

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
UFR DE MATHÉMATIQUES, LAB. PAUL PAINLEVÉ (UMR 8524)

et

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES, UNITÉ AGEL

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES PURES

Christophe BOILLEY

Plongement entre variétés lisses à homotopie rationnelle près

Thèse dirigée par Pascal LAMBRECHTS et Daniel TANRÉ
soutenue le 8 décembre 2005

Composition du jury :

Jean MAWHIN (Président), Université de Louvain-la-Neuve
Pascal LAMBRECHTS, Université de Louvain-la-Neuve
Daniel TANRÉ, Université de Lille 1
Yves FÉLIX, Université de Louvain-la-Neuve
Micheline VIGUÉ-POIRRIER, Université de Villetaneuse
Benoît FRESSE, Université de Lille 1
Stefan PAPADIMA, Romanian Academy, Bucarest

Remerciements

à Fabienne Bouron, pour sa confiance première,

à tous mes professeurs de mathématiques,
qui m'ont donné le goût d'aller plus loin,

à Daniel et Pascal, pour leur soutien et leur disponibilité,

à l'accueil du Relais et à l'équipe du jeu du dictionnaire.

Table des matières

Introduction	ix
1 Plongement à homotopie près	1
1.1 Notations et rappels	1
1.1.1 Variétés	1
1.1.2 Classes caractéristiques	2
1.1.3 Espaces de Thom	2
1.1.4 Complexes et paires de Poincaré	3
1.1.5 Application de transfert	4
1.2 Quelques théorèmes d'existence de plongements	5
1.2.1 Plongement en grande codimension	5
1.2.2 Plongement de Poincaré	6
1.3 Quelques conditions nécessaires	8
1.3.1 Obstruction rationnelle à l'immersion	8
1.3.2 Multiplicativité de l'application de transfert	9
1.3.3 Classe d'Euler du plongement	10
1.3.4 Plongement dans une variété elliptique	11
2 Quelques invariants de cobordisme	13
2.1 Cobordisme normal	13
2.1.1 Fibrés vectoriels stables	13
2.1.2 Structure normale stable sur une variété	14
2.1.3 Structure des groupes de cobordisme	15
2.2 Nombres de Pontryagin	17
2.2.1 Nombres de Pontryagin normaux	17
2.2.2 Réseau et congruences de Stong	18
2.3 Formule de la signature de Hirzebruch	19
2.3.1 Groupe de Witt	19
2.3.2 Forme d'intersection	20

2.3.3	Polynôme de Hirzebruch	20
3	Homotopie rationnelle	23
3.1	Rationalisation	23
3.1.1	Espace $\mathbb{Q}$ -locaux	23
3.1.2	Applications et diagrammes	24
3.1.3	Structure normale rationnelle	25
3.2	Traduction algébrique	27
3.2.1	Algèbres différentielles graduées commutatives	27
3.2.2	Foncteur A_{PL}	28
3.2.3	Formalité	29
3.3	Fibration sphérique rationnelle	29
3.3.1	Cas général	29
3.3.2	Rationalisation de fibrés en sphères	31
4	Fibrés vectoriels sur une variété	33
4.1	Généralisation des nombres de Pontryagin	33
4.1.1	Construction	33
4.1.2	Exemples	35
4.1.3	Lien avec le cobordisme	35
4.2	Structure du réseau d'Euler-Pontryagin	38
4.2.1	Structure d'anneau bigradué	38
4.2.2	Inclusion du réseau de Pontryagin normal	39
4.2.3	Réseau stable	39
4.3	Opérations invariantes par cobordisme normal	41
4.3.1	Auto-intersection	41
4.3.2	Sphérisation	43
5	Plongement de Poincaré rationnel	47
5.1	Différentes approches	47
5.1.1	Formulation topologique	47
5.1.2	Formulation algébrique	49
5.2	Exemples de réalisabilité	51
5.2.1	Cas d'une application formalisable	52
5.2.2	Dans une sphère d'homologie rationnelle	52
5.2.3	Contre-exemple	53
5.3	Utilisation de l'application de transfert	54
5.3.1	Application de Thom-Pontryagin rationnelle	54
5.3.2	Cas d'une fibration sphérique rationnelle triviale	56
5.4	Quelques obstructions	57

5.4.1	Cohomologie du complémentaire	57
5.4.2	Cup-produit fonctionnel	58
6	Lissage de structures rationnelles	63
6.1	Résultats principaux	63
6.1.1	Théorèmes de réalisation géométrique	63
6.1.2	Applications	65
6.1.3	Théorème de réalisabilité rationnelle du plongement	66
6.2	Réalisation d'un fibré vectoriel sur une variété	69
6.2.1	Théorème de chirurgie rationnelle	69
6.2.2	Rationalité de certains groupes de cobordisme	70
6.2.3	Démonstration du théorème 6.1	71
6.3	Réalisation géométrique du plongement	72
6.3.1	Plongement de Poincaré rationnel fibré stable	73
6.3.2	Construction d'un cobord de $S\xi$	74
6.3.3	Fin de la démonstration	76
7	Plongement dans une variété fixée	77
7.1	Théorème principal	77
7.2	Chirurgie normale plongée	79
7.2.1	Plongement fibré	79
7.2.2	Données de chirurgie	81
7.2.3	Opération de chirurgie	83
7.3	Application normale plongée	84
7.3.1	Noyau de chirurgie rationnelle	85
7.3.2	Chirurgie en dimension moitié	86
7.3.3	Théorème de réduction du noyau	87
7.4	Démonstration du théorème principal	88
7.4.1	Dérationalisation d'une application	88
7.4.2	Réalisation géométrique du plongement homologue	89

Introduction

La motivation de notre travail vient du problème fondamental de la topologie différentielle suivant :

Q.1 : *étant donnée une application continue $f: M \rightarrow V$ entre deux variétés différentiables fermées¹, existe-t-il un plongement² lisse $\tilde{f}: M \hookrightarrow V$ homotope à f ?*

Commençons par rappeler quelques résultats classiques autour de cette question. Lorsque $\dim(V) > 2 \dim(M)$, un argument de mise en position générale montre qu'il existe toujours un plongement dans la classe d'homotopie de f . Au contraire, lorsque $\dim(V) < \dim(M)$ il est impossible d'obtenir un tel plongement. En dehors de ces deux cas extrêmes le problème posé est très difficile. Dans la suite, nous notons $m = \dim(M)$ et $k = \dim(V) - \dim(M)$.

Même dans le cas particulier où $V = \mathbb{R}^{m+k}$ (ou, pour rester dans le cadre des variétés compactes, lorsque $V = S^{m+k}$, ce qui donne un problème équivalent si $k > 0$), il n'y a pas de réponse connue en toute généralité. Étant donné qu'un plongement dans S^{m+k} fournit automatiquement un plongement dans S^{m+k+1} , il est naturel de se demander quelle est la plus petite dimension de sphère dans laquelle se plonge une variété compacte donnée M . Ce nombre est le *rang de plongement* de la variété M . Si $\alpha(m)$ désigne le nombre de 1 dans l'écriture de m en base 2, il est assez facile de construire une variété compacte de dimension m qui ne peut se plonger dans la sphère $S^{2m-\alpha(m)}$. Citons la conjecture suivante de S. Gitler [12] :

Conjecture (S. Gitler) *Toute variété compacte lisse de dimension m se plonge dans la sphère $S^{2m-\alpha(m)+1}$.*

Nous ne considérons dans la suite que des variétés différentiables orientées fermées. L'existence d'un plongement $\tilde{f}: M \hookrightarrow V$ en codimension k implique deux conditions classiques qui seront fondamentales dans notre travail.

