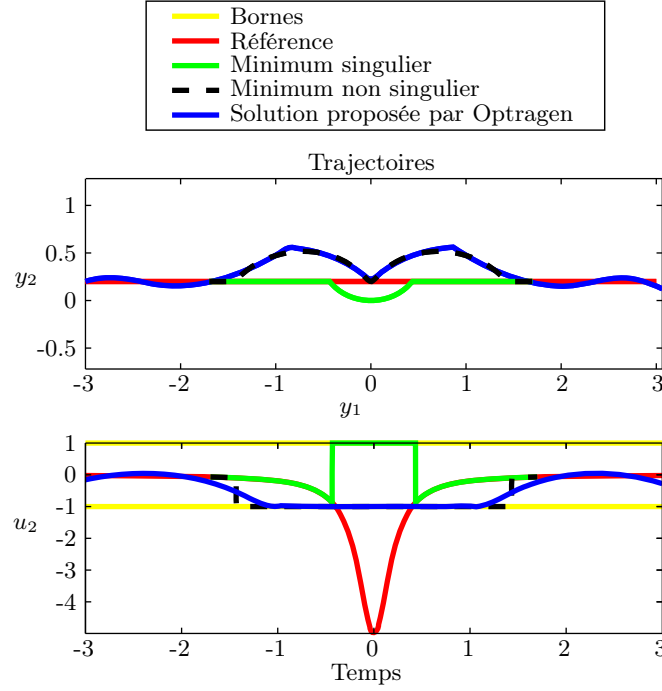


Fig. 7.6. Trajectoires optimales singulières, non singulières ou obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT pour $\delta = 0.2$.

que l'on ne peut pas converger vers une solution singulière, puisqu'en réalité la solution trouvée n'est pas admissible.

Ajoutons à cela que l'on observe tout de même le comportement attendu d'après le corollaire susmentionné, c'est à dire que si l'on choisit comme premier essai une trajectoire proche de la singularité et non admissible aux points de collocation l'algorithme aura tendance à évoluer vers le minimum non singulier.

Il peut cependant arriver que ce ne soit pas le cas du fait que la contrainte est discrétisée aux points de collocation. Deux situations peuvent alors se produire.

- Soit l'algorithme converge vers une solution proche du minimum singulier du fait que les points de collocation n'empêchent pas que la contrainte ne soit pas satisfaite par endroits, mais alors il est dangereux de retenir ce genre de solutions. En effet, l'application stricte de l'expression analytique de la commande serait très dangereuse du fait que la période d'échantillonnage des actionneurs n'a *a priori* rien à voir avec les points de collocation. Elle devrait même en théorie être plus fine, ce qui pourrait bien provoquer un dysfonctionnement si l'on applique la commande planifiée sans précaution. Si l'on a beaucoup de points de collocation, une

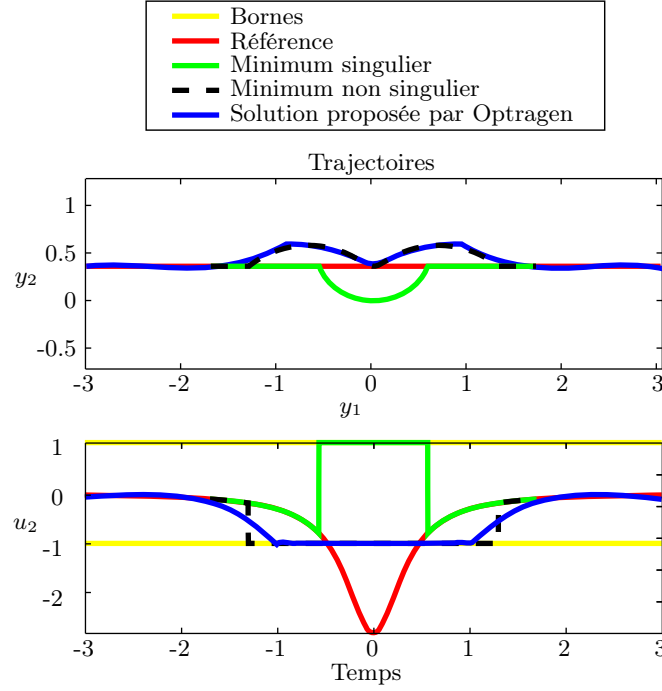


Fig. 7.7. Trajectoires optimales singulières, non singulières ou obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT pour $\delta = 0.36 = \delta^*$.

manière de parer à cela serait d'appliquer un filtre à la commande obtenue, une fois échantillonnée convenablement. Une autre solution peut être sans doute trouvée sachant qu'en pratique, il est souhaitable d'appliquer un contrôle par feedback une fois la trajectoire planifiée. Ainsi une autre façon d'exploiter utilement ces solutions quasi-singulières est de prévoir une loi de commande par feedback qui tiendra compte des contraintes de façon à parer à d'éventuels défaut de planification. Un exemple de commande possible est d'utiliser le travail réalisé par I.Motte [28].

- Soit l'algorithme converge vers une solution extrêmement éloignée de la référence comme sur les figures 7.9 et 7.10. Dans cette dernière hypothèse, ce qui se produit sans doute est le phénomène suivant. La présence de portions de trajectoires passant près de la singularité implique que les contraintes ne sont pas respectées sur certains intervalles situés strictement entre les points de collocation, alors qu'elles le sont en chaque point de collocation, puisque c'est là que les contraintes sont prises en compte par le solveur non linéaire. Si l'on imposait une déformation continue à la trajectoire, elle devrait se faire en imposant que les contraintes soient

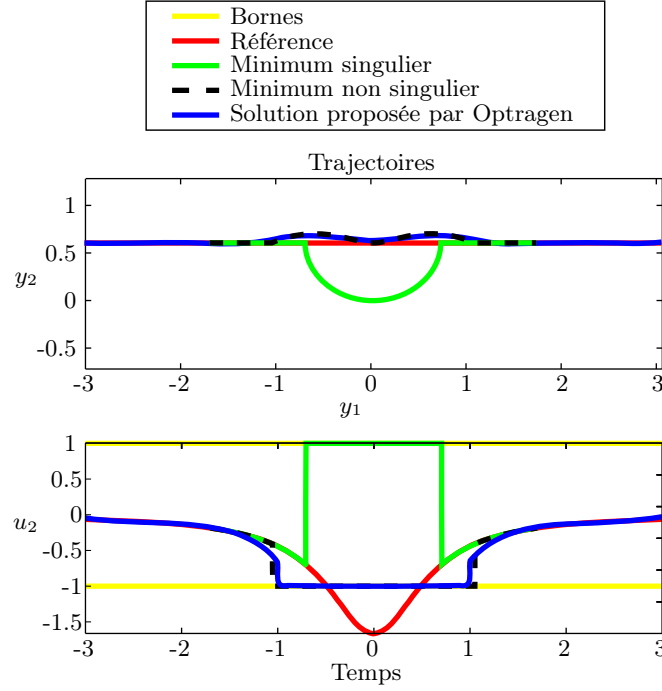


Fig. 7.8. Trajectoires optimales singulières, non singulières ou obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT pour $\delta = 0.6$.

satisfaites en chaque point de collocation. Il est alors clair qu’une forte proportion des déformations possibles contribuerait à déplacer sur un point de collocation une valeur d’un intervalle où la fonction de contrainte dépasse les bornes autorisées, comme cela est illustré sur la figure 7.12. Ceci étant prohibé par le solveur, on comprend facilement que ce dernier puisse s’enfermer dans des “solutions” où les contraintes ne sont pas satisfaites sur certains intervalles situés entre deux points de collocation successifs et ne plus parvenir à en sortir, car il faudrait pour cela traverser un domaine dans l’espace des trajectoires où les contraintes ne sont pas satisfaites aux points de collocation. Ce domaine constitue une barrière qui peut être, dans certaines situations, infranchissable pour le solveur. La figure 7.13 décrit comment l’ajout de points de collocation crée parmi les trajectoires non admissibles, une sorte de treillis de trajectoires que le solveur considérera comme admissibles.

En guise de conclusion à cette première série de simulations, il apparaît qu’une formulation du problème qui ne tient pas compte des singularités de saut

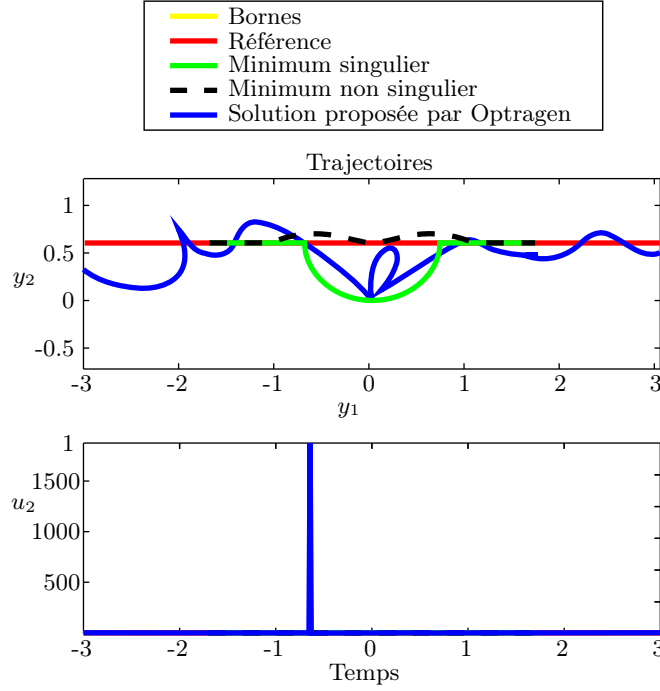


Fig. 7.9. Trajectoire obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT pour $\delta = 0.6$, pour un essai initial égal à la trajectoire de référence et un nombre d'intervalles égal à 5.

conduit facilement le solveur dans une impasse. Tout au moins, il sera difficile, sinon impossible, de trouver numériquement les trajectoires G -singulières. De plus on observe que la discrétisation au moyen de points de collocation dont on savait déjà qu'elle faussait un peu le problème, peu s'avérer assez catastrophique à proximité d'une singularité de saut.

Les observations complémentaires de la section suivante viennent renforcer ces conclusions, sur lesquelles nous reviendrons dans la section 7.6 au cours de laquelle une variante algorithmique est proposée.

7.5.2 Poursuite d'une trajectoire pour le robot à roues orientables

Les simulations effectuées ici sont en rapport avec le problème de poursuite décrit en 7.1.4.

La proportion de simulations qui ont été concluantes ⁵ pour le robot n'est pas moindre que dans le cas du problème du rail rotatif. Ceci tend à prouver que

⁵ c'est à dire pour lesquelles la convergence de l'algorithme a donné un résultat plausible.

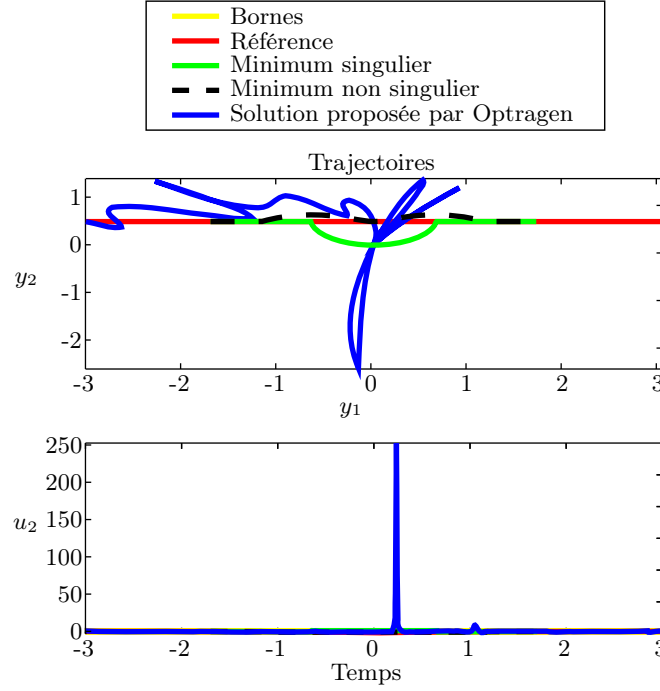


Fig. 7.10. Trajectoire obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT pour $\delta = 0.5$, pour un essai initial égal à la trajectoire de référence et un nombre d’intervalles égal à 5.

la complexité du problème, qui est accrue en raison d’un nombre plus important de variables et de degrés de dérivation, n’influence que peu le comportement du solveur : la vraie difficulté semble être bel et bien la présence des singularités de saut !

Nous présentons sur les figures 7.16 à 7.21 quelques unes des simulations réalisées, par série de trois figures. Pour une description précise, nous utiliserons les termes définis en 6.3.6 de cycloïde “raccourcie” (pour laquelle le tracé effectué par la roue est sans point double) ou “allongée” (pour laquelle la roue dessine une boucle dans le plan).