1. Une variété différentiable est dite *fermée* si elle est compacte sans bord.

2. Un plongement est une immersion injective induisant un difféomorphisme sur son image.

Existence un fibré normal. Il existe un fibré vectoriel orienté ξ de rang k sur M , appelé *fibré normal du plongement*, dont les classes caractéristiques satisfont certaines relations (propositions 1.13 et 1.18) ne dépendant que de l'application $\tilde{f}$ en cohomologie.

Existence d'un complémentaire. Il existe un espace C de type fini, appelé *complémentaire*, muni d'une injection $S\xi \hookrightarrow C$ et d'une application $C \rightarrow V$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. le diagramme $S\xi \xrightarrow{i} C$ est une somme amalgamée homoto-

$$\begin{array}{ccc} S\xi & \xrightarrow{i} & C \\ p \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

gique, c'est-à-dire induit une équivalence d'homotopie $M \times \{0\} \cup_p$

$$S\xi \times [0, 1] \cup_i C \times \{1\} \xrightarrow{\cong} V;$$

2. la paire $(C, S\xi)$ satisfait la dualité de Poincaré.

Un tel diagramme est appelé un *plongement de Poincaré*, notion homotopique admettant une définition plus large, mais que nous spécifions au cas de plongements entre variétés fermées orientées.

Cette seconde condition vient du fait que le fibré en disques $D\xi$ associé au fibré normal du plongement se réalise comme voisinage compact de la variété plongée $\tilde{f}(M) \subset V$. Le complémentaire fermé C de ce voisinage permet de construire une décomposition de la variété but sous la forme $V = D\xi \cup_{S\xi} C$. Le fibré en sphères $S\xi$, bord commun de $D\xi$ et C , est appelé *frontière*.

Un célèbre théorème réunissant les contributions de W. Browder, A. J. Casson, D. Sullivan et C. T. C. Wall ramène le problème de topologie différentielle de la question Q.1 à un problème de théorie de l'homotopie. Il montre en effet qu'en codimension $k \geq 3$, pour obtenir un plongement homotope à f , il faut et il suffit qu'il existe un fibré normal de rang k et un plongement de Poincaré dans lequel s'inscrivent l'application f et le fibré en sphères $S\xi$.

La difficulté de la question Q.1 vient cependant du fait qu'on ne sait pas actuellement réduire ces deux conditions à un problème algébrique, ni *a fortiori* à un algorithme de calcul.

Après avoir rappelé ces résultats classiques, venons-en aux résultats de la thèse proprement dite. Notre travail a consisté en l'étude de la question Q.1 dans le cadre de la théorie de l'homotopie rationnelle. Nous en avons tiré de nouveaux résultats d'existence de plongements et de nouvelles obstructions à ceux-ci.

Pour expliquer plus précisément la question que nous traitons, rappelons que deux espaces simplement connexes ont même type d'homotopie rationnelle s'ils sont reliés par un zig-zag d'applications induisant des isomorphismes en homologie rationnelle. En particulier, il y a identification entre les homologies rationnelles de deux espaces ayant même type d'homotopie rationnelle. Par exemple, nous appelons *sphère d'homotopie rationnelle* toute variété fermée simplement connexe du type d'homotopie rationnelle d'une sphère S^n , avec $n \geq 2$. En pratique, une sphère d'homotopie rationnelle désigne toute variété fermée simplement connexe dont l'homologie entière réduite est de torsion en dessous du degré maximal. De même, le type d'homotopie rationnelle d'applications constitue une relation d'équivalence sur les applications entre espaces simplement connexes.

La pertinence de l'approche des problèmes de topologie différentielle par l'homotopie rationnelle est justifiée par le théorème fondamental de D. Sullivan [38] qui classe les variétés lisses fermées orientées simplement connexes à *ambiguïté finie près* en utilisant certains invariants rationnels : le type d'homotopie rationnelle, les classes de Pontryagin du fibré normal stable et la classe d'orientation. En suivant le point de vue de D. Sullivan, nous appelons *structure rationnelle* d'une variété lisse fermée orientée simplement connexe M la donnée de ces trois invariants rationnels. Avec cette terminologie nous pouvons exprimer la question à laquelle nous nous proposons de répondre :

Q.2 : *étant donnée une application continue $f: M \rightarrow V$ entre variétés lisses fermées simplement connexes, existe-t-il un plongement lisse $\tilde{f}: \tilde{M} \hookrightarrow \tilde{V}$ tel que les variétés M et $\tilde{M}$ (resp. V et $\tilde{V}$) aient même structure rationnelle et tel que f et $\tilde{f}$ aient même type d'homotopie rationnelle d'applications ?*

Une solution à ce problème est appelé un *plongement rationnellement équivalent*.

Pour répondre à cette question, nous développons une version rationnelle du plongement de Poincaré (chapitre 5). La dualité de Poincaré est considérée à coefficients rationnels et le fibré vectoriel en sphères est remplacé par une fibration sphérique rationnelle. En supposant que la première condition est satisfaite, à savoir qu'il existe un fibré vectoriel sur la variété source dont les classes caractéristiques satisfont une certaine équation, nous montrons que la construction d'un plongement rationnellement équivalent à *variété source fixée* se ramène à l'existence d'un plongement de Poincaré rationnel. Plus précisément, notre théorème 6.2 s'exprime par le résultat suivant.

Théorème A *Soit M et V deux variétés fermées simplement connexes orientées de dimensions respectives m et $m + k$ avec $m \geq 5$ et $k \geq 3$.*

Soit ξ un fibré vectoriel orienté de rang k sur M et $f: M \rightarrow V$ une application continue telle que les classes de Pontryagin normales satisfont la relation dans $H^(M; \mathbb{Q})$*

$$P(\nu_M) = P(\xi) \cdot f^* P(\nu_V).$$

Si l'application f s'inscrit à homotopie rationnelle près dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière rationnellement équivalente à $S\xi$, alors il existe un plongement $\tilde{f}: M \hookrightarrow \tilde{V}$ de fibré normal ξ qui soit rationnellement équivalent à f .

L'intérêt de cette version rationnelle du théorème de Browder-Casson-Sullivan-Wall [42] réside dans le remplacement de la condition sur le plongement de Poincaré rationnel par un problème algébrique équivalent (théorème 5.3). Cela nous permet de donner des conditions suffisantes à l'existence d'un plongement rationnellement équivalent dans certains cas. Notamment :

Corollaire 6.3 *Soit M une variété fermée orientée simplement connexe de dimension $m \geq 5$. Supposons qu'il existe une immersion de M dans une sphère d'homotopie rationnelle simplement connexe en codimension $(k - 1)$, de fibré normal ν . Si k est impair, supposons aussi que $p_{\frac{k-1}{2}}(\nu_M) = 0$.*

Alors M se plonge dans une sphère d'homotopie rationnelle simplement connexe en codimension k de fibré normal $\nu \oplus \varepsilon^1$.

La conjecture des immersions affirme que toute variété de dimension m se plonge dans la sphère $S^{2m-\alpha(m)}$. Combinée au corollaire 6.3, elle conforte la conjecture de Gitler puisqu'alors toute variété fermée *simplement connexe* se plongerait dans une sphère d'homotopie rationnelle de dimension $(2m - \alpha(m) + 1)$.

Le théorème A présuppose l'existence d'un fibré vectoriel de classes caractéristiques prescrites sur la variété source. L'obtention d'un tel fibré est un problème difficile en général. Mais à l'aide d'une généralisation des nombres de Pontryagin usuels, nous ramenons ce problème dans le contexte de l'homotopie rationnelle à un problème de congruences (théorème 6.1). Notons qu'à la différence du théorème de D. Sullivan sur la réalisabilité des types d'homotopie rationnelle par des variétés, notre théorème de réalisabilité par des variétés *munies d'un fibré vectoriel* fait parfois aussi apparaître des obstructions lorsque la dimension de la variété n'est pas multiple de 4.

Exemple (application 4.17) Il n'existe pas de variété fermée orientée de même cohomologie rationnelle que $\mathbb{C}P(3)$ et de classe de Pontryagin nulle qui puisse être munie d'un fibré vectoriel orienté de rang 2 dont le cube de la classe d'Euler corresponde à la classe fondamentale.

L'évaluation des congruences se fait à l'aide d'une famille de réseaux universels $\mathcal{L}_m(k)$ indépendants des variétés considérées et qui engendrent respectivement les groupes d'homologie rationnels $H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$ comme espaces vectoriels.

Ayant ramené les conditions sur le fibré vectoriel normal et sur le complémentaire à deux problèmes algébriques, nous répondons à la question Q.2 grâce à notre théorème 6.6 de réalisabilité d'un plongement rationnellement équivalent, quitte à faire varier la variété source *et* la variété but dans leur type d'homotopie rationnelle respectif.

L'énoncé utilise la terminologie des $\mathbb{Q}$ -localisations, sur lesquelles une structure normale rationnelle consiste en une série de classes de cohomologie $P = 1 + \sum_i p_i$ correspondant à des classes de Pontryagin normales putatives.

Théorème 6.6 *Soit X_0 et Y_0 deux complexes de Poincaré rationnels orientés 1-connexes $\mathbb{Q}$ -locaux de dimensions respectives m et $m + k$, munis de structures normales rationnelles P_X et P_Y induites par $b_X: X_0 \rightarrow BSO_0$ et $b_Y: Y_0 \rightarrow BSO_0$.*

Soit $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$. Supposons que $k \geq 3$ et $m \geq 5$.

L'application φ est réalisable par un plongement si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *les structures normales rationnelles sur X_0 et Y_0 sont réalisables.*
2. *les classes $P_\varphi = P_X \cdot \varphi^*(P_Y)^{-1} \in H^*(X_0; \mathbb{Q})$ et $e_\varphi = \varphi^* \varphi^!(1) \in H^k(X_0; \mathbb{Q})$ sont induites par une application $c: X_0 \rightarrow BSO(k)_0$, c'est-à-dire que :*
 - *la classe P_φ s'écrit sous la forme $1 + \sum_{1 \leq i \leq \frac{k}{2}} p_i(\varphi)$ avec $|p_i(\varphi)| = 4i$,*
 - *si k est impair alors $e_\varphi = 0$, et si k est pair alors $e_\varphi^2 = p_{k/2}(\varphi)$;*
3. *si m est multiple de 4, ou si m est pair et $m - k$ est multiple de 4, alors l'image de la classe d'orientation de X_0 par l'application $(b_X, c): X_0 \rightarrow BSO \times BSO(k)$ en homologie rationnelle appartient au réseau d'Euler-Pontryagin $\mathcal{L}_m(k)$;*
4. *l'application φ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel orienté de frontière $S(c)$.*

Une illustration de ce théorème est donnée par le corollaire 6.8. Nous démontrons que sous des hypothèses homologiques simples, tout morphisme d'algèbres graduées entre les cohomologies de deux variétés fermées représente un plongement en cohomologie. L'application de transfert $\Phi^!$ est définie à l'aide de la dualité de Poincaré (voir définition 1.6) et la classe totale de Pontryagin du fibré normal putatif $P(\Phi)$ est définie comme dans la proposition 1.13.

Corollaire 6.8 *Soit M et V deux variétés fermées simplement connexes en codimension $k \geq 3$. Soit $\Phi: H^*(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$ un morphisme d'algèbre.*

Supposons que $\Phi\Phi^! = 0$ et que $P(\Phi) \in H^{<2k-2}(M; \mathbb{Q})$. Supposons enfin que $\dim(M)$ ne soit pas un multiple de 4.

Alors il existe des variétés fermées simplement connexes $\widetilde{M}$ et $\widetilde{V}$ rationnellement homologues à M et V avec mêmes classes de Pontryagin et classes d'orientation, munies d'un plongement lisse $\tilde{f}: \widetilde{M} \hookrightarrow \widetilde{V}$ induisant Φ en cohomologie comme sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} H^*(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & H^*(\widetilde{V}; \mathbb{Q}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^*(M; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\Phi} & H^*(V; \mathbb{Q}). \end{array}$$

Nous nous sommes aussi intéressés au problème avec la contrainte supplémentaire de la variété *but* fixée à l'avance. Le résultat le plus général que nous avons démontré dans ce sens est le théorème 7.3. Une *dilatation homogène* de rapport $t \in \mathbb{Z}^*$ sur un espace vectoriel gradué H^* est l'isomorphisme algébrique induisant l'homothétie de rapport t^d en degré d .

Théorème B *Soit $f: M^m \rightarrow V^{m+k}$ une application continue entre variétés orientées fermées simplement connexes. Supposons que*

- $k > \frac{m}{2} + 1$;
- V soit rationnellement $\frac{m}{2}$ -connexe et $f^*(P(\tau_V)) = 1 \in H^*(M; \mathbb{Q})$
- si $m = 4r$ alors M est de signature nulle.

Alors il y a équivalence entre

1. *f est cohomologiquement $\mathbb{Q}$ -réalisable par un plongement, i.e. il existe une variété lisse orientée fermée simplement connexe $\widetilde{M}$, munie d'un quasi-isomorphisme rationnel $h: \widetilde{M} \rightarrow M$ préservant les classes de Pontryagin du fibré normal stable, une dilatation homogène λ de même*

degré sur $H^*(V)$, et un plongement $\tilde{f}: \widetilde{M} \hookrightarrow V$ tels que $\tilde{f}^* \lambda = h^* f^*$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & V \\ h \downarrow \simeq_{\mathbb{Q}} & & \\ M & \xrightarrow{f} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^*(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & H^*(V; \mathbb{Q}) \\ h^* \uparrow \cong & & \uparrow \lambda \\ H^*(M; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{f^*} & H^*(V; \mathbb{Q}) \end{array}$$

2. l'application $f^* f^!: H^*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{*+k}(M; \mathbb{Q})$ est la multiplication par une classe $e \in H^k(V; \mathbb{Q})$ qui est nulle si k est impair.

Nous en tirons le corollaire suivant :

Corollaire 7.4 : *Toute variété fermée simplement connexe M de dimension m et de signature nulle est rationnellement équivalente à une variété M' avec mêmes classes de Pontryagin qui se plonge dans la sphère $S^{[\frac{3m}{2}]+2}$.*

Le traitement algébrique de la question Q.2 permet également de définir de nouvelles obstructions au plongement. Nous utilisons notamment l'application de transfert en cohomologie $f^!: H^{*-k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(V; \mathbb{Q})$ (définition 1.6) pour indiquer une obstruction au plongement lorsque la variété but est elliptique, c'est-à-dire que l'espace vectoriel $\pi_*(V) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension totale finie. Il n'y a pas de plongement rationnellement équivalent à $f: M \rightarrow V$ si la cohomologie rationnelle de M donne deux images linéairement indépendantes dans le dual de l'homotopie rationnelle de V par l'application de transfert (corollaire 5.11). Ce résultat est dans la veine de ceux de S. Papadima [31], qui donne une obstruction au plongement dans une variété elliptique en utilisant les classes de Pontryagin (voir théorème 1.22).

En utilisant des outils plus sophistiqués tel que le cup-produit fonctionnel (définition 5.16), nous introduisons une autre obstruction qui n'est pas détectée par l'application en cohomologie.

Théorème (Corollaire 5.18) *Soit $f: M \rightarrow V$ une application continue entre variétés fermées simplement connexes en codimension $k \geq 3$.*

Si le cup-produit fonctionnel

$$\cdot \cup_f f^!(1): \text{Ker } f^* \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q}) / (\text{im } f^* + (f^* f^!(1)))$$

est non-nul, alors l'application f n'est pas rationnellement équivalente à un plongement.