Si l’on considère les singularités de saut *via* leur caractérisation partielle par le passage du centre instantané de rotation par le centre de l’une des deux roues, on peut distinguer les deux types de trochoïdes non G -singulières. Le premier type correspond, dans le référentiel attaché au robot, au tracé d’un cercle de rayon inférieur à⁶ 1 qui est donc “entre les roues”, tandis que l’autre engendre un cercle de rayon supérieur à 1 qui contient le segment formé par les centres des roues. Ainsi dans chacun des groupes de figures, la première re-

⁶ ou de rayon inférieur à a en général, d’où le terme “raccourcie”.

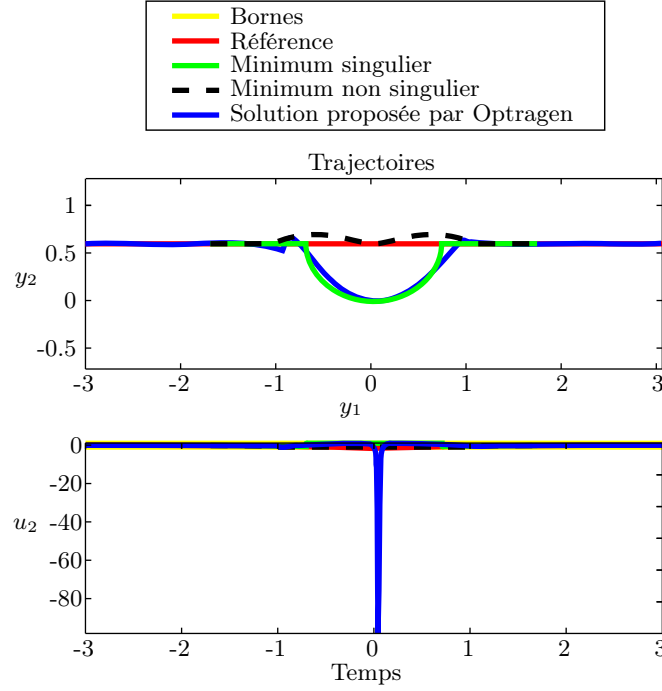


Fig. 7.11. Trajectoire obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT pour $\delta = 0.6$, pour un essai initial très proche de la trajectoire optimale singulière.

présente une simulation avec un essai initial de type “raccourci”, la seconde un essai initial de type G -singulier et la troisième un essai initial de type “allongé”.

Les figures 7.14-7.16 illustrent la solution obtenue avec OPTRAGEN-SNOPT avec les trois sortes d’essai initial mentionnés précédemment pour des valeurs de paramètres $\hat{v} = 0.4$ et $\hat{\omega} = 0.3$, c’est à dire pour une trajectoire de référence trochoïdale raccourcie. Les coûts J respectifs des trois trajectoires calculées sont 4.52×10^{-4} , 1.79×10^{-2} et 0.341. On constate que sans être réellement avantageuse la solution G -singulière est praticable et efficace, mais toujours trouvée trop approximativement par OPTRAGEN-SNOPT.

Il apparaît sur ces simulations que la traversée de la singularité, et même la sortie ou l’entrée dans la singularité par une trajectoire n’est pas quelque chose d’évident, et conduit à des minima locaux ce qui confirme de nouveau la théorie sur les singularités de saut. On pourrait donc renouveler les commentaires faits dans le cas du rail rotatif et les remarques illustrées par les figures 7.12 et 7.13.

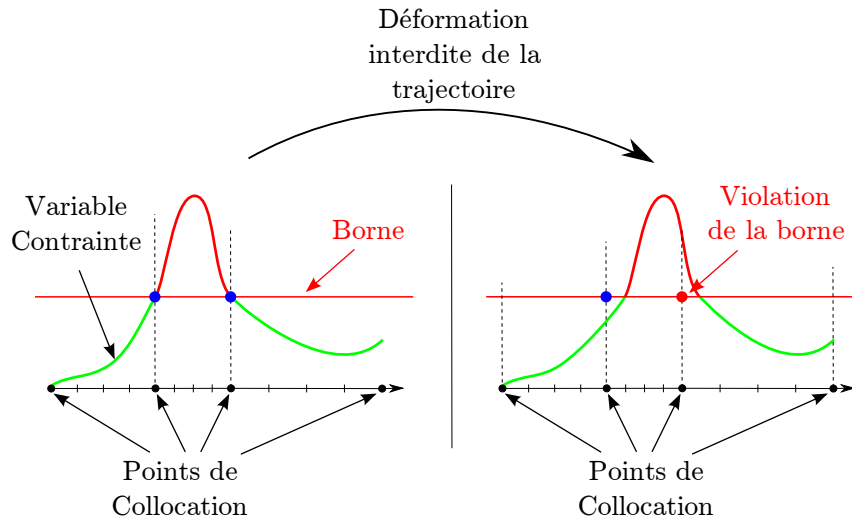


Fig. 7.12. Déformation interdite, pouvant impliquer un minimum local pour le solveur, alors que la trajectoire n'est pas admissible.

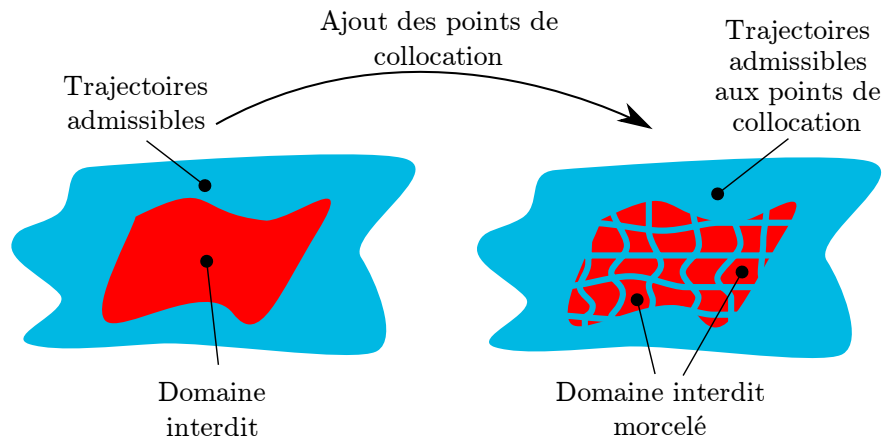


Fig. 7.13. Impact de l'utilisation de points de collocation sur la domaine de trajectoire admissibles pour le solveur.

Les figures 7.17-7.19 reprennent le même schéma que les précédentes, mais pour une trajectoire de référence traversant les singularités de saut, avec $\hat{v} = 0.4 = \hat{\omega}$. Comme la référence est une trajectoire admissible, il est clair qu'elle est optimale (le coût est donc nul), cependant elle n'est obtenue qu'avec un essai initial extrêmement proche. En effet, même si cela n'est pas repris sur une figure, avec une trajectoire G -singulière trop peu proche on ne converge pas

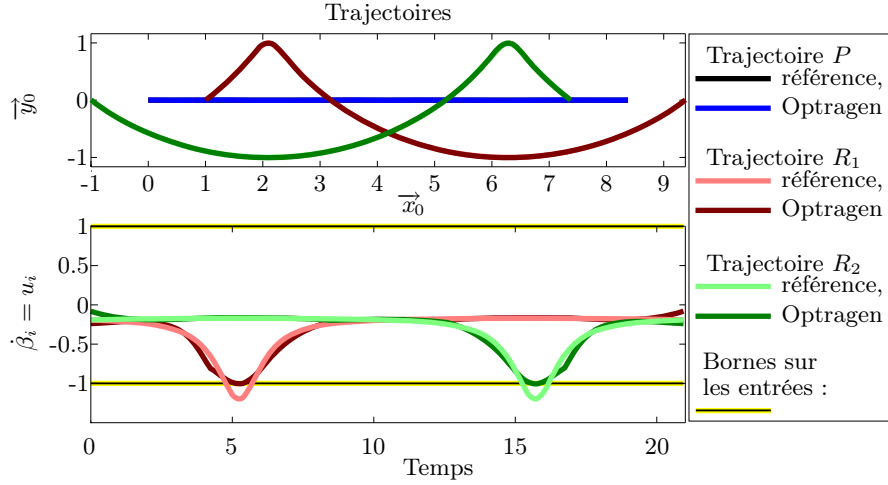


Fig. 7.14. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.3$ avec un essai initial de type "raccourci".

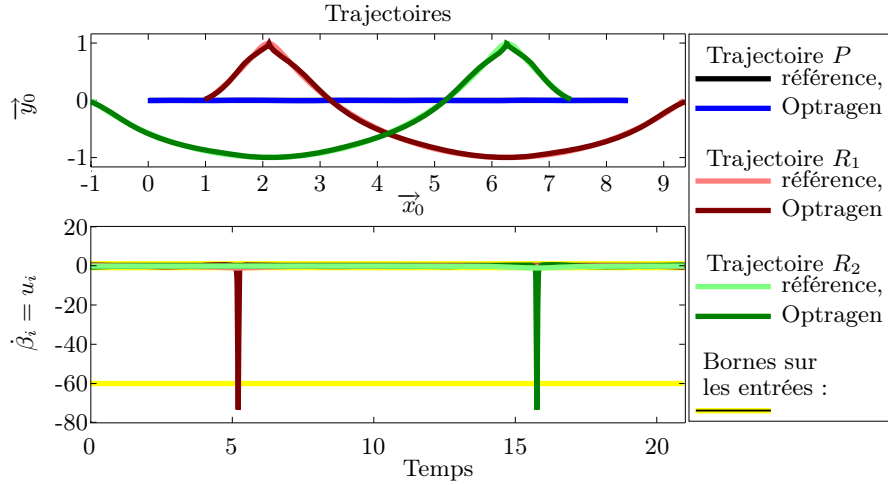


Fig. 7.15. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.3$ avec un essai initial G -singulier.

exactement vers celle-ci. Cela confirme que pour le problème d'optimisation discrétisé, il existe une quantité importante de minima locaux qui ne sont pas des minima pour le problème de commande optimale original. Comme pour le rail rotatif, ces minima sont la conséquence de la présence conjointe de la G -singularité (dont la proximité donne des valeurs très grandes pour les entrées) et de la discrétisation (qui ne permet pas de capturer certains pics de valeurs

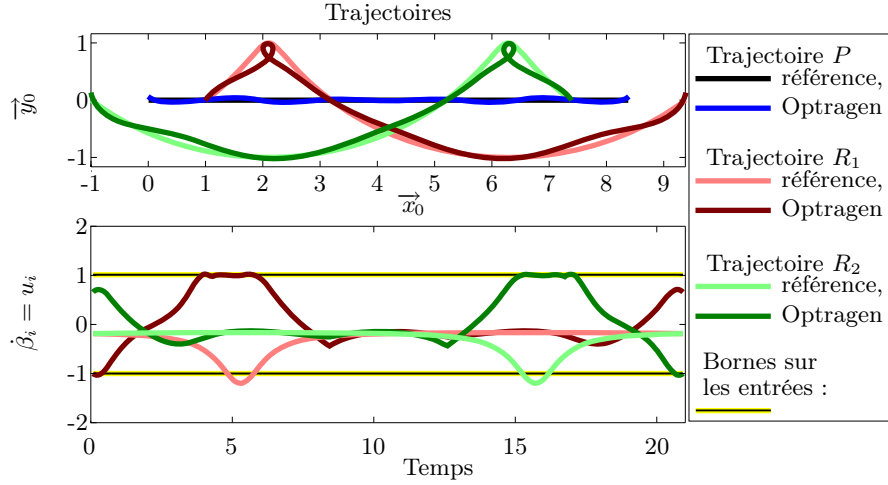


Fig. 7.16. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.3$, avec un essai initial de type "allongé".

et "coince" ces pics comme illustré sur la figure 7.12) ce qui crée un pseudo-domaine de trajectoires admissibles (cf. figure 7.13).

Les figures 7.17 et 7.19 représentent des simulations pour lesquelles le coût J est respectivement 5.15×10^{-2} et 4.41×10^{-2} . Ainsi, pour une référence G -singulière, il apparaît que parmi les deux minima non singuliers, celui de type "allongé" est meilleur que celui de type "raccourci". En conséquence, bien que pour des trajectoires quasi-singulières, l'optimum est évidemment singulier, il est aussi clair qu'en dehors des solutions singulières, les minima de type "allongé" sont un peu plus performants, même si la référence est "légèrement raccourcie".

Enfin, les figures 7.20-7.22 illustrent des simulations pour une référence trochoïdale allongée, avec pour paramètres $\hat{v} = 0.4$ et $\hat{\omega} = 0.45$. Les coûts J respectifs obtenus sont 0.896, 1.31×10^{-3} et 1.23×10^{-2} .

On peut également tirer des conclusions similaires à ce qui a été vu plus haut.

Outre ces simulations, on observe aussi des "ratés" de la part d'OPTRAGEN-SNOPT de la même nature que pour les simulations concernant le rail rotatif, avec parfois des solutions aberrantes, ou des solutions sous-optimales, car prises au piège dans le treillis créé par les points de collocation. Par exemple, on peut le constater par comparaison des figures 7.23 et 7.24 réalisées pour $\hat{v} = 0.4$ et $\hat{\omega} = 0.41$, la première étant quasi-singulière, avec un essai initial quasi-singulier très proche de l'optimum, et la seconde avec un essai initial quasi-singulier plus

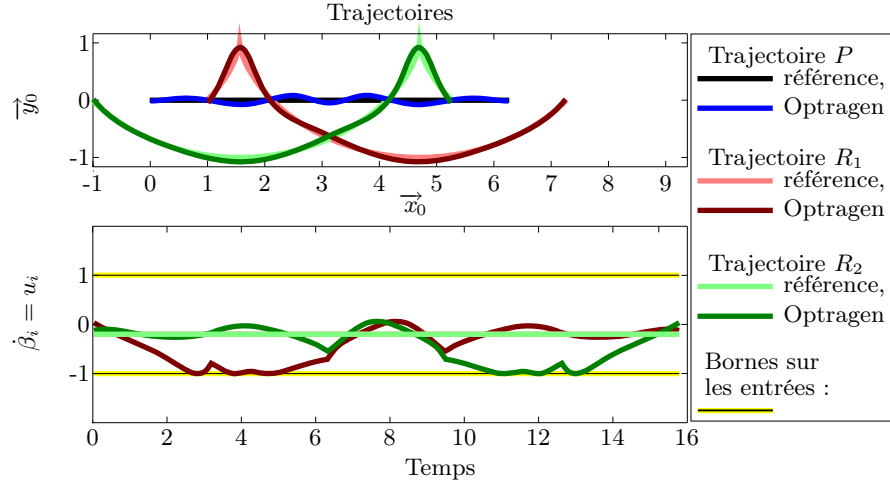


Fig. 7.17. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.4$, avec un essai initial de type "raccourci".

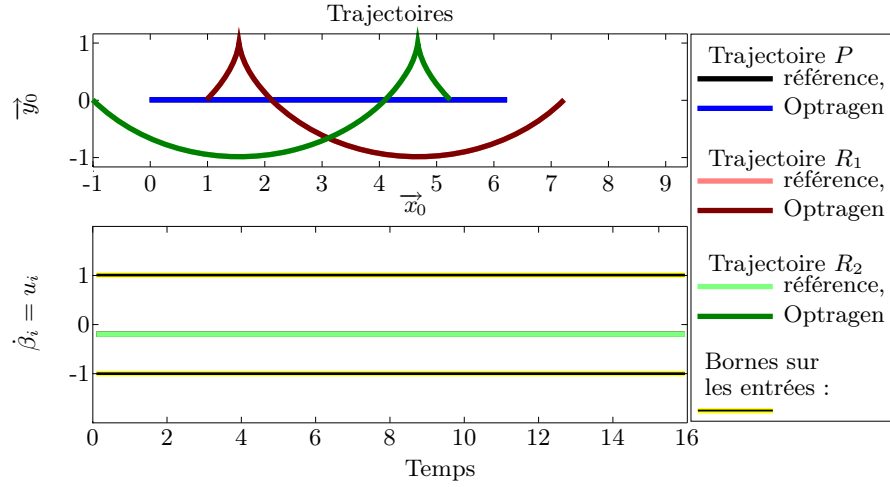


Fig. 7.18. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.4$, avec un essai initial G -singulier.

éloigné. Précisons que le paramètre déterminant ici a été le nombre de points de collocation : la première en comprend 70 et la deuxième 140. Ainsi, même si un nombre important de points de collocation resserre le "crible de couverture" du domaine de contrainte, cela multiplie aussi le nombre de minima locaux quasi-singuliers, comme on pouvait s'y attendre.

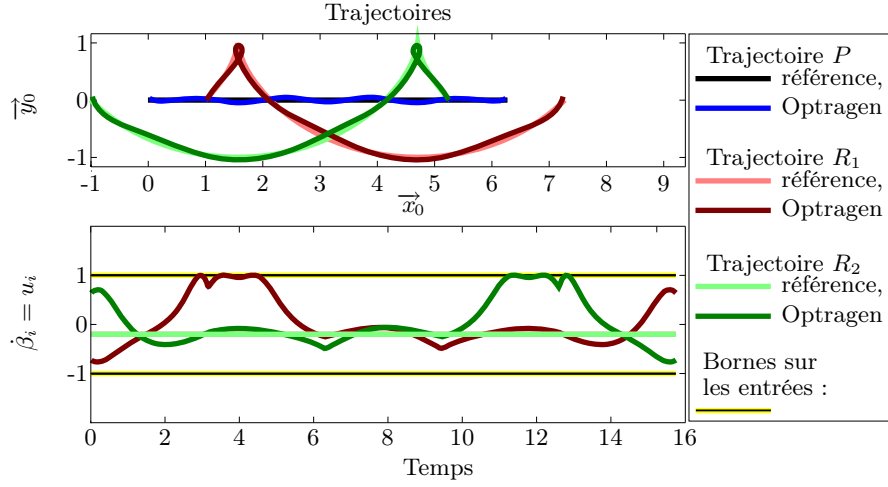


Fig. 7.19. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.4$, avec un essai initial de type "allongé".

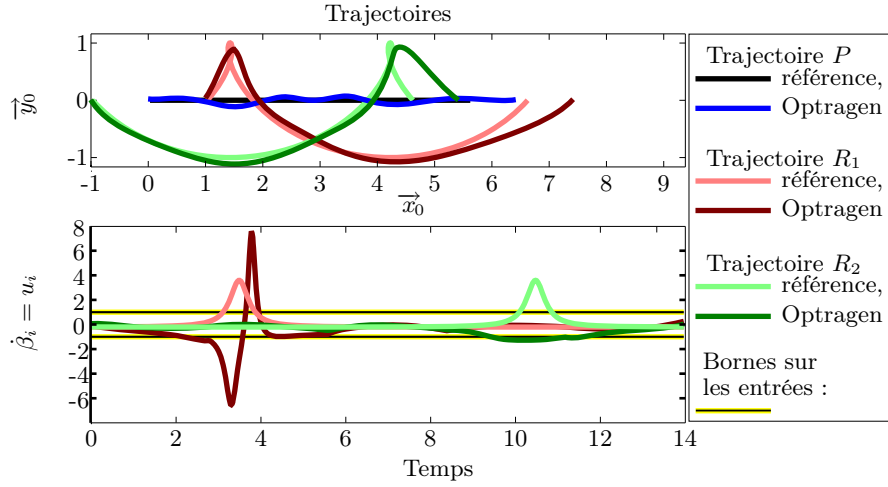


Fig. 7.20. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.45$, avec un essai initial de type "raccourci".

Par ailleurs, les simulations précédentes ont été réalisées avec un nombre de points de collocation variant entre 70 et 140, pour des splines paramétrées dans les conditions suivantes :

- 5 intervalles de temps,
- des dérivées secondes continues aux instants noeuds, c'est à dire une contrainte de régularité d'ordre 3,

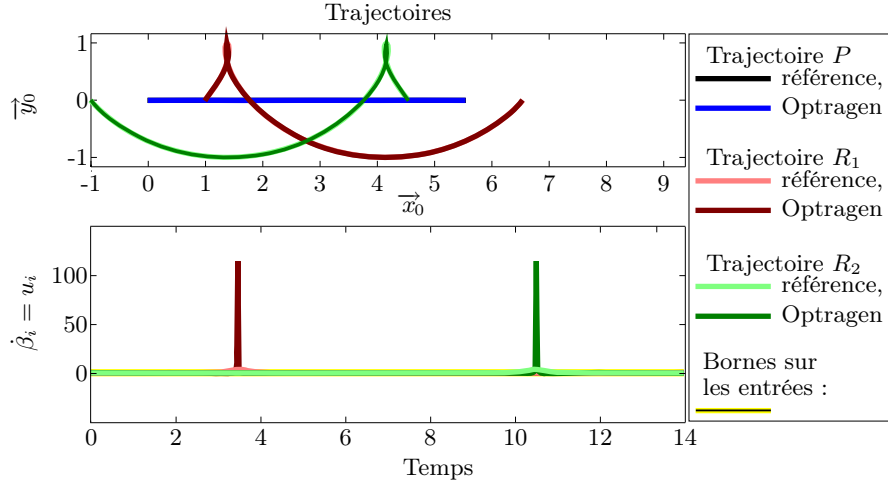


Fig. 7.21. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.45$, avec un essai initial G -singulier.

Fig. 7.22. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.45$, avec un essai initial de type "allongé".

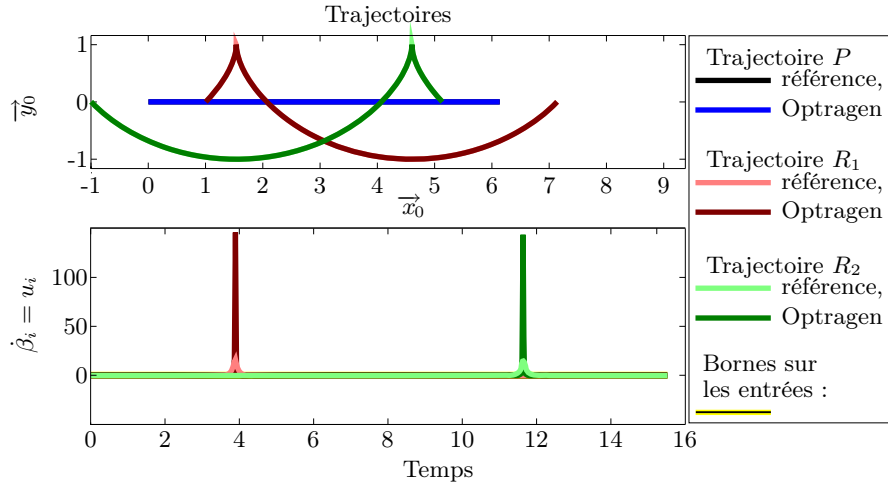


Fig. 7.23. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.41$, avec un essai initial quasi-singulier proche de l'optimum.

– des polynômes de degré 5.

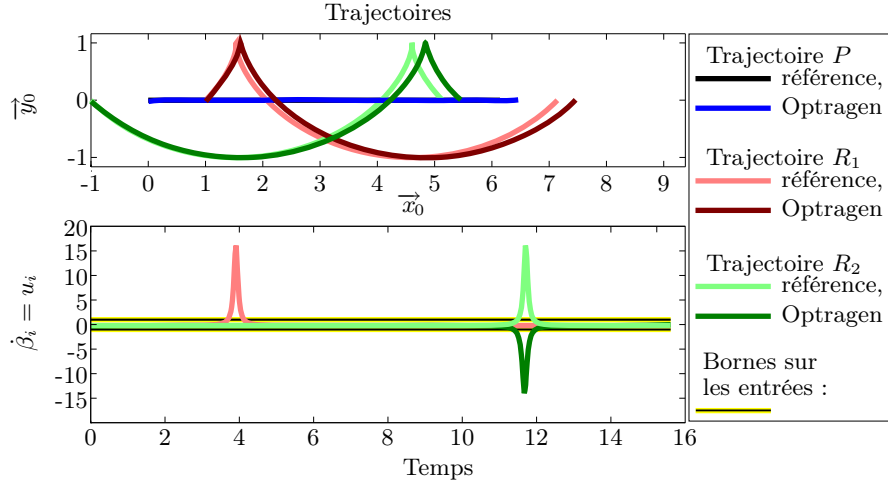


Fig. 7.24. Simulation, à l'aide d'OPTRAGEN-SNOPT, du suivi optimal d'une trajectoire trochoïdale, avec $\hat{v} = 0.4$, $\hat{\omega} = 0.41$, avec un essai initial quasi-singulier éloigné de l'optimum.

Le nombre de paramètres libres impliqué par ces contraintes pour chaque variable est 10. Comme on a trois variables (x_1, x_2, θ) , on a 30 paramètres libres. Le nombre de points de collocation apparaît donc proportionné au nombre de paramètres, mais tout de même assez important. Les simulations effectuées avec un plus grand nombre de paramètres (plus d'intervalles, ou un degré polynomial plus élevé) augmentent non seulement la complexité et le temps de calcul, mais aussi l'instabilité et le mauvais conditionnement du problème. En revanche l'ajout de points de collocation contribue à une meilleure stabilité, même si cela augmente aussi la complexité. Ceci montre encore que le problème est ardu et l'algorithme utilisé très sensible au choix des paramètres structurels.

Il nous semble important, pour terminer, d'insister à nouveau sur le ménage "difficile" que constitue la présence de singularités de saut avec la discrétisation des contraintes de parcours. Nous avons en effet pu observer que les trajectoires G -singulières sont quasiment inaccessibles au solveur en dehors d'un choix initial de paramètres donnant une trajectoire déjà G -singulière.

7.6 Proposition d'amélioration d'algorithmes tels que NTG

L'utilisation d'un logiciel comme NTG pour les systèmes G -singuliers paraît très adaptée pour les problèmes envisagés dans cette thèse :

- les exemples présentés dans ce document sont tous des systèmes mécaniques à dynamique rapide,
- ils sont tous différentiellement plats.

L'étude des principes utilisés dans ce logiciel comme dans la thèse de Mark Milam (voir [27]), nous a conduit à étudier la possibilité d'y apporter d'éventuelles améliorations. Nous exposons ici les principes que nous avons décrits dans [47]. Il ne s'agit pas d'une solution clé en main mais seulement d'une piste dont l'exploration reste ouverte.