Pour illustrer ce résultat, nous présentons un exemple d'application

$$f: S^2 \times S^7 \# S^3 \times S^6 \rightarrow S^2 \times S^{13} \# S^6 \times S^9$$

dont induisant un cup-produit fonctionnel non nul, qui par conséquent ne peut être réalisé par un plongement même à équivalence rationnelle près (exemple 5.15). Il est intéressant de noter que cette obstruction est indépendante des obstructions classiques données par les classes de Pontryagin.

En résumé, nous exprimons un certain nombre d'obstructions rationnelles à l'existence d'un plongement dans une classe d'homotopie donnée (chapitres 4 et 5), puis nous montrons que ces obstructions caractérisent l'existence d'un plongement dans une classe d'équivalence rationnelle d'application. Nous construisons en effet un plongement lisse entre variétés fermées simplement connexes orientées chaque fois que les obstructions précédemment définies sont levées (théorème 6.2).

Notre méthode s'appuie sur les techniques de chirurgie normale développées par W. Browder et S. Novikov. La démonstration du théorème A se fait par chirurgie sur un complémentaire putatif afin de construire la nouvelle variété but. Les obstructions à l'existence d'une équivalence rationnelle dans une classe de cobordisme normal se calculent plus facilement que dans le cas de l'homotopie entière.

Pour démontrer le théorème B, nous développons les techniques de chirurgie plongée. Ici la variété but est fixée et nous procédons par chirurgie sur une sous-variété plongée. Les hypothèses de connexité notamment sont plus fortes, et l'équivalence rationnelle est obtenue dans un sens plus faible (à homologie rationnelle près). En outre, nous nous restreignons au cas métastable, c'est-à-dire lorsque la dimension de la variété source est strictement inférieure aux $\frac{2}{3}$ de la variété but.

Plan : Le chapitre 1 rappelle quelques théorèmes fondamentaux d'homotopie entière consacrés au problème du plongement lisse à homotopie près. Le chapitre 2 présente la notion de cobordisme normal et les invariants qui lui sont associés. Le chapitre 3 résume les notions de base de la théorie de l'homotopie rationnelle que nous allons utiliser par la suite.

Nos résultats occupent les quatre chapitres suivants. Le chapitre 4 définit les nombres de Pontryagin généralisés associés à une variété orientée fermée munie d'un fibré vectoriel orienté. Plusieurs outils y sont développés pour calculer les congruences satisfaites par les nombres de Pontryagin généralisés. Le chapitre 5 introduit la notion de plongement de Poincaré rationnel qui servira à ramener la question initiale de l'existence d'un plongement lisse à un problème purement algébrique. Dans le chapitre 6, nous énonçons et démontrons deux théorèmes de réalisation géométrique aboutissant à la construction d'un plongement dans une classe d'équivalence rationnelle d'application donnée.

Enfin, le chapitre 7 est consacré à un autre résultat de réalisation géométrique de plongement utilisant des techniques de chirurgie plongée dans la variété but qui est fixée.

Chapitre 1

Plongement à homotopie près

1.1 Notations et rappels

1.1.1 Variétés

Nous reprenons les notations de G. E. Bredon [5, § II].

Toutes les variétés considérées sont munies d'une structure différentiable de classe C^∞ , voire d'une structure riemannienne.

Une *orientation* d'une variété M est une orientation de son fibré vectoriel tangent τ_M , d'espace total TM . Si λ^1 est le fibré normal sortant au bord de la variété, l'orientation du bord est donnée par la relation

$$(\tau_M)_{|\partial M} = \tau_{\partial M} \oplus \lambda. \quad (1.1)$$

Si $f: M \rightarrow V$ est une application lisse entre variétés, l'application induite entre les espaces tangents est notée $Tf: TM \rightarrow TV$ et pour tout $x \in M$, l'application linéaire entre les fibres est notée $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} V$.

Définition 1.1 Une *immersion* $f: M \looparrowright V$ est une application lisse telle que pour tout point $x \in M$ l'application $T_x M \hookrightarrow T_{f(x)} V$ est une injection linéaire.

Un *plongement* $f: M \hookrightarrow V$ est une immersion injective induisant un difféomorphisme de classe C^∞ de M sur son image. Dans ce cas, l'image $f(M)$ est une *sous-variété plongée* de V .

Le fibré normal $\nu(f)$ d'une immersion $f: M \looparrowright V$ est orienté par la relation

$$\tau_M \oplus \nu(f) = f^*(\tau_V). \quad (1.2)$$

1.1.2 Classes caractéristiques

Nous rappelons les résultats classiques sur les fibrés vectoriels (orientés) [27, §2 à 5].

L'espace classifiant $BSO(k)$, obtenu par colimite des grassmanniennes orientées $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$ (espace des k -plans orientés de $\mathbb{R}^{n+k}$), est muni d'un fibré vectoriel orienté canonique $\tilde{\gamma}^k$ appelé *fibré universel orienté de rang k* .

La colimite de ces espaces est l'espace classifiant

$$BSO = \operatorname{hoco} \lim_{\overrightarrow{k}} BSO(k). \quad (1.3)$$

Si ξ est un fibré vectoriel orienté de rang k sur un espace X paracompact connexe, alors il existe une application $c_\xi: X \rightarrow BSO(k)$, unique à homotopie près, telle que $\xi \cong c_\xi^*(\tilde{\gamma}^k)$. Cette application est appelée *application classifiante du fibré ξ* .

Nous notons $p_i(\xi) \in H^{4i}(X; \mathbb{Z})$, pour $i \geq 1$, les *classes de Pontryagin* du fibré ξ , et $e(\xi) \in H^k(X; \mathbb{Z})$ la *classe d'Euler* du fibré ξ , images par c_ξ^* des classes de Pontryagin universelles $p_i \in H^{4i}(BSO(k); \mathbb{Z})$ et de la classe d'Euler universelle $e_k \in H^k(BSO(k); \mathbb{Z})$. Leurs images en cohomologie rationnelle sont appelées classes de Pontryagin rationnelles et classe d'Euler rationnelle.

La classe d'Euler universelle rationnelle satisfait les relations

$$e_k^2 = p_{\frac{k}{2}} \quad \text{si } k \text{ est pair,} \quad (1.4)$$

$$e_k = 0 \quad \text{si } k \text{ est impair.} \quad (1.5)$$

En outre, les classes de Pontryagin sont nulles au delà d'un degré borné en fonction du rang k du fibré :

$$p_i(\xi^k) = 0 \quad \text{si } 2i > k. \quad (1.6)$$

Nous notons $P(\xi) = 1 + \sum_{i \geq 1} p_i(\xi) \in H^*(X; \mathbb{Q})$ la *classe totale de Pontryagin rationnelle* du fibré ξ . C'est un élément inversible pour le cup-produit dans la cohomologie de X .

1.1.3 Espaces de Thom

Si ξ est un fibré vectoriel euclidien sur un espace X , nous notons respectivement $S\xi$ et $D\xi$ les fibrés en sphères et en disques associés.

Le quotient $T\xi = D\xi/S\xi$ est l'*espace de Thom* du fibré ξ .

Théorème 1.2 (Isomorphisme de Thom) [27, §9] *Si X est un espace paracompact et si ξ est un fibré vectoriel orienté de rang k sur X , il existe une unique classe $\theta(\xi) \in H^k(D\xi, S\xi; \mathbb{Z})$ dont la restriction à une fibre donne la classe fondamentale de la paire (D^k, S^{k-1}) .*

Le cup-produit avec cette classe induit un isomorphisme

$$\Theta: H^{*-k}(X; \mathbb{Z}) \cong H^{*-k}(D\xi; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup \theta(\xi)} H^*(D\xi, S\xi; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^*(T\xi; \mathbb{Z}). \quad (1.7)$$

En outre, la classe $\theta(\xi)|_{D\xi} \in H^k(D\xi; \mathbb{Z}) \cong H^k(X; \mathbb{Z})$ est la classe d'Euler $e(\xi)$.