7.6.1 Une perte d'information

Au cours de la procédure employée dans NTG, une information importante est perdue : en discrétisant les contraintes de parcours, on réduit apparemment la complexité du problème, mais on perd du même coup le lien analytique existant entre les différentes contraintes du fait qu'elles proviennent toutes d'une même fonction, souvent lisse. En effet, une fois transmis à un solveur non linéaire, le problème est déconnecté de son contexte initial. Le logiciel ne pouvant pas "deviner" qu'il existe un lien entre les contraintes qu'on lui propose les traitera bien sûr de manière totalement indépendante.

L'objectif des prochains paragraphes est d'utiliser une approche ne perdant pas l'information de dépendance analytique des contraintes de parcours.

7.6.2 Présentation alternative du problème

On reprend le problème (7.16) que l'on exprime sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\hat{Y}, t_f) &= \int_0^T \tilde{L}(\hat{Y}, t) dt, & \text{où } \hat{Y} &= [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_s]^T \\ \tilde{C}_i(\hat{Y}) &\leq 0 & \text{contraintes initiales,} \\ \max_{t \in [t_0, t_f]} \tilde{C}_p(\hat{Y}, t) &\leq 0 & \text{contraintes de parcours,} \\ \tilde{C}_f(\hat{Y}, t_f) &\leq 0 & \text{contraintes finales.} \end{aligned} \quad (7.21)$$

L'équivalence est triviale, mais du point de vue algorithmique, elle permet de considérer la contrainte seulement à l'instant où elle est maximale plutôt que sur tout l'intervalle ou sur tout un ensemble de points répartis sur cet intervalle. On peut donc imaginer que l'on va réutiliser une procédure similaire à celle proposée par un solveur SQP, mais en remplaçant le problème QP (7.18) résolu au cours des itérations mineures par le suivant :

$$\begin{aligned} \min_D \quad & \frac{1}{2} D^T H^*(\hat{Y}) D + \nabla_{\hat{Y}} \tilde{J}(\hat{Y})^T D \\ & \tilde{C}_i(\hat{Y}) + \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}_i(\hat{Y})^T D \leq 0, \quad \text{pour } i = \underset{j \in \{0, \dots, k\}}{\operatorname{argmax}} C_j(\hat{Y}) \end{aligned} \quad (7.22)$$

L'avantage que l'on va tirer de cela est de n'avoir à effectuer des calculs de gradients qu'au point maximum de la contrainte. Bien entendu, il sera nécessaire de rechercher ce maximum à chaque fois, notamment parce que la fonction $\max(\cdot)$ n'est pas différentiable par rapport aux paramètres et $\operatorname{argmax}(\cdot)$ n'est pas continue (pour une faible variation des paramètres le maximum global peut changer de localisation de manière discontinue, lorsque plusieurs maxima locaux sont proche de la valeur du maximum global). Cependant, la recherche du maximum à chaque itération majeure reste d'une complexité marginale par rapport à la résolution du problème QP .

Toute la question est donc de savoir si la solution de ce problème sera aussi efficace que celle du problème QP prenant en compte toutes les contraintes. On entend par efficace que la direction de recherche D obtenue conduira l'itération majeure à produire une solution aussi bonne. On peut gager sans trop risquer de se tromper que cela ne sera pas tout à fait le cas. Cependant si la perte d'efficacité est compensée par une croissance suffisamment importante de la rapidité de l'algorithme, qui dépend en bonne partie de la complexité des itérations mineures, on peut s'attendre à un gain intéressant sur la procédure complète. Voici deux arguments assez proches, en faveur de l'adoption de cette méthode, conduisant à penser que dans de nombreuses situations, il n'y aura que peu de différence entre le problème QP de départ et celui que nous avons proposé.

7.6.3 Premier argument en faveur de cette approche

Soit τ un point de collocation. Un développement de Taylor à l'ordre un montre immédiatement que le gradient $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau)$ est représentatif du gradient moyen dans le voisinage de τ . Considérons par exemple $2l + 1$ points de collocation répartis uniformément (avec un intervalle $\delta\tau$), sur un intervalle symétrique centré en τ . Appelons ces points $\{\tau_{-l}, \dots, \tau_0, \dots, \tau_l\}$, où $\tau_0 = \tau$. Il est aisé de constater que la moyenne du gradient⁷ $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t)$ évaluée aux $2l + 1$ points de collocation est approximée au premier ordre en $l\delta\tau$ par le gradient $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=-l}^l \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau_j)}{2l + 1} &= \frac{\sum_{j=-l}^l \left(\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) + j\delta\tau \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) + O(j^2 \delta\tau^2) \right)}{2l + 1} \quad (7.23) \\ &= \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) + O(l^2 \delta\tau^2) \end{aligned}$$

⁷ il ne s'agit pas du gradient "complet" de la fonction $\tilde{C}$ mais du gradient par rapport aux paramètres Y , en considérant t constant.

Ceci signifie que la direction du gradient en τ et celle de sa moyenne diffèrent au second ordre en $l\delta\tau$. L'évaluation du gradient en τ reflète donc assez précisément le gradient moyen sur un voisinage. Ceci est général, mais s'applique donc également lorsque l'on se trouve à un maximum (par rapport au temps) de la fonction de contrainte. Comme les instants (ou les points de collocation) pour lesquels la fonction de contrainte est la plus proche de sa borne sont nécessairement un voisinage du maximum, tenir compte du gradient prioritairement à cet endroit a beaucoup de sens, puisque c'est là que la probabilité de dépassement de la borne est la plus forte. Ainsi si l'on linéarise la contrainte autour du maximum, on tient compte assez précisément de cette contrainte dans tout un voisinage, qui est l'endroit où se trouvent les points les plus proches des bornes. Bien sûr en présence de plusieurs maxima locaux, ceci pourrait s'avérer insuffisant. Ce point sera évoqué en conclusion du chapitre dans les variantes possibles.

7.6.4 Second argument

Supposons que l'on souhaite agir sur la fonction de contrainte, et en diminuer le maximum, par exemple s'il est au-dessus de la borne imposée. Appelons Y la valeur des paramètres avant toute modification, et Y_+ celle après modifications. Appelons τ l'instant pour lequel la fonction de contrainte atteint son maximum. Au premier ordre en δY , la direction la plus efficace dans l'espace des paramètres pour diminuer la valeur de $\tilde{C}(\hat{Y}, \tau)$ est de prendre l'opposé du gradient de la fonction de contrainte pour l'instant $t = \tau$. On désire donc appliquer une correction de la forme :

$$\delta\hat{Y} = -\alpha \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) \quad (7.24)$$

où α est un scalaire positif qui détermine la longueur du pas entre Y et Y_+ . En général, dans le domaine de l'optimisation, produire une décroissance de l'une des contraintes ne dit rien *a priori* sur la manière dont les autres contraintes vont être affectées, puisque la manière dont elles dépendent l'une de l'autre n'est pas facilement prévisible. En revanche, pour une contrainte de parcours, diminuer $\tilde{C}(\hat{Y}, \tau)$ à l'aide de (7.24) diminue également $\tilde{C}$ dans un voisinage de τ . Cela apparaît clairement dans le développement de Taylor suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(Y_+, \tau + \delta t) &= \tilde{C}(\hat{Y}, t) + \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) \delta\hat{Y} \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}(\hat{Y}, \tau) \delta t + O(\delta\hat{Y}^2 + \delta t^2) \\ &= \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) + \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) \delta Y \\ &\quad + O(\delta\hat{Y}^2 + \delta t^2) \\ &= \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) - \alpha \left(\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) \right)^2 \\ &\quad + O(\alpha^2 + \delta t^2) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Cette égalité tient compte du fait que $\tilde{C}(\hat{Y}, \tau)$ est un maximum local, ce qui implique l'annulation de $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}(\hat{Y}, \tau)$. Ainsi, du moment que $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, \tau) \neq 0$, ce qui est vrai à presque tout instant, la conséquence de ce résultat est qu'au premier ordre en δt , la valeur de $\tilde{C}$ décroît dans un voisinage de τ , pour un choix adapté de α . La position du maximum de la fonction de contrainte se déplace légèrement dans le voisinage de τ lors du passage de $\hat{Y}$ à $\hat{Y}_+$, mais la valeur de la contrainte en ce maximum est plus faible que celle du précédent maximum.

L'utilisation de $-\alpha \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t^*)$ comme correction sur $\hat{Y}$ n'est qu'un exemple illustratif, qui n'est pas utilisé dans le problème QP que l'on résout. Ceci est simplement un indice supplémentaire indiquant que le passage de (7.18) à (7.22) est raisonnable, dans la mesure où dans cet algorithme on utilise justement une approximation affine de la contrainte.

7.7 Bénéfices de cette variante

Bien que l'on ait présenté des arguments en faveur de l'utilisation de la variante proposée page 136 à la procédure initialement incluse dans NTG, il nous faut maintenant mesurer l'impact réel de cet algorithme. Dans ce but, nous allons évaluer d'une part la complexité des itérations majeures, et d'autre part la vitesse de convergence en terme de nombre d'itérations pour chaque approche.

7.7.1 Complexité de l'algorithme

Nous proposons ici deux comparaisons de complexité. La première est une comparaison située au niveau de l'algorithme QP utilisé dans NPSOL ainsi que celui de la proposition alternative que nous avons faite. La seconde sort du cadre de NTG et évalue la complexité dans le cas d'une descente de gradient.

De façon à établir des résultats quantitatifs, nous faisons quelques hypothèses simples et fixons certaines notations :

- on supposera que la complexité de l'évaluation de $\tilde{C}$ est donnée par K ,
- la complexité de l'évaluation de la dérivée partielle de $\tilde{C}$ par rapport à l'une de ses variables est aussi supposée être égale à K^8 ,
- l'ordre des splines est noté s ,
- le nombre de paramètres indépendants servant à décrire Y , *i.e.* la taille de $\hat{Y}$, est noté N ,
- le nombre de points de collocation, qui est aussi le nombre de contraintes discrètes $\tilde{C}_i$, est noté p .

⁸ Cette hypothèse qui est très légèrement surévaluée pour un polynôme, est tout à fait adaptée dans le cas général.

Regardons tout d'abord le cas des algorithmes QP^9 , pour NTG d'une part et pour l'alternative d'autre part. La différence principale est le nombre de contraintes : NPSOL doit gérer p contraintes tandis que le problème (7.22) n'en a qu'une seule. En considérant que N et p sont du même ordre de grandeur, une adaptation de l'analyse de complexité faite en [5] au sujet des algorithmes QP convexes, conduit à une borne théorique proportionnelle à $\sqrt{p}(N+p)^3$ dans le cas de NTG et $(N+1)^3$ pour le problème 7.22. Comme mentionné dans [5], le facteur $\sqrt{p}$ n'est pas très pertinent en pratique et peut être supprimé, ce qui modifie la première borne en $(N+p)^3$. Même avec cette borne plus favorable, le rapport des deux est :

$$\left(\frac{N+p}{N+1}\right)^3.$$

Si $p \approx N$ on a un rapport approximatif de 8. Précisons enfin que d'une part il arrive souvent que $p \gg N$ et d'autre part que nos calculs ne concernent que le cas d'une seule contrainte de parcours. Il est tout à fait clair que l'augmentation du nombre de contraintes parcours ou de p accroît très rapidement ce rapport.

Cette comparaison simple montre bien l'avantage de la stratégie présentée, concernant la complexité d'une itération majeure. Cependant, ceci ne tient pas compte de l'efficacité de chaque itération, qui peut influencer fortement la complexité de la procédure globale. De ce point de vue, la comparaison suivante aura l'intérêt d'être plus complète et de donner lieu à des simulations mettant de manière plus convainquante l'efficacité globale d'un algorithme utilisant l'alternative que nous proposons pour le traitement des contraintes de parcours.

Nous étudions maintenant une simple descente de gradient, à pas constant, appliquée à la contrainte de parcours, dans le cas des deux types de stratégies : nous proposons un algorithme test ayant pour objectif de conduire une fonction de contrainte en dessous d'une certaine borne. Cet algorithme est décrit sur la figure 7.25.

La différence entre les deux stratégies réside seulement dans le choix de $\delta_{\hat{Y}}$:

- dans le premier cas, que l'on appellera dorénavant A_1 , $\delta_{\hat{Y}} = \frac{\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t^*)}{\|\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t^*)\|}$,
- dans le second, noté A_2 , $\delta_{\hat{Y}} = \frac{\sum_{i \in I} \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}_i(\hat{Y})}{\|\sum_{i \in I} \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}_i(\hat{Y})\|}$,

où I est l'ensemble des contraintes qui ne sont pas satisfaites.

Soit q le nombre de points pour lesquels la contrainte C n'est pas satisfaite à l'itération courante.

- Pour l'algorithme A_1 , la régularité de la contrainte est prise en compte, et le nombre d'opérations à chaque itération est : $N_1 = Kp + KN$. Le terme Kp correspond à l'évaluation de $\tilde{C}$ aux p points de collocation,

⁹ Il convient de préciser que cette analyse est faite pour un problème QP seul, qui est ordinairement traité un peu différemment d'un problème QP au sein d'un algorithme SQP, les bornes proposées restent donc approximatives.

Data: fonction de contrainte $\tilde{C}(\cdot)$
Result: $\hat{Y}$ s.t. $\tilde{C}(\hat{Y}, t) \leq c_{\max}$
Initialisation : $\hat{Y} = \hat{Y}_0$;
while $\exists t, \tilde{C}(\hat{Y}, t) > c_{\max}$ **do**
 trouver t^* , tel que $\tilde{C}(\hat{Y}, t^*) = \max_t \tilde{C}(\hat{Y}, t)$;
 déterminer $\delta \hat{Y}$;
 $\hat{Y} \leftarrow \hat{Y} - \alpha \delta \hat{Y}$;
end

Fig. 7.25. Algorithme ramenant une contrainte sous une borne $c_{\max}$.

et le terme KN correspond à l'évaluation du gradient $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}$ (qui a N composantes) en $t = t^*$.

- Pour l'algorithme A_2 , la contrainte est discrétisée en p contraintes indépendantes, et le nombre d'opérations pour une iteration est : $N_2 = Kp + KNq$. Le premier terme est le même que pour N_1 et le second terme Kq correspond à l'évaluation de $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}$ aux q points de collocation.

Supposons que le premier algorithme converge en r_1 itérations, et le second en r_2 itérations. Soit $\bar{q}$ la valeur moyenne de q pour les r_2 itérations. Alors le rapport de complexité entre les deux stratégies peut être approché par :

$$R = \frac{r_1(Kp + KN)}{r_2(Kp + KNq)} = \frac{r_1(p + N)}{r_2(p + N\bar{q})}. \quad (7.26)$$

Ce rapport fait bien apparaître la compétition entre d'une part le nombre d'itérations r_i nécessaires pour la convergence de l'algorithme, qui reflète l'efficacité de chaque itération, et d'autre part la complexité requise par chaque itération donnée pour les deux stratégies par $p + N$ et $p + N\bar{q}$. L'étude faite dans les paragraphes suivants sur base de simulations numériques tend à montrer que R est toujours plus petit que 0.5.

7.7.2 Quelques tests et bilan global

Nature des tests

Toutes les simulations ont été faites à l'aide de MATLAB 7.4. Pour chaque simulation, une seule sortie $Y(t) \in \mathbb{R}$ est considérée, et on traite une contrainte scalaire, de la forme $C(Y(t), \dot{Y}(t)) \in \mathbb{R}$. Pour obtenir des statistiques au sujet des propriétés que l'on examine, C est une fonction polynômiale aléatoire à deux variables et de degré¹⁰ d . Un polynôme de ce genre a $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ coefficients, que

¹⁰ Le degré d'un polynôme à deux variables x et y est le maximum de $i + j$ pour les monômes $x^i y^j$ présents dans le polynôme.

l'on choisit plus petits que 1 en valeur absolue¹¹. Au lieu d'utiliser des B -splines, les polynômes utilisés pour implémenter les tests sont des courbes de Bézier, connues pour avoir des propriétés très similaires.

Au sujet du “premier argument”

On veut vérifier ici que l'argument donné en 7.6.3 est souvent vérifié. Un nombre important de fonctions $C(Y, \dot{Y})$ sont prises aléatoirement et pour une fonction de contrainte C donnée, plusieurs $\hat{Y}$ sont pris au hasard. Ensuite le gradient $\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}$ est calculé en un maximum local de la fonction et sur un voisinage de celui-ci. On compare alors les directions des deux vecteurs impliqués dans l'équation (7.23) de part et d'autre du signe $=$. Pour ce faire, on utilise la distance euclidienne entre les deux vecteurs, après les avoir normés. On notera cette distance $\hat{\delta}$. L'algorithme est repris sur la figure 7.26.

Data: le degré d , l'ordre s et l'écart l

Result: $\bar{\delta}$ valeur moyenne de la distance $\hat{\delta}$ entre

$$\frac{\sum_{j=-l}^l \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_{i+j})}{\|\sum_{j=-l}^l \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_{i+j})\|} \text{ et } \frac{\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_i)}{\|\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_i)\|}$$

près des maxima

```

Initialisation :  $\Delta = \emptyset$ ;
for  $k \leftarrow 1 : 1000$  do
    choix aléatoire de  $C(Y, \dot{Y})$ ;
    for  $j \leftarrow 1 : 100$  do
        choix aléatoire de  $\hat{Y}$ ;
        trouver un maximum local de  $\tilde{C}(\hat{Y}, t)$  pour  $t \in (0, 1)$ ;
        calculer  $\hat{\delta}$ ;
         $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{\hat{\delta}\}$ ;
    end
end
 $\bar{\delta} \leftarrow \text{Moyenne}(\Delta)$ ;

```

Fig. 7.26. Algorithme pour tester statistiquement l'argument de la section 7.6.3.

Comme $\hat{\delta}$ est une distance entre deux vecteurs unitaires, elle est équivalente à un angle $\alpha \in [0, \pi] = [0^\circ, 180^\circ]$ entre ces deux vecteurs. Cette autre valeur qui est peut-être plus significative¹² que $\hat{\delta}$, est également reportée dans le tableau

¹¹ Ceci ne limite pas fondamentalement l'ensemble des polynômes que l'on peut construire.

¹² Dans la mesure où cela reflète plus la différence de direction.

7.1, en fonction du degré d de C , de l'ordre s des splines et de l'écart l entre le maximum et l'extrémité du voisinage. Le nombre de points de collocation choisis ici est $p = 100$. Le rapport $\frac{2l+1}{p}$, qui représente la densité - par rapport à l'horizon de temps - du voisinage où $\nabla \tilde{C}$ est évalué, est également intéressant, et donc mentionné. Plusieurs remarques peuvent être faites à propos des résultats

d	s	l	$\frac{2l+1}{p}$	$\bar{\alpha}(^\circ)$	$\tilde{\delta}$
5	4	4	0.09	2.49	0.042
5	4	7	0.15	3.88	0.065
5	4	10	0.21	5.92	0.098
5	6	4	0.09	11.0	0.17
5	6	7	0.15	13.6	0.22
5	6	10	0.21	15.5	0.25
5	8	4	0.09	18.2	0.28
5	8	7	0.15	20.1	0.31
5	8	10	0.21	21.3	0.34
10	4	4	0.09	3.03	0.050
10	4	7	0.15	4.85	0.079
10	4	10	0.21	6.57	0.11
10	6	4	0.09	14.5	0.22
10	6	7	0.15	15.7	0.24
10	6	10	0.21	15.8	0.25
10	8	4	0.09	23.0	0.33
10	8	7	0.15	23.5	0.36
10	8	10	0.21	23.1	0.37

Tableau 7.1. Statistiques au sujet du “premier argument”

reportés dans le tableau 7.1. Comme on s’y attendait :

- $\frac{\sum_{j=-l}^l \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_{i+j})}{\|\sum_{j=-l}^l \nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_{i+j})\|}$ est peu éloigné de $\frac{\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_i)}{\|\nabla_{\hat{Y}} \tilde{C}(\hat{Y}, t_i)\|}$;
- l’angle entre les deux vecteurs augmente avec l’écart l ;

De plus cette angle augmente également avec l’ordre N des splines, et légèrement avec le degré de la fonction de contrainte C : ceci est dû à l’augmentation du nombre d’oscillations, qui accroît la courbure près des extrema et réduit donc l’impact de notre argument.

Il est aussi important de préciser qu’en pratique, les conditions sont probablement souvent meilleures que celles de l’algorithme présenté ici, parce qu’une contrainte aléatoire avec un choix aléatoire de Y peut engendrer beaucoup plus d’oscillations qu’une situation standard donnée par un algorithme après les premières iterations.

Au sujet du “second argument”

On souhaite tester ici le bien fondé de l’argument donné en 7.6.4. Un grand nombre de fonctions $C(Y, \dot{Y})$ sont prises au hasard et, pour une fonction C donnée, une suite de $\hat{Y}$ (les coordonnées de Y dans la base de fonctions de Bézier) est calculée telle que le maximum décroisse à chaque itération. Ceci est réalisé au moyen de l’équation (7.25). La pertinence de l’argument invoqué est testée en comptant le nombre de points de collocation situés dans le voisinage du maximum pour lesquels la fonction de contrainte C décroît. L’algorithme est décrit sur la figure 7.27. Les résultats de ces simulations sont reportés dans

Data: l’ordre s des splines, le degré d
Result: $\bar{c}$ valeur moyenne du nombre de points de collocation où C décroît
Initialization : $E = \emptyset$;
for $k \leftarrow 1 : 1000$ **do**
 choix aléatoire de $C(Y, \dot{Y})$;
 while $\max_{t \in [0, T]} \tilde{C}(\hat{Y}, t) > B$ **do**
 $\hat{Y}_+ \leftarrow \hat{Y} - \alpha \nabla_{\hat{Y}} C(\hat{Y}, t^*)$;
 compter le nombre c de points de collocation t près de τ tels que
 $C(\hat{Y}_+, t) < C(\hat{Y}, \tau)$;
 $E = E \cup \{c\}$;
 $\hat{Y} = \hat{Y}_+$;
 end
end
 $\bar{c} \leftarrow \text{Moyenne}(E)$;

Fig. 7.27. Algorithme pour tester statistiquement l’argument de la section 7.6.4.

le tableau 7.2.

d	s	$\frac{\bar{c}}{p}$
5	4	0.28
5	6	0.21
5	8	0.17
10	4	0.21
10	6	0.16
10	8	0.12

Tableau 7.2. Statistiques concernant “le second argument”

La conclusion de cette simulation est très simple : on observe que la proportion $\frac{\bar{c}}{p}$ - de points de collocation influencés par le gradient de C à son maximum - décroît avec s et d , mais reste non négligeable dans tous les cas.

Comparaison des deux algorithmes

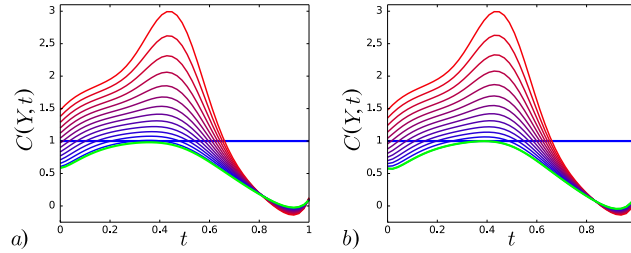
Cette simulation, probablement la plus déterminante de toutes, fait référence aux deux algorithmes présentés dans les figures 7.25 et suivantes. Son but est d'évaluer statistiquement le rapport R défini par l'égalité (7.26). Les algorithmes A_1 et A_2 sont appliqués un grand nombre de fois comme montré sur la figure 7.28. Dans cette simulation, $d = 5$, parce que l'influence du degré du polynôme C est peu importante.

Data: ordre N , nombre de points p
Result: rapport R et $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{q}$, valeur moyenne de r_1 , r_2 , q
Initialisation : $R_1 = R_2 = Q = \emptyset$;
for $k \leftarrow 1 : 100$ **do**
 choix aléatoire de $C(Y, \dot{Y})$;
 for $j \leftarrow 1 : 10$ **do**
 choix aléatoire de $\hat{Y}_0$;
 lancer A_1 ;
 calculer r_1 ;
 $R_1 \leftarrow R_1 \cup \{r_1\}$;
 lancer A_2 ;
 calculer r_2 et q ;
 $R_2 \leftarrow R_2 \cup \{r_2\}$;
 $Q \leftarrow Q \cup \{q\}$;
 end
end
 $\bar{r}_1 \leftarrow \text{Moyenne}(R_1)$;
 $\bar{r}_2 \leftarrow \text{Moyenne}(R_2)$;
 $\bar{q} \leftarrow \text{Moyenne}(Q)$;
calculer R à partir de R_1 , R_2 , et Q ;

Fig. 7.28. Algorithme pour comparer statistiquement la complexité globale de A_1 A_2 .

L'avantage de la stratégie proposée est évidente d'après le tableau 7.3 : le maximum du rapport R est 0.5 mais décroît significativement avec N et p jusqu'à 0.25 pour $N = 16$. Ceci signifie que sur ce genre d'algorithmes on peut gagner un facteur de rapidité de 4. En réalité, cela peut être nettement plus, parce que 16 points de contrôle pour une spline n'est pas un maximum, et dans le cas de plusieurs sorties, le nombre de variables est aussi multiplié.

N	p	$\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}$	$\bar{q}$	R
4	25	1.1	7.4	0.51
4	50	1.1	15.0	0.46
4	100	1.1	29.4	0.44
6	25	1.2	6.8	0.47
6	50	1.2	13.2	0.43
6	100	1.1	25.9	0.39
8	25	1.2	6.6	0.44
8	50	1.2	12.6	0.38
8	100	1.2	25.3	0.34
11	25	1.3	6.5	0.40
11	50	1.3	12.6	0.33
11	100	1.3	24.9	0.29
16	25	1.4	6.5	0.38
16	50	1.5	12.8	0.29
16	100	1.4	24.9	0.25

Tableau 7.3. Statistiques comparant la complexité des algorithmes A_1 et A_2 .**Fig. 7.29.** Evolution d'une fonction de contrainte pour les algorithmes A_1 (à gauche) et A_2 (à droite).