Corollaire 1.3 *Si $j: X \rightarrow T\xi$ est l'inclusion induite par la section nulle du fibré, alors la composée $j^*\Theta$ correspond au cup-produit avec la classe d'Euler $e(\xi) \in H^k(X; \mathbb{Z})$.*

En outre, la structure multiplicative sur $H^(T\xi; \mathbb{Z})$ est déterminée par l'équation*

$$\Theta(a) \cup \Theta(b) = \Theta(a \cup e(\xi) \cup b). \quad (1.8)$$

Soit $f: M \hookrightarrow V$ un plongement de fibré normal ν entre variétés fermées. Par le théorème du voisinage tubulaire [27, Theorem II.1], il existe un voisinage N de $f(M) \subset V$ difféomorphe au fibré en disques $D\nu$ par un difféomorphisme qui identifie $f(M)$ à la section nulle du fibré.

Définition 1.4 L'application

$$t: V \rightarrow V/\overline{V - N} \cong D\nu/S\nu = T\nu$$

est appelée *application de Thom-Pontryagin* associée à f .

1.1.4 Complexes et paires de Poincaré

Remarque : par convention, tous les espaces topologiques considérés dans la suite du texte ont le type d'homotopie de CW-complexes.

Soit (X, A) une paire d'espaces (avec A éventuellement vide). Soit $n \geq 0$ un entier et Λ un anneau égal à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.

Supposons que X et toutes les composantes connexes de A sont simplement connexes. Supposons également que $H_*(X; \Lambda)$ et $H_*(A; \Lambda)$ sont de type fini.

Définition 1.5 L'espace X est appelé Λ -complexe de Poincaré de dimension n s'il existe une classe $x \in H_n(X; \Lambda)$ appelée *classe d'orientation* de X induisant un isomorphisme pour tout i

$$\cap x: H^i(X; \Lambda) \rightarrow H_{n-i}(X; \Lambda).$$

La paire (X, A) est une Λ -paire de Poincaré de dimension n s'il existe une classe $\hat{a} \in H_n(X, A; \Lambda)$ appelée *classe d'orientation* de (X, A) telle que

1. le cap-produit avec $\hat{a}$ induit un isomorphisme

$$\cap \hat{a}: H^i(X; \Lambda) \rightarrow H_{n-i}(X, A; \Lambda); \quad (1.9)$$

2. A est une union disjointe de Λ -complexes de Poincaré de dimension $(n - 1)$;
3. en notant $\partial: H_n(X, A; \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(A; \Lambda)$ le connectant dans la suite exacte longue de la paire (X, A) en homologie, l'image $\partial \hat{a}$ de la classe $\hat{a}$ est une classe d'orientation pour A .

Soit $f: A' \rightarrow X'$ une application continue. Notons $I_f = A' \times [0, 1] \cup_{f \times 1} X \times \{1\}$ le cylindre de l'application f . Si A' et X' sont simplement connexes, nous disons que $f: A' \rightarrow X'$ détermine une Λ -paire de Poincaré si l'inclusion dans le cylindre $A' \hookrightarrow I_f$ constitue une Λ -paire de Poincaré au sens défini ci-dessus.

Une *paire de Poincaré* et une *paire de Poincaré rationnelle* désignent respectivement une $\mathbb{Z}$ -paire de Poincaré et une $\mathbb{Q}$ -paire de Poincaré.

1.1.5 Application de transfert

Définition 1.6 Soit (X_1, A_1) et (X_2, A_2) deux Λ -paires de Poincaré simplement connexes orientées de dimensions respectives n_1 et $n_2 = n_1 + k$. Notons $D_i: H_*(X_i, A_i; \Lambda) \xrightarrow{\cong} H^{n_i-*}(X_i; \Lambda)$, $i \in \{1, 2\}$, les isomorphismes inverse de la dualité de Poincaré (1.9).

Soit $f: (X_1, A_1) \rightarrow (X_2, A_2)$ une application de paire.

Nous appelons *application de transfert* (ou *shriek map*) en cohomologie la composition :

$$f^! = D_2 f_* D_1^{-1}: H^{*-k}(X_1, A_1; \Lambda) \rightarrow H^*(X_2, A_2; \Lambda) \quad (1.10)$$

Cette application est un morphisme de $H^*(X_2, A_2; \Lambda)$ -modules, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in H^*(X_2, A_2; \Lambda)$ et pour tout $\beta \in H^*(X_1, A_1; \Lambda)$,

$$\alpha \cup f^!(\beta) = f^!(f^*(\alpha) \cup \beta). \quad (1.11)$$

En particulier, l'application $f^! f^*: H^{*-k}(X_2; \Lambda) \rightarrow H^*(X_2, A_2; \Lambda)$ correspond au cup-produit avec la classe $f^!(1) \in H^k(X_2, A_2; \Lambda)$.

Exemple 1.7 [5, VI 11.3] Si ξ est un fibré vectoriel orienté sur une variété fermée orientée M et $i: M \hookrightarrow D\xi$ est la section nulle, alors l'isomorphisme de Thom Θ s'identifie à l'application de transfert

$$i^!: H^{*-k}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(D\xi, S\xi; \mathbb{Z}).$$

1.2 Quelques théorèmes d'existence de plongements

1.2.1 Plongement en grande codimension

La première obstruction à l'existence d'un plongement entre deux variétés est la dimension : si M et V sont deux variétés, alors il n'y a pas de plongement de M dans V lorsque $\dim M > \dim V$. Nous noterons donc systématiquement $\dim M = m$ et $\dim V = m + k$.

En cas d'égalité des dimensions, si M est fermée et V est connexe, l'existence d'un plongement est équivalente à celle d'un difféomorphisme $M \cong V$. Au contraire, si la dimension de V est suffisamment grande par rapport à celle de M , plus précisément si $\dim(V) > 2 \dim(M)$ (cas *stable*), le théorème de mise en position générale assure qu'il existe au moins un plongement dans la classe d'homotopie de toute application $f: M \rightarrow V$.

Lorsque V est un espace vectoriel euclidien, ce résultat s'améliore encore grâce au théorème suivant :

Théorème 1.8 (plongement de Whitney, 1944) [43] *Toute variété lisse de dimension m se plonge dans $\mathbb{R}^{2m}$.*

Si la dimension m est une puissance de 2, le résultat est optimal car pour tout $i \geq 0$ l'espace projectif réel $\mathbb{R}P(2^i)$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^{2^{i+1}-1}$ [33]. Plus généralement, en notant $\alpha(m)$ le nombre de 1 dans l'écriture de m en base 2, les produits des espaces projectifs réels permettent d'exhiber pour tout $m \geq 1$ une variété de dimension m qui ne se plonge pas dans un espace euclidien en codimension $m - \alpha(m)$ [30, § VI, Theorem 4.5]. Nous ne connaissons pas à ce jour de variété de dimension m nécessitant une codimension plus importante

pour le plongement dans un espace vectoriel euclidien. La conjecture selon laquelle il n'existe pas de telles variétés améliorerait sensiblement le résultat de H. Whitney.

En règle générale, l'existence d'un plongement dans une classe d'homotopie donnée est un problème difficile en dessous du rang stable, c'est-à-dire lorsque la codimension est inférieure à la dimension de la variété source. Cependant certaines hypothèses faisant intervenir la connexité et la codimension de l'application se révèlent suffisantes, comme dans le théorème suivant.