La figure 7.29 montre un exemple comparant l'évolution, pour les deux algorithmes, d'une fonction jusqu'à ce qu'elle passe sous sa borne supérieure (égale à 1) représentée par la ligne horizontale bleue. L'évolution de la fonction est du rouge au bleu, et la ligne verte représente la situation finale de la fonction. On peut remarquer que l'algorithme A_1 donne, en terme d'évolution de la contrainte, des résultats proches de A_2 .

Concluons en signalant que l'exemple de la descente de gradient que nous avons étudié est certainement moins favorable à l'algorithme proposé dans ce document puisque nous n'avons considéré, pour l'algorithme utilisant plus de points de collocation, que ceux pour lesquels la contrainte n'était pas satisfaite (dénombrés par l'entier q), tandis que les méthodes de point intérieur prennent probablement en compte toutes les contraintes à chaque étape.

7.7.3 Difficultés et variantes

Compétition entre maxima

La première difficulté qui peut apparaître est la compétition entre plusieurs maxima locaux. Cela peut introduire de nombreux changements de localisation du maximum global pendant l'algorithme, de façon que la prise en compte du maximum global pour une itération pénalise un maximum local dont la valeur est très proche du maximum global. Ceci peut ralentir fortement l'algorithme. Une amélioration possible est de détecter une plus grande partie des maxima locaux, voire la totalité, et de tenir compte de chacun d'entre eux. Ceci augmenterait la complexité de l'algorithme lorsqu'il y aura présence de plusieurs maxima, mais il est certain qu'une plus grande stabilité en résulterait. De plus l'efficacité de chaque itération serait conservée, voir accrue. De manière générale, il semble que cela resterait plus efficace qu'une stratégie négligeant la dépendance des contraintes issues d'une même expression analytique.

Pour alléger un peu la recherche ces maxima on peut imaginer de les suivre d'un pas à l'autre en les recherchant à proximité des maxima précédents par linéarisation, puis de raffiner localement cette recherche. Si l'on a appliqué la correction $\delta\hat{Y}$ au vecteur de paramètres à l'itération précédente, le maximum de la fonction de contrainte pour le nouveau jeu de paramètres $\hat{Y}_+ = \hat{Y} + \delta\hat{Y}$ sera tel que $\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}(\hat{Y}_+, \tau_+) = 0$, où $\tau_+ = \tau + \delta\tau$ est le nouvel instant pour lequel on a un maximum. Au premier ordre, un développement de Taylor de $\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}$ donne :

$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}(\hat{Y}_+, \tau_+) = \frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}(\hat{Y}, \tau) + \frac{\partial^2\tilde{C}}{\partial t^2}\delta t + \nabla_{\hat{Y}}\tilde{C}\delta\hat{Y} + O(\delta t^2 + \delta\hat{Y}^2).$$

Comme $\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}(\hat{Y}, \tau) = 0$ et que la quantité précédente doit s'annuler cela conduit à :

$$\delta t \approx -\nabla_{\hat{Y}}\tilde{C}(\hat{Y}, \tau)\delta\hat{Y} / \frac{\partial^2\tilde{C}(\hat{Y}, \tau)}{\partial t^2}.$$

Ceci ne nécessite que très peu de calculs car la seule quantité de cette expression qui n'a pas déjà été calculée auparavant est $\frac{\partial^2\tilde{C}(\hat{Y}, \tau)}{\partial t^2}$, qui est un scalaire dont la complexité de calcul est comparable à celle de la contrainte elle-même, contrairement au gradient dont la complexité de calcul est proportionnelle au nombre de paramètres. Ensuite, il convient éventuellement de procéder à un calcul plus précis de τ_+ . Enfin, après plusieurs itérations, il faut refaire une recherche globale de maxima, pour éviter que de nouveaux maxima locaux ne se glissent entre les mailles du filet.

Contrainte saturée sur un sous-intervalle

Un second inconvénient, qui est lié au précédent, est dû à la nature même de nombreux problèmes de commande optimale : la solution optimale est constituée de “branches” plus ou moins longues pour lesquelles il y a saturation de la commande, ou de quelque autre contrainte. Lors de cette saturation d’une contrainte, le maximum est atteint sur toute la branche. Au cours d’un algorithme convergent vers ce genre de solution, la situation précédente apparaîtra très probablement. C’est assez ennuyeux pour notre algorithme car alors le maximum qui sera sélectionné sera un des points de l’intervalle sur lequel il y a saturation, mais si cet intervalle est “trop large”, la prise en compte d’un seul point pourrait conduire à un échec de la procédure ou à des va-et-vient interminables entre quelques points de l’intervalle.

Afin de contourner cet aspect néfaste de l’évolution de l’algorithme, il peut s’avérer intéressant d’ajouter la possibilité de points noeuds mobiles, et d’une variation du degré des splines sur les intervalles où une contrainte est saturée. Cependant, le problème est sans doute assez pointu et pourrait nécessiter une étude particulière. Plus précisément, un nombre plus important de points d’évaluation et de linéarisation de la contraintes pourrait être utilisé sur les intervalles détectés comme saturés pour une contrainte et une “répartition optimale” de ces points en fonction du degré des splines et d’une mesure de sensibilité de la fonction de contrainte (de type Lipschitz par exemple).

Nécessité d’une implémentation complète

Le principal inconvénient du point de vue de l’application de notre proposition par rapport à NTG, est que NTG tire parti de la transformation du problème initial en problème de programmation non linéaire pour transmettre cette formulation à NPSOL, ce qui permet d’utiliser un logiciel existant déjà, au lieu d’implémenter intégralement l’algorithme. Ceci n’est pas possible dans notre cas, car le problème QP que l’on propose de résoudre à chaque itération majeure contient une contrainte qui diffère d’une itération à l’autre. Il est probable qu’il faille réimplémenter la totalité de l’algorithme. Sachant que NPSOL est un logiciel commercial performant, réaliser l’équivalent pour la stratégie alternative proposée représente un travail assez conséquent.

7.7.4 Quelques remarques de conclusion

La stratégie algorithmique proposée est surtout intéressante du point de vue de l’idée qui l’a faite naître, à savoir restaurer une perte d’information. Il n’est pas dit que l’on ne puisse pas exploiter cette idée d’une manière plus efficace et surtout plus aboutie, mais ce thème n’étant pas le centre même de la thèse, nous avons surtout voulu mettre en valeur le potentiel sous-jacent à cette

démarche, même s'il est vrai qu'une mise en application concrète impliquerait une refonte complète de l'implémentation par rapport à ce que fait NTG.

Signalons également que les auteurs d'NTG ont également appliqué les mêmes principes, notamment l'inversion dynamique (platitude différentielle) à certains systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (cf. [32]). Dans ce cas, il semble que notre méthode porterait encore plus de fruits dans la mesure où le nombre de points de collocation augmente exponentiellement avec la dimension de l'espace des variables mises en jeu dans les équations du système ¹³.

Enfin, pour revenir aux éléments centraux de la thèse, ils nous confortent dans cette proposition de stratégie. En effet, les simulations menées pour les problèmes de poursuite concernant le rail rotatif et le robot à roues orientables dans la section 7.5, tendent à montrer que la méthode de discrétisation par les points de collocation pose de réels problèmes en présence de singularités de saut, ce qui pourrait trouver une solution dans l'alternative de traitement des contraintes. Le nombre de points de collocation ne pouvant pas être infini, cette approche différente pourrait s'avérer salutaire là où la formulation en termes d'optimisation non linéaire avec un nombre fini de variables semble trouver ses limites.

¹³ pour les équations différentielles ordinaires il n'y a qu'une seule dimension, celle du temps.

Conclusion(s) et perspectives

Nous concluons ce travail en deux temps :

- premièrement par un résumé des apports de la thèse, dans lequel on trouvera les réponses aux questions formulées dans l'introduction et regroupées sur la figure 1.8 ;
- deuxièmement par un ensemble de suggestions quant aux pistes à explorer pour venir à bout des questions et problèmes que la thèse a fait apparaître mais n'a pas résolus.

8.1 Contributions

L'originalité de cet ouvrage n'est pas dans l'élaboration d'un résultat majeur en théorie du contrôle, mais plutôt dans une série de contributions constituant une mosaïque de travaux transverses à différents domaines, comme le laissait déjà supposer le titre même. Enumérons-les en quelques lignes en soulignant leur particularité.

1. La première est sans doute la cadre formel donné par la définition de singularité de saut, qui permet de mettre des mots et un concept mathématique sur des phénomènes observés en pratique depuis longtemps. Cet apport laisse tout de même peu de place à une caractérisation simple des systèmes concernés par cette définition, ce qui nous a amenés à étudier un autre dénominateur commun à plusieurs de ces systèmes, à savoir la propriété de platitude différentielle.
2. Comme notre analyse portait sur des systèmes G -singuliers différentiellement plats, nous avons cherché à établir quels étaient les liens entre platitude différentielle et singularité de saut. Nous avons ainsi dû redéfinir ce qu'est un système plat en tenant compte de la présence de singularités éventuelles. Cette contribution, bien que discrète dans ce document, pourrait bien être l'une des plus originales, en ce sens que l'important travail

réalisé depuis de nombreuses années sur les systèmes plats ignore souvent les singularités de platitude, ou au mieux les identifient et les traitent au cas par cas.

3. Suite à cette définition, nous avons pu mettre en relief des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour qu'un système plat avec singularité soit G -singulier.

A ce stade on peut dire que les trois points que nous venons d'évoquer abordent l'étude des systèmes concernés sous un angle essentiellement topologique, et tendent ainsi à en proposer une meilleure compréhension structurelle.

4. Comme première conséquence, nous avons pu appliquer ces principes théoriques à différents systèmes, et notamment à une étude détaillée des singularités de saut du robot à plusieurs roues orientables, comprenant la description approfondie des trajectoires des roues lors de manœuvres passant près des singularités de saut.
5. La seconde conséquence est que nous avons été en mesure de préciser quel est l'impact de la présence de singularités de saut sur des problèmes de planification et de commande optimale, principalement sur la recherche algorithmique de solutions à ces problèmes. Nous avons montré comment certains algorithmes réputés efficaces dans des situations similaires, sont mis en difficulté par la présence des singularités de saut qui provoquent l'isolation topologique des trajectoires G -singulières. Soit ils ne parviennent pas à approcher ces solutions, soit ils obtiennent des solutions quasi-singulières en négligeant certaines contraintes, ce qui peut alors conduire à une instabilité des solutions obtenues, qui nécessitent un traitement postérieur pour être exploitables, ou encore à des minima quasi-singuliers, qui n'existent pas dans la pratique, mais apparaissent comme tels pour l'algorithme.
6. Enfin, du fait de l'expérience acquise suite aux simulations évoquées dans la thèse au sujet des algorithmes dont nous venons de parler, nous avons proposé des approches algorithmiques alternatives. La première est plutôt une reformulation du problème posé pour que la présence de singularités de saut fasse explicitement partie des équations et inéquations de contraintes. Elle est donc surtout utile pour la problématique particulière de la thèse. La seconde est plus générale et s'applique directement au traitement des contraintes dans des algorithmes utilisant des splines comme par exemple NTG et OPTRAGEN. Elle vise à tirer parti de la nature particulière des trajectoires utilisées dans ce type de programmation pour augmenter simultanément la rapidité et la précision de l'algorithme.

Ces quelques contributions constituent sans doute un ensemble d'informations utiles visant les écueils et les précautions nécessaires dans l'élaboration et l'implémentation de lois de commande optimale pour des systèmes G -singuliers différentiellement plats comme le robot à plusieurs roues orientables.

Pour prendre encore un peu de recul, l'un des messages clefs de la thèse est qu'il peut parfois être intéressant de tirer parti de l'existence de singularités plutôt que de les considérer comme des situations qu'il faut éviter à tout prix. Cependant, comme nous le mentionnons dans le paragraphe suivant, des approfondissements sont nécessaires pour exploiter utilement ce point de vue.

8.2 Et après ?

Suite aux travaux réalisés au cours de la thèse, de nombreuses questions ont surgi et demeurent. Nous souhaitons exposer celles qui nous paraissent les plus dignes d'intérêt, en soulignant le lien qu'elles ont avec les contributions mentionnées plus haut.

1. Le problème de l'obtention de trajectoires avec singularités de saut dans le cas de systèmes plats a été abordé lors de la formulation de problèmes de commande optimale, notamment dans la section 7.1. Cependant d'autres problèmes peuvent surgir à la traversée d'une singularité, et en outre, les solutions proposées en commande optimale ne sont pas nécessairement transposables à d'autres types de contrôle.