Théorème 1.9 (A. Haefliger, 1966) [15] *Soit M une variété fermée connexe de dimension m et V une variété de dimension $(m+k)$ telle que $k > \frac{m}{2} + 1$ (hypothèse métastable). Soit $f: M \rightarrow V$ une application continue.*

Si l'application f est $(m-k+1)$ -connexe, i.e. si l'application induite en homotopie $\pi_i(M) \rightarrow \pi_i(V)$ est un isomorphisme pour $i \leq m-k$ et un homomorphisme surjectif pour $i = m-k+1$, alors f est homotope à un plongement.

Ce résultat généralise le théorème de Whitney lorsque $k = m$ sous la forme suivante :

Corollaire 1.10 *Soit M une variété fermée connexe et V une variété simplement connexe. Si $\dim V \geq 2 \dim M \geq 6$ alors toute application $f: M \rightarrow V$ est homotope à un plongement.*

L'hypothèse de connexité sur M est importante ici, car la composition

$$S^m \sqcup S^m \rightarrow S^m \vee S^m \rightarrow S^m \times S^m$$

n'est pas homotope à un plongement.

1.2.2 Plongement de Poincaré

Nous rappelons maintenant la notion fondamentale de plongement de Poincaré dont une version rationnelle sera un des thèmes centraux de cette thèse.

Cette notion homotopique est directement motivée par l'étude des plongements entre variétés. Si $f: M \hookrightarrow V$ est un plongement entre variétés lisses fermées orientées en codimension k , il existe un voisinage tubulaire compact N de $f(M)$ dans V . Notons $C = V - \overset{\circ}{N}$ l'adhérence du complémentaire, qui

1.2. QUELQUES THÉORÈMES D'EXISTENCE DE PLONGEMENTS 7

est une variété compacte de bord ∂N (à orientation près), s'inscrivant dans une somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} \partial N & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ N & \longrightarrow & V. \end{array} \quad (1.12)$$

Comme le voisinage tubulaire N est difféomorphe au fibré en disques $D\nu$ associé au fibré normal du plongement ν sur M , le diagramme (1.12) se déforme en une somme amalgamée homotopique

$$\begin{array}{ccc} S\nu & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \text{h} \lrcorner & \downarrow \\ M & \longrightarrow & V. \end{array} \quad (1.13)$$

Rappelons que les variétés M et V étant fermées et orientées, elles satisfont la dualité de Poincaré, de même que les paires $(C, S\nu)$ et $(D\nu, S\nu)$. Enfin, il existe des relations évidentes entre les classes d'orientation de ces différents complexes et paires de Poincaré.

Ces remarques amènent naturellement la définition suivante :

Définition 1.11 Soient X et Y deux complexes de Poincaré simplement connexes orientés de dimensions respectives m et $m+k$. Soit $A \rightarrow X$ une fibration sphérique de fibre S^{k-1} . Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue.

Nous dirons que f s'inscrit dans un plongement de Poincaré de frontière A si et seulement s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow i & \text{h} \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tel que

- ce diagramme est une somme amalgamée homotopique, c'est-à-dire que l'application induite $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \cup C \times \{1\} \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie ;
- la classe d'orientation $y \in H_{m+k}(Y)$ induit des classes non nulles dans $H_n(Y, X) \cong H_{m+k}(C, A)$ et dans $H_{m+k}(Y, C) \cong H_{m+k}(X, A)$;
- les paires (C, A) et (X, A) sont des paires de Poincaré pour les classes d'orientation induite par y .

L'espace C est appelé le *complémentaire*.

Cette notion, purement homotopique, de plongement de Poincaré est centrale dans l'étude des plongements entre variétés lisses. En effet, les méthodes de chirurgie permettent de démontrer qu'en codimension $k \geq 3$, l'existence d'un plongement lisse dans une classe d'homotopie donnée se ramène à l'inscription dans un plongement de Poincaré dont la frontière est un fibré en sphères associé à un fibré vectoriel de rang k . Plus précisément, nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 1.12 (Browder-Casson-Sullivan-Wall) [42, 11.3.1] *Soit M et V deux variétés de dimension respectives m et $m + k$, avec $k \geq 3$. Soit $f: M \rightarrow V$ une application continue. Supposons que f s'inscrive dans un plongement de Poincaré.*

L'application f est homotope à un plongement lisse si et seulement si l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

1. *le rang est métastable (i.e. $k > \frac{m}{2} + 1$) ;*
2. *la fibration sphérique $A \rightarrow X$ est homotopiquement équivalente, en tant que fibration, à un fibré en sphères orthogonal.*

Ce théorème ramène donc la question de l'existence d'un plongement lisse à une question purement homotopique. Cependant ce théorème est difficilement applicable en toute généralité. En effet, la construction d'un complémentaire est un problème qui à l'heure actuelle ne peut se ramener à une question algébrique simple.

Un des résultats de cette thèse est une version rationnelle de ce théorème qui offre dans plusieurs cas classiques un traitement algébrique praticable du problème.

1.3 Quelques conditions nécessaires

Soit $f: M \rightarrow V$ une application continue entre variétés orientées fermées de dimensions respectives m et $(m + k)$.

1.3.1 Obstruction rationnelle à l'immersion

La relation 1.2 donne par multiplicativité des classes totales de Pontryagin rationnelles par rapport à la somme de Whitney [27, Theorem 15.3] :

Proposition 1.13 *Posons $P(f) = P(\tau_M)^{-1} \cdot f^*P(\tau_V) \in H^*(M; \mathbb{Q})$. Si $\tilde{f}: M \hookrightarrow V$ est une immersion homotope à f , alors $P(f)$ est la classe totale de Pontryagin du fibré normal de $\tilde{f}$.*

Or les classes de Pontryagin d'un fibré vectoriel orienté de rang k sont nulles en degré $> 2k$ (équation 1.6). Cette proposition nous assure que f ne peut être homotope à une immersion, et *a fortiori* à un plongement, lorsque la classe $P(f)$ a des composantes non nulles en degré $> 2k$.

Exemple 1.14 Notons $p: \mathbb{C}P(3) \rightarrow \mathbb{H}P(1) \cong S^4$ la projection de la fibration canonique, et $i: S^4 \rightarrow S^4 \times S^3$ l'injection canonique.

Si $a \in H^2(\mathbb{C}P(3); \mathbb{Q})$ est le générateur canonique, alors $P(\tau_{\mathbb{C}P(3)}) = 1 + 4a^2$ et $P(\tau_{S^4 \times S^3}) = 1$ donc $P(i \circ p) = 1 - 4a^2$. Puisque $\dim \mathbb{C}P(3) = 6$ et $\dim S^4 \times S^3 = 7$, le fibré normal d'une immersion ne peut avoir de classe de Pontryagin non triviale, donc $i \circ p$ n'est pas homotope à une immersion ni à un plongement.

Remarque : cette obstruction disparaît dans le cas métastable, dans la mesure où la classe $P(f) \in H^*(M; \mathbb{Q})$ ne peut avoir de composante non nulle au delà du degré $m < 2k$.

1.3.2 Multiplicativité de l'application de transfert

Proposition 1.15 Si f est homotope à un plongement $\tilde{f}$ de fibré normal ν , alors l'application de transfert est reliée à l'application de Thom-Pontryagin $t: V \rightarrow T\nu$ par l'équation suivante :

$$f^! = t^* \circ \Theta: H^{*-k}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(V; \mathbb{Z}). \quad (1.14)$$

Démonstration: Notons C la fermeture du complémentaire d'un voisinage tubulaire $D\tilde{\nu}$ de $\tilde{f}(M) \subset V$, considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{t} & T\tilde{\nu} \\ & \nearrow f & \uparrow \tilde{f} & \nearrow j & \\ M & \xrightarrow{i} & D\tilde{\nu} & & \end{array}$$

La classe d'orientation de V peut s'écrire sous la forme $(\bar{f}_\# a + g_\# b)$, où a et b sont des cycles respectifs de $C_*(D\tilde{\nu})$ et $C_*(C)$, tels que a induise une classe d'orientation de la paire $(D\tilde{\nu}, S\tilde{\nu})$. Il vient alors pour tout cycle $\alpha \in C^*(T\tilde{\nu}, *)$:

$$\begin{aligned} (t^\# \alpha) \cap (\bar{f}_\# a + g_\# b) &= \bar{f}_\# (\bar{f}^\# t^\# \alpha \cap a) + g_\# (\bar{g}^\# t^\# \alpha \cap b) \\ &= \bar{f}_\# (\alpha|_{D\tilde{\nu}} \cap a) \end{aligned}$$

soit, en cohomologie, $t^*[\alpha] \cap [V] = \bar{f}_* (\alpha \cap [D\tilde{\nu}])$. Finalement, $t^* = \bar{f}^!$ donc $t^* \Theta = \bar{f}^! i^! = f^!$. $\square$

Corollaire 1.16 *Si f est homotope à un plongement de fibré normal $\tilde{\nu}$, alors la composée $f^*f^! : H^{*-k}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Z})$ correspond au cup-produit avec la classe $f^*f^!(1) = e(\tilde{\nu})$.*

Démonstration: D'après la proposition 1.15, $f^*f^! = f^*t^*\Theta = j^*\Theta$ donc la proposition 1.3 assure que $f^*f^!$ correspond au cup-produit avec la classe $e(\tilde{\nu})$. En particulier, $f^*f^!(1) = e(\tilde{\nu})$. $\square$

Application 1.17 Soit $f : N^n \times S^k \rightarrow S^{n+k} \times S^k$ une application continue entre variétés lisses connexes orientées, satisfaisant $f_*[N \times S^k] = [S^{n+k}]$ et $f_*[S^k] = [S^k]$ en homologie. Une telle application s'obtient facilement par pincement, projection du produit sur un des facteurs, puis plongement du bouquet dans le produit. Si σ_k désigne la classe fondamentale de la variété S^k , il vient alors $f^*f^!(1) = \sigma_k$.

Si la variété N n'est pas une sphère d'homologie rationnelle, sa classe fondamentale est un produit $\alpha_p \cup \beta_{n-p}$ avec $0 < p < n$. Par conséquent, $f^!(\alpha)$ est un élément de $H^{k+n-p}(S^{n+k} \times S^k) = 0$ donc $f^*f^!(\alpha) = 0$ mais $\alpha \cup \sigma_k \neq 0 \in H^*(N \times S^k; \mathbb{Q})$.

Finalement f n'est pas homotope à un plongement.

1.3.3 Classe d'Euler du plongement

De même que les classes de Pontryagin rationnelles, la classe d'Euler (entière) d'un plongement entre variétés fermées orientées ne dépend que de sa classe d'homotopie. Le corollaire 1.16 montre en effet :

Proposition 1.18 *Posons $e(f) = f^*f^!(1) \in H^k(M; \mathbb{Z})$.*

Si f est homotope à un plongement de fibré normal $\tilde{\nu}$ alors $e(f) = e(\tilde{\nu})$.

En définitive, toutes les classes caractéristiques rationnelles du fibré normal d'un plongement ne dépendent que de sa classe d'homologie, bien que deux plongements homotopes puissent induire des fibrés normaux non-isomorphes [14].

Définition 1.19 Les classes $P(f) = P(\tau_M)^{-1} \cdot f^*P(\tau_V) \in H^*(M; \mathbb{Q})$ et $e(f) = f^*f^!(1) \in H^k(M; \mathbb{Z})$ seront appelées *classes caractéristiques du fibré normal putatif* même en l'absence d'un plongement homotope.

Exemple 1.20 Soit $f : S^n \times S^k \rightarrow S^{n+k} \times S^k$ une application telle que $f_*[S^n \times S^k] = [S^{n+k}]$ et $f_*[S^k] = [S^k]$ (voir énoncé 1.17).

Si k est impair, la classe d'Euler rationnelle d'un fibré de rang k doit être nulle, or $e(f)$ est la classe fondamentale de la variété N donc f n'est pas homotope à un plongement.

Exemple 1.21 Si $f: \mathbb{C}P(2) \rightarrow S^6$ est l'application triviale, alors $P(f) = 1 - 3a^2$ et $e(f) = 0$ donc $e(f)^2 \neq -3a^2$, donc les classes caractéristiques rationnelles du fibré normal putatif ne peuvent être celles d'un vrai fibré vectoriel de rang 2.

Par conséquent, l'espace projectif $\mathbb{C}P(2)$ ne se plonge pas dans S^6 .

1.3.4 Plongement dans une variété elliptique

Des obstructions plus fines à l'existence de plongements peuvent être construites à l'aide de la théorie de l'homotopie rationnelle (voir chapitre 3). Nous citons notamment le résultat remarquable suivant dû à S. Papadima. Rappelons qu'une variété simplement connexe V est dite *elliptique* si l'espace vectoriel gradué $\pi_*(\Omega V) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Notons $\mathbb{P} \subset H^*(M; \mathbb{Q})$ la sous-algèbre engendrée par les composantes homogènes de $P(f)$, et $\mathbb{P}^+$ son idéal d'augmentation.

Le morphisme de Hurewicz $\text{hur}: \pi_*(V) \rightarrow H_*(V; \mathbb{Z})$ induit par dualité une application linéaire $\text{hur}^*: H^*(V; \mathbb{Q}) \rightarrow \text{hom}(\pi_*(V), \mathbb{Q})$.

Théorème 1.22 (S. Papadima) [31] *Supposons que la variété V est simplement connexe et elliptique.*

Si l'algèbre $\mathbb{P}$ a au moins deux images linéairement indépendantes dans $\text{hom}(\pi_(V), \mathbb{Q})$ par l'application de transfert, i.e. si $\dim_{\mathbb{Q}} \text{hur}^* f^!(\mathbb{P}) \geq 2$, alors f n'est pas homotope à un plongement, à quelques exceptions près qui ne peuvent se produire que si simultanément la codimension est paire, $\dim(\text{hur}^* f^!(\mathbb{P}^+)) = 1$ et $\text{hur}^* f^!(\mathbb{P}^+ \cdot \mathbb{P}^+) = 0$.*

Nous démontrerons plus loin une obstruction au plongement s'exprimant en des termes similaires, avec des hypothèses quelque peu différentes.

Chapitre 2

Quelques invariants de cobordisme

2.1 Cobordisme normal

Nous nous référons à l'exposé de R. E. Stong [36].

2.1.1 Fibrés vectoriels stables

Définition 2.1 Nous appelons *fibré vectoriel stable* (orienté) ξ sur un espace topologique X la donnée pour un certain entier n_0 :

- d'une suite d'espaces munis de fibrés vectoriels (orientés) $(X_n, \xi^n)_{n \geq n_0}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, ξ^n est de rang n ;
- d'une suite d'applications $j_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ appelées *stabilisations* telles que pour tout $n \geq n_0$, j_n est n -connexe ;
- d'une suite d'isomorphismes de fibrés $\xi^n \oplus \varepsilon^1 \cong j_n^*(\xi^{n+1})$ sur X_n ;
- d'une équivalence d'homotopie $X \simeq \operatorname{hocolim}_{\overrightarrow{n}} X_n$.

Si X et Y sont deux espaces munis de fibrés vectoriels stables ξ et η , nous appelons *morphisme de fibrés stables* toute suite d'applications fibrées $f_n: (X_n, \xi^n) \rightarrow (Y_n, \eta^n)$, pour $n \geq n_1$, qui commutent avec les stabilisations et préservent les isomorphismes de fibrés.

Une application $X \rightarrow Y$ est dite fibrée si elle s'obtient comme la colimite d'un morphisme de fibrés stables.

Remarque : un morphisme de fibrés stables induit une application entre les colimites.

Définition 2.2 Deux fibrés vectoriels stables sur X sont dits *isomorphes* s'il existe un morphisme de fibrés stables entre eux induisant l'identité sur les colimites.

Exemples 2.3

1. L'espace $BSO = \bigcup_n BSO(n)$ est muni du fibré vectoriel stable orienté canonique $\tilde{\gamma}$ induit par les fibrés vectoriels $\tilde{\gamma}^n$ sur les grassmanniennes orientées $BSO(n)$.
2. à tout fibré vectoriel ξ de rang k sur un espace X est associé la filtration triviale $\forall n \geq k, X_n = X$, munie des fibrés vectoriels $\xi^n = \xi \oplus \varepsilon^{n-k}$.
3. Soit M une variété (orientée) de dimension m . Notons $n = 2m + 1$. Le fibré normal ν_M^n d'un plongement $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ est bien défini à isomorphisme près. Le fibré vectoriel stable ν_M induit est appelé *fibré normal stable* de M .
4. Soit Y un espace muni d'un fibré vectoriel stable et $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Les produits fibrés homotopiques

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ \downarrow & \lrcorner_h & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et les fibrés induits $f_n^* \xi^n$ définissent un fibré vectoriel stable sur X . Pour cette structure de fibré vectoriel stable sur X , l'application f est fibrée.

2.1.2 Structure normale stable sur une variété

Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques munie d'un fibré vectoriel stable orienté ξ sur X . L'espace A est muni du fibré vectoriel stable $\xi|_A$ induit par l'inclusion dans X .

Nous ne traiterons ici que du cobordisme orienté : toutes les variétés considérées sont orientées et le signe - précédant une variété signifie que son orientation a été inversée.

Définition 2.4 Soit M une variété compacte de fibré normal stable ν_M .

Nous appelons *X-structure normale* sur M la donnée d'une application $g: M \rightarrow X$ s'étendant en une application fibrée $f: (M, \nu_M) \rightarrow (X, \xi)$.

Nous appelons *(X, A)-structure normale* sur M la donnée d'une application de paire $g: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ s'étendant en une application fibrée $f: (M, \nu_M) \rightarrow (X, \xi)$.

Proposition 2.5 *Une (X, A) -structure normale sur M définit une A -structure normale sur ∂M .*

Rappelons qu'un *cobordisme* entre deux variétés fermées M_0 et M_1 est une variété W compacte dont le bord s'identifie à $-M_0 \sqcup M_1$. Un cobordisme entre deux variétés compactes à bord M_0 et M_1 est la donnée d'un cobordisme V entre les bords ∂M_0 et ∂M_1 et d'une variété W de bord $-M_0 \cup_{\partial M_0} -V \cup_{\partial M_1} M_1$.

Définition 2.6 Deux variétés fermées orientées M_1 et M_2 munies de X -structures normales sont dites *normalement cobordantes* s'il existe un cobordisme W les reliant et muni d'une X -structure qui étende celle de son bord.

Deux variétés compactes orientées M_1 et M_2 munies de (X, A) -structures normales sont dites *normalement cobordantes* s'il existe un cobordisme N reliant ∂M_1 et ∂M_2 muni d'une A -structure qui étende celle de son bord et une variété W de bord $-M_1 \cup_{\partial M_1} -N \cup_{\partial M_2} M_2$ munie d'une X -structure qui étende celle de son bord.

Proposition 2.7 *La relation de cobordisme normal constitue une relation d'équivalence sur les classes d'isomorphismes de X -structures (resp. de (X, A) -structures).*

En outre, la somme disjointe définit une structure de groupe sur l'ensemble des classes de cobordisme normal.

Définition 2.8 Nous notons Ω_m^X (resp. $\Omega_m^{X,A}$) le groupe des classes de cobordisme normal de variétés fermées (resp. compactes) orientées munies d'une X -structure (resp. d'une (X, A) -structure) et de dimension m .

2.1.3 Structure des groupes de cobordisme

L'essentiel des résultats présentés dans cette section proviennent des notes de [36, § II].

Théorème 2.9 *Soit (X, A) est une paire d'espaces munie d'un fibré vectoriel stable ν sur X . L'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un fibré vectoriel stable sur A et il existe une suite exacte longue naturelle*

$$\dots \rightarrow \Omega_m^A \xrightarrow{i_*} \Omega_m^X \xrightarrow{o} \Omega_m^{X,A} \xrightarrow{\partial} \Omega_{m-1}^A \rightarrow \dots \quad (2.1)$$

dans laquelle :

- l'application i_* envoie la classe d'une variété fibrée $M \xrightarrow{f} A$ sur la composée $M \xrightarrow{iof} X$;
- le morphisme d'oubli o insère toute variété fibrée $M \rightarrow X$ dans sa classe plus large de cobordisme relatif ;
- le connectant ∂ associe à une variété fibrée à bord $(M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ la restriction fibrée $\partial M \rightarrow A$.

La propriété fondamentale de ces groupes de cobordisme normal est qu'ils s'obtiennent comme les groupes d'homotopie stable des spectres de Thom associés aux fibrés vectoriels stables considérés.

Théorème 2.10 *L'application de Thom-Pontryagin induit un isomorphisme*

$$\Omega_m^X \xrightarrow{\cong} \pi_m(T\xi) := \varinjlim_n \pi_{m+n}(T\xi^n) \quad (2.2)$$

et dans le cas relatif

$$\Omega_m^{X,A} \xrightarrow{\cong} \pi_m(T\xi, T\xi|_A) := \varinjlim_n \pi_{m+n}(T\xi^n, T\xi^n|_A). \quad (2.3)$$

L'homomorphisme de Hurewicz induit par stabilisation les morphismes de groupes

$$\pi(T\xi) \rightarrow H_*(T\xi; \mathbb{Z}) := \varinjlim_n H_{m+n}(T\xi^n; \mathbb{Z})$$

et

$$\pi(T\xi, T\xi|_A) \rightarrow H_*(T\xi, T\xi|_A; \mathbb{Z}) := \varinjlim_n H_{m+n}(T\xi^n, T\xi^n|_A; \mathbb{Z}).$$

Théorème 2.11 *La composition de l'application de Thom-Pontryagin, de l'homomorphisme de Hurewicz stabilisé et de l'isomorphisme de Thom stabilisé est l'évaluation*

$$\begin{aligned} ev: \quad \Omega_m^{X,A} &\longrightarrow H_m(X, A; \mathbb{Z}) \\ [f: M \rightarrow X] &\longmapsto f_*([M]) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Définition 2.12 Pour toute classe $x \in H_m(X, A; \mathbb{Z})$ nous notons Ω_m^X le sous-ensemble de Ω_m^X constitué des classes de cobordisme $[g: M \rightarrow X]$ satisfaisant $g_*([M]) = x$. Autrement dit,

$$\Omega_m^X(x) := ev^{-1}(\{x\}) \subset \Omega_m^X.$$

Après tensorisation par $\mathbb{Q}$, la stabilisation de l'homomorphisme de Hurewicz est aussi un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels. Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 2.13 *La tensorisation par $\mathbb{Q}$ du morphisme d'évaluation est un isomorphisme*

$$ev \otimes \mathbb{Q}: \Omega_m^X \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H_m(X; \mathbb{Q}). \quad (2.5)$$

2.2 Nombres de Pontryagin

Nous rappelons quelques notations usuelles [27]. Soit X un complexe de Poincaré rationnel orienté de dimension $4r$ muni d'une famille de classes de cohomologie $p_i \in H^{4i}(X; \mathbb{Q})$ avec $1 \leq i \leq r$. Pour tout r -uplet de nombres entiers positifs $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$, nous notons

$$p_{(\omega)} = \prod_{i=1}^r p_i^{\omega_i}.$$

C'est une classe de cohomologie de degré $4|\omega|$ où

$$|\omega| = \sum