– Un des problèmes qui peuvent apparaître avec une formulation similaire à celle qui est adoptée dans (7.5) est que la contrainte sur l'entrée traduite en terme de sorties plates est automatiquement satisfaite lors du passage par la singularité ! Deux conséquences fâcheuses peuvent se présenter. La première, est que la solution obtenue ne soit pas réalisable. Ceci est possible comme nous l'avons indiqué au début de l'ouvrage dans la section 2.1.3. Dans les méthodes d'optimisation utilisées dans cet ouvrage, pour tous les systèmes décrits, la parade est obtenue naturellement par la description des trajectoires des sorties plates à l'aide de fonctions polynômiales par morceaux : du moment que le passage par la singularité n'a pas lieu à un instant "nœud" la trajectoire des sorties sera compatible avec la dynamique du système. Néanmoins, une étude plus complète et plus générale serait la bienvenue.

La seconde est qu'il est aussi possible que des trajectoires optimales non seulement passent par une singularité de saut, mais encore y "restent" pendant un intervalle de temps. A titre d'exemple, on peut prendre le problème de changement d'état en temps minimal d'un robot unicycle commandé en vitesse sur chacune des deux roues. Il a en effet été démontré dans [1] que les trajectoires optimales sont des successions de translations et de rotations autour du milieu des roues. Même si, dans ce cas-là, un choix judicieux de sorties plates¹ évite que l'on ait à demeurer sur les singularités, il serait préférable pour d'autres systèmes (comme le

¹ autre que celui proposé dans la thèse : par exemple un autre point de l'essieu.

robot à roues orientables) de disposer d'une méthode adaptée pour gérer cette situation. En effet, comme sur la singularité de saut la propriété de platitude est mise en défaut et que la formulation que nous avons proposée implique que les contraintes sur les entrées sont automatiquement satisfaites, cette formulation n'est plus pertinente ou en tout cas ne permettra pas d'obtenir ce type de trajectoires.

- Parmi les pistes de recherche envisageables pour traiter les précédents problèmes, l'une serait de tirer parti de la définition de système plats avec singularité proposée dans la thèse pour proposer une classification des types de singularités, soit d'un point de vue algébrique et géométrique, soit d'un point de vue analytique. Avec une telle classification, des propositions adaptées de traversée de singularités pourraient être élaborées.

D'autre part, on peut aussi envisager que la stratégie consistant à utiliser les sorties plates soit couplée avec une autre description du problème aux abords de la singularité. Par exemple, pour le robot à plusieurs roues orientables on peut imaginer d'alterner les méthodes prévues dans cet ouvrage avec la formulation proposée par Isabelle Motte [28] qui permet de satisfaire les contraintes à chaque instant. Bien qu'un peu lourd, cela semble très possible dans le cas d'un contrôle par feedback ou de certains type de planification, mais sans doute plus complexe dans le cas de la commande optimale.

2. Comme cela a été signalé en 7.7.4, la proposition d'amélioration d'algorithme concernant le traitement des contraintes de parcours n'est pas véritablement implémentée en pratique dans le cadre d'un algorithme complet de commande optimale. Outre que cela serait sûrement profitable, il paraît aussi envisageable de proposer de nouvelles pistes d'amélioration, concernant la souplesse et les performances de ces algorithmes. Par exemple, il semble que l'on puisse mettre à profit la proposition d'amélioration pour réduire, voire supprimer l'impact du "treillis" virtuel créé par les points de collocation dans l'espace des contraintes que nous avons mentionné dans la section consacrées aux simulations (cf. figure 7.13). De plus on peut imaginer d'autres adaptations, comme la possibilité d'avoir un réseau de nœuds et/ou de points de collocation, mobiles ou "rafinable" comme c'est le cas dans les logiciels de dessin vectoriel.
3. D'un autre côté, il est évident que pour être exploitables, les problèmes de commande optimale proposés dans cette thèse devraient être plongés dans une stratégie de commande prédictive, sans quoi l'aspect "temps réel" avancé comme argument d'utilisation d'algorithmes comme NTG perd sa pertinence. Dans cette perspective, il conviendrait de nouveau d'étudier comment la structure de la description par des splines pourrait être exploitée. Par exemple, si les splines sont décrites sur cinq intervalles consécutifs, on peut imaginer d'appliquer la commande planifiée sur le premier, puis

de relancer le problème de commande optimale sur un horizon glissant, comme cela est couramment fait. Là encore une étude particulière semble nécessaire.

4. Enfin, en plus des simulations proposées ici, il est clair qu'il faudrait ajouter maintenant une phase d'expérimentation permettant de valider l'aspect concret des théories avancées, et d'en mesurer les limites.

En guise de conclusion, on peut remarquer que les différentes ouvertures et questions proposées ici ont toutes un lien avec l'approche algorithmique des problèmes posés, ce qui laisse espérer que la résolution de tels problèmes puisse trouver des applications plus larges.

Annexes

9.1 La fonction atan_2

La fonction atan_2 est “proprement” définie comme une fonction de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. De cette manière, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bijective. Pour un couple de coordonnées cartésiennes (x, y) , $\text{atan}_2(y, x)$ renvoie l’unique angle de $] -\pi, \pi]$ $[2\pi]$ correspondant à l’angle en coordonnées polaires. On pourrait aussi écrire :

$$\text{atan}_2(y, x) = \text{Arg}(x + iy)$$

où Arg donne l’argument d’un nombre complexe. atan_2 s’applique à (y, x) plutôt qu’à (x, y) , par mimétisme avec la fonction arctangente habituelle pour laquelle on écrirait $\text{atan}(y/x)$. Une autre manière d’écrire cette fonction est d’appliquer la fonction atan de la façon suivante :

$$2\text{atan}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right)$$

mais elle n’est pas définie lorsque $y = 0$ et $x \leq 0$, alors que dans cette situation atan_2 renvoie π .

9.2 Valeurs explicites de certaines matrices

Nous allons détailler l’expression de plusieurs matrices utilisées dans le document.

9.2.1 Matrice $G^T G$ de l’équation (6.7) à la page 76

La multiplication matricielle donne facilement :

$$G^T G = \begin{bmatrix} n & 0 & -\sum_{i=1}^n b_i \\ 0 & n & \sum_{i=1}^n a_i \\ -\sum_{i=1}^n b_i & \sum_{i=1}^n a_i & \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Comme on le montre ci-dessous, cette matrice est inversible dès que les centres de deux roues au moins sont distincts, ce qui est bien sûr toujours vérifié en pratique.

$$(G^T G)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} n \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 & -\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) & n \sum_{i=1}^n b_i \\ -\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) & n \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2 & n \sum_{i=1}^n a_i \\ n \sum_{i=1}^n b_i & n \sum_{i=1}^n a_i & n^2 \end{bmatrix}}{n^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 - n \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2 \right)} \quad (9.2)$$

Ici le dénominateur n'est nul, comme mentionné plus haut, que si $a_i = a_j$ et $b_i = b_j$ pour tout couple (i, j) . En effet si on met n en facteur on a la somme de deux nombres, $n \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$ et $n \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2$. Le premier par exemple peut être vu comme une différence. Le premier terme de cette différence est le produit du carré des normes des deux vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ et

$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Le second terme est le carré du produit scalaire de ces deux mêmes vecteurs. L'inégalité de Cauchy-Schwartz conclut que cette différence est toujours positive et n'est nulle que si les vecteurs sont colinéaires, ce qui revient à la condition évoquée plus haut sur les a_i . Il en est clairement de même pour les b_i .

9.2.2 Matrice $\widetilde{H}^T \widetilde{H}$ de l'équation (6.19) à la page 78

On souhaite comme précédemment étudier l'inversibilité de cette matrice. Lorsque cet inverse existe on a :

$$(\tilde{H}^T \tilde{H})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \cos^2 \beta_i & \sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin \beta_i \\ \sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin \beta_i & \sum_{i=1}^n \sin^2 \beta_i \end{bmatrix}}{\left(\sum_{i=1}^n \cos^2 \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \sin^2 \beta_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin \beta_i \right)^2} \quad (9.3)$$

où le dénominateur est le déterminant de $\tilde{H}^T \tilde{H}$.
Or

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \cos^2 \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \sin^2 \beta_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin \beta_i \right)^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos^2 \beta_i \sin^2 \beta_j - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos \beta_i \sin \beta_i \cos \beta_j \sin \beta_j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos \beta_i \sin \beta_j (\cos \beta_i \sin \beta_j - \cos \beta_j \sin \beta_i) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \cos \beta_i \sin \beta_j \sin(\beta_j - \beta_i) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin(\beta_j - \beta_i) (\cos \beta_i \sin \beta_j - \cos \beta_j \sin \beta_i) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin^2(\beta_j - \beta_i) \end{aligned} \quad (9.4)$$

d'où

$$(\tilde{H}^T \tilde{H})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \cos^2 \beta_i & \sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin \beta_i \\ \sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin \beta_i & \sum_{i=1}^n \sin^2 \beta_i \end{bmatrix}}{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin^2(\beta_j - \beta_i)} \quad (9.5)$$

Dès lors, il est clair que la matrice $\tilde{H}^T \tilde{H}$ n'est pas inversible si et seulement si tous les angles β_i sont égaux, c'est à dire lorsque le centre instantané de rotation est situé "à l'infini". Dans l'égalité (6.19) l'expression suivante intervient également :

$$\tilde{H}^T C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \rho_i \sin(\beta_i - \alpha_i) \sin \beta_i \\ - \sum_{i=1}^n \rho_i \sin(\beta_i - \alpha_i) \cos \beta_i \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

9.3 Régularité de la contrainte de coordination des roues

Dans cette section on souhaite montrer que, pour le robot à plusieurs roues orientables, la fonction qui au vecteur β des angles des roues associe la position du projeté stéréographique $\bar{I}$ du centre instantané de rotation I est lisse. Au lieu de l'expression (6.20) on obtiendra plutôt I d'une manière différente uniquement pour prouver que la fonction liant β à la projection stéréographique de I a les propriétés requises. Dans les équations qui suivent, on a exploité des propriétés de géométrie plane présentées sur la figure 9.1. Comme c'est l'égalité des β_i qui nécessite une étude particulière, nous allons exprimer (x_I, y_I) en fonction des différences des angles β_i pris par paires. Du fait de la contrainte de coordination on peut se contenter de deux paires distinctes.

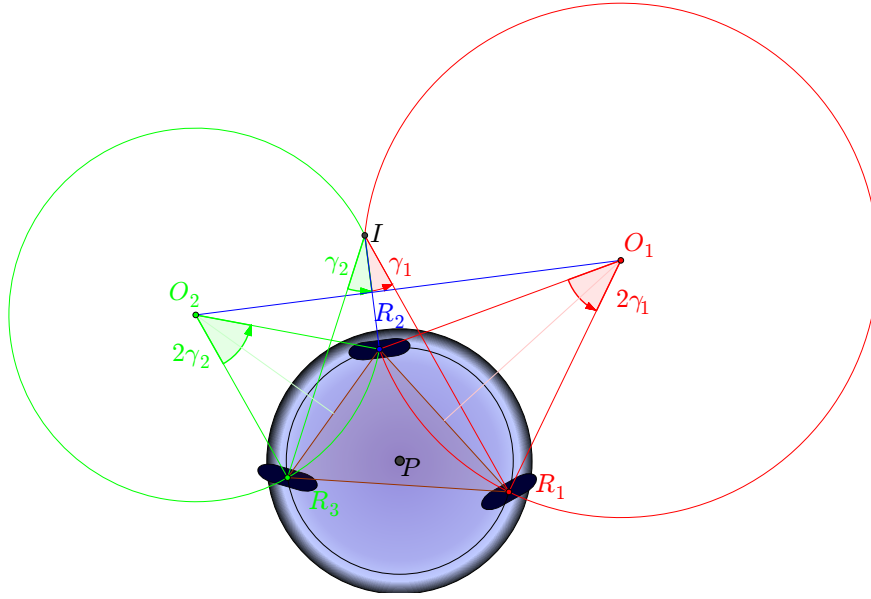


Fig. 9.1. Obtention géométrique du centre instantané de rotation

Posons donc $\gamma_1 = \beta_1 - \beta_2$, $\gamma_2 = \beta_2 - \beta_3$, $\bar{\gamma}_1 = \tan \gamma_1$ et $\bar{\gamma}_2 = \tan \gamma_2$. On sait que pour $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ donnés, le point I se situe sur l'intersection de deux cercles : le premier (respectivement deuxième) cercle centré en O_1 (respectivement O_2) qui est tel que l'angle (respectivement $(\overrightarrow{O_1 R_3}, \overrightarrow{O_1 R_2})$) est le double de $\text{atan} \bar{\gamma}_1$ (respectivement $\text{atan} \bar{\gamma}_1$). Bien sûr ces deux cercles ont deux points d'intersection, mais l'un des deux est déjà connu, puisque c'est R_2 . En posant,

$$L = \frac{\bar{b}_3}{\bar{\gamma}_2} - \frac{\bar{b}_2}{\bar{\gamma}_1} + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

$$R = \frac{\bar{a}_2}{\bar{\gamma}_1} - \frac{\bar{a}_3}{\bar{\gamma}_2} + \bar{b}_2 + \bar{b}_3$$

l'utilisation de calculs simples conduit aux expressions suivantes :

$$x_I = \frac{\frac{R}{\bar{\gamma}_1}(\bar{a}_2 L + \bar{b}_2 R) + a_1 R^2 + a_2 L^2 + \bar{b}_2 RL}{R^2 + L^2}$$

$$y_I = \frac{-\frac{L}{\bar{\gamma}_1}(\bar{a}_2 L + \bar{b}_2 R) + b_1 L^2 + b_2 R^2 + \bar{a}_2 RL}{R^2 + L^2}$$

Pour la disposition des roues en triangle rectangle suivante :

$$(a_1, b_1) = (0, -1), \quad (a_2, b_2) = (0, 0), \quad (a_3, b_3) = (-1, 0)$$

on a

$$x_I = \frac{\bar{\gamma}_1(1 + \bar{\gamma}_2)(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)}{\bar{\gamma}_2^2(1 + \bar{\gamma}_1)^2 + \bar{\gamma}_1^2(1 + \bar{\gamma}_2)^2}$$

$$y_I = \frac{\bar{\gamma}_2(1 + \bar{\gamma}_1)(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)}{\bar{\gamma}_2^2(1 + \bar{\gamma}_1)^2 + \bar{\gamma}_1^2(1 + \bar{\gamma}_2)^2}$$

d'où

$$y_1 = \frac{2x_I}{x_I^2 + y_I^2 + 1} = \frac{2\bar{\gamma}_1(1 + \bar{\gamma}_2)(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)}{(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)^2 + \bar{\gamma}_2^2(1 + \bar{\gamma}_1)^2 + \bar{\gamma}_1^2(1 + \bar{\gamma}_2)^2}$$

$$y_2 = \frac{2y_I}{x_I^2 + y_I^2 + 1} = \frac{2\bar{\gamma}_2(1 + \bar{\gamma}_1)(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)}{(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)^2 + \bar{\gamma}_2^2(1 + \bar{\gamma}_1)^2 + \bar{\gamma}_1^2(1 + \bar{\gamma}_2)^2}$$

$$y_3 = \frac{x_I^2 + y_I^2 - 1}{x_I^2 + y_I^2 + 1} = \frac{(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)^2 - \bar{\gamma}_2^2(1 + \bar{\gamma}_1)^2 - \bar{\gamma}_1^2(1 + \bar{\gamma}_2)^2}{(1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2)^2 + \bar{\gamma}_2^2(1 + \bar{\gamma}_1)^2 + \bar{\gamma}_1^2(1 + \bar{\gamma}_2)^2}$$

Il est très clair que mises sous cette forme, les expressions précédentes sont prolongeables pour $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0$, et qu'autour de ce point, la fonction qui à $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$ associe (y_1, y_2, y_3) est lisse. De plus la fonction qui associe les β_i aux $\bar{\gamma}_i$ est lisse autour des points où les β_i sont égaux modulo π . L'expression du centre instantané de rotation à partir des $\bar{\gamma}_i$ est utile pour le point que nous venons de démontrer, néanmoins, dans le cas d'un robot dont les centres des roues sont cocycliques (ce qui est toujours le cas pour trois roues) cette expression n'est plus valide dès que I est sur le cercle circonscrit aux R_i . Ceci est ennuyeux en pratique, et aussi en théorie, puisque cela nécessite le recours à une autre expression, comme par exemple (6.20), pour montrer qu'il n'y a pas de problème de définition de (y_1, y_2, y_3) lorsque I est sur ce cercle.

Finalement, on a montré que la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \rightarrow & \mathbb{S}_3 \\ \beta & \mapsto & (y_1, y_2, y_3) \end{array} \quad (9.7)$$

est bien lisse en tout point de $\mathcal{M}$.

9.4 Description de $\mathcal{M}$ et $T\mathcal{M}$ pour un nombre de roues $r \geq 4$.

Avec la définition de $\mathcal{M}$, on dispose d'une partie de la contrainte de coordination qui ne concerne que les β . Etudions-la de plus près. Dire que $H(\beta)$ est de rang égal à deux, équivaut à dire que $H(\beta)^T H(\beta)$ est également de rang égal à deux. Comme cette dernière matrice est carrée on peut en prendre son déterminant et en posant $\mu(\beta) = \det(H(\beta)^T H(\beta))$:

$$\beta \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mu(\beta) = 0 \quad (9.8)$$

Comme le système est tel que $\dot{\beta} = U$, on en déduit aisément que la contrainte de coordination se traduit par $U \in T_\beta \mathcal{M}$. $T_\beta \mathcal{M}$ peut aussi se déduire analytiquement. En dérivant l'égalité (9.8) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \dot{\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \beta} U = 0. \quad (9.9)$$

Cependant, pour la définition de μ que nous avons adoptée, cette nouvelle égalité ne permet en rien de trouver la contrainte vérifiée par les entrées U puisque pour un β admissible, $\frac{\partial \mu}{\partial \beta}$, qui est la différentielle de μ par rapport à β est nulle. En effet, μ est le déterminant d'une matrice symétrique semi-définie positive. Donc, si $\mu(\beta) = 0$, on a un minimum local (et même global) de μ , la différentielle de μ est donc nulle en ce point. Cependant, il est possible de dériver une seconde fois par rapport au temps, ce qui conduit à :

$$\dot{\beta}^T \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} U + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \ddot{\beta} = 0 \Leftrightarrow U^T \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} U = 0. \quad (9.10)$$

Ici $\frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2}$ représente la matrice hessienne de μ . Elle est clairement semi-définie positive puisque l'on est à un minimum de μ . Il resterait à prouver qu'elle est de rang 2 pour assurer que U est bien contraint à $T_\beta \mathcal{M}$.

Littérature

1. D.J.Balkcom, M.T.Mason, *Time optimal trajectories for bounded velocity differential drive robots*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000.
2. R. Bhattacharya, OPTRAGEN : A MATLAB TOOLBOX FOR OPTIMAL TRAJECTORY GENERATION, IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, 2006.
3. A.Benayad, *Modélisation et commande des robots mobiles à roues*, PhD Thesis, Université Chouaïb Doukkali, September 2000.
4. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, 1978.
5. S.Boyd, L.Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
6. A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Ginn and Company, 1969.
7. G.Campion, G.Bastin, and B.d'Andréa-Novel, *Structural properties and classification of kinematics and dynamis models of wheeled mobile robots*, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 12(1), pp. 47-62, Février 1996.
8. C.Canudas de Wit, B.Siciliano, and G.Bastin, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, 1996.
9. L.Caracciolo, A.de Luca, S.Iannitti, *Trajectory Tracking of a Four-Wheel Differentially Driven Mobile Robot*, in Proc. of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2632-2838, 1999.
10. F.Chaplais, N.Petit, *Inversion in Indirect Optimal Control of Multivariable Systems*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations 14, pp 294–317, 2008.
11. B.Charlet, *Sur Quelques Problèmes de Stabilisation Robuste des Systèmes Non Linéaires*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1989.
12. J.Dimon Bendtsen, P.Andersen, and T.Søndergård Pedersen, *Robust Feedback Linearization-based Control Design for a Wheeled Mobile Robot*, Proceedings of the 6th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC), 2002.

13. L.E.Dubins, *On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents*, American Journal of Mathematics, 79 :497-516, 1957.
14. W.B.Dunbar, M.B.Milam, R.Franz, and R.M.Murray, *Model Predictive Control of a Thrust-Vectored Flight Control Experiment*, Proceedings of IFAC 2002, in Barcelona, Spain, 2002.
15. M.Fliess, J.Lévine, P.Martin, and P.Rouchon, *Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples*, International Journal of Control, 61(6) :1327-1360, 1995.
16. M.Fliess, J.Lévine, Ph.Martin, and P.Rouchon, *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 44(5) :922-937, 1999.
17. P.E.Gill, W.Murray, M.A.Saunders, and M.H.Wright, *User's Guide For NP-SOL 5.0 : A FORTRAN Package For Nonlinear Programming*, Technical Report SOL 86-1, Stanford Business Software Inc., disponible sur [http ://www.sbsi-sol-optimize.com](http://www.sbsi-sol-optimize.com), 1998.
18. L.Gracia, and J.Tornero, *A new geometric approach to characterize the singularity of wheeled mobile robots*, ROBOTICA, 25 : 627-638 Part 5 sep-oct, 2007.
19. A.Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
20. Y.Lenoir, P.Martin, and P.Rouchon, *$2k\pi$, the juggling robot*, Control and Decision Conference, Tampa, pages 1995-2000, 1998.
21. J.Lévine, *Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires*, cours à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, mars 2004.
22. P.Martin, R.M.Murray, and P.Rouchon, *Flat Systems*, Plenary Lectures and Mini-Courses, ECC 97, Brussels, pages 211-264, 1997.
23. A.Micaelli, C.Samson, *Trajectory tracking for unicycle-type and two-steering-wheels mobile robots*, INRIA Research Report Num. 2097, November 1993.
24. A.Micaelli, *Trajectory tracking for two-steering-wheels mobile robots*, IFAC Symposium on Robot Control, pp. 249-256, September 1994.
25. M.B.Milam, K.Mushambi, and R.M.Murray, *A New Computational Approach to Real-Time Trajectory Generation for Constrained Mechanical Systems*, IEEE Conference on Decision and Control, 2000.
26. M.B.Milam, N.Petit, and R.M.Murray, *Constrained Trajectory Generation For Micro-Satellite Formation Flying*, AIAA, 2001.
27. M.Milam, *Real-Time Optimal Trajectory Generation for Constrained Dynamical Systems*, PhD thesis at California Institute of Technology, 2003.
28. I.Motte, *Contribution to modeling and control design for wheeled mobile robots*, PhD Thesis at Université catholique de Louvain-La-Neuve, 2002.
29. M.K.Muezzinoglu, and T.Inanc, *Trajectory Generation in Guided Spaces using NTG Algorithm and Artificial Neural Networks*, Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.
30. K.Pathak, S.K.Agrawal, and E.Messina, *A Computationally Efficient Scheme for Hierarchical Predictive Control*, Performance Metrics for Intelligent Systems PerMIS, Gaithersburg, 2003.

31. N.Petit, M.B.Milam, R.M.Murray, *Inversion Based Constrained Trajectory Optimization*, 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2001.
32. N.Petit, M.B.Milam, R.M.Murray, *A new computational method for optimal control of a class of constrained systems governed by partial differential equations*, in Proc. of the 15th IFAC World Congress, 2002.
33. N.Petit, *Optimisation*, cours à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, disponible sur <http://cas.ensmp.fr/~petit/>, 2005.
34. J.A.Reeds, L.A.Shepp *Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards*, Pacific Journal of Mathematics, 145(2) :367-393,1990.
35. P.Rouchon, M.Fliess, J.Levine and P.Martin, *Flatness, motion planning and trailer systems*, Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control (2700-2705), San-Antonio, 1993.
36. R.O. Saber, W.B.Dunbar and R.M.Murray, *Cooperative control of multi-vehicle systems using cost graphs and optimization*, Proceedings of the 2003 American Control Conference, Denver, USA, 2003.
37. K.Seo, R.Murray, and J.S.Lee, *Exploring Optimal Gaits for Planar Carangiform Robot Fish Locomotion*, Proceedings of IFAC 2005, Praha, 2005.
38. H. Sira-Ramirez and S.K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, 2004.
39. D.Sung Kim, H.Chul Lee, W.Hyun Kwon, *Geometric Kinematics Modeling of Omni-directional Autonomous Mobile Robot and Its Applications*, Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation San Francisco, April 2000.
40. H.Sussmann and J.Willems, *300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems, pages 32-44, 1997.
41. E.Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.
42. B.Thuilot, *Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles à roues*, PhD Thesis at Ecole des Mines de Paris, 1995.
43. B.Thuilot, B.d'Andréa-Novel, and A.Micaelli, *Modeling and Feedback Control of Mobile Robots with Several Steering Wheels*, IEEE Transactions on Robotics and Automation Vol. 12, 2 :375-391, 1996.
44. D.Wang, and F.Qi, *Trajectory Planning for a Four-Wheel-Steering Vehicle*, Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, May 2001.
45. Y.Yavin, *Modelling the Motion of a Car with Four Steerable Wheels*, Elsevier Mathematical and Computer Modelling 38, pp. 1029-1036, 2003.

Articles écrits au cours de la thèse, en lien avec ce document

46. J-B.Coulaud, G.Campion, *Optimal Trajectory Tracking for Differentially Flat Systems with Singularities*, in Proc. of ICCA2007 Conference, Guangzhou, 2007.

47. J-B.Coulaud, G.Campion, *Improving Trajectory Constraints Processing in some Optimal Control Algorithms*, in Proc. of the 17th IFAC World Congress, Seoul, 2008.
48. J-B.Coulaud, G.Campion, *Gap-Singular Systems : Definition and Consequences in Trajectory Planning*, International Journal of Control, Issue 12, December 2008.
49. J-B.Coulaud, G.Campion, A SOUMETTRE *Gap-Singularities of a Wheeled Mobile Robot with Steering Wheels*.

Article écrit au cours de la thèse, sans lien direct avec le document

50. J-B.Coulaud, G. Bastin, and M. Dewan, *Stability analysis of a vision-based control design for an autonomous mobile robot*, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 22(9), 2006, pp. 1062 - 1069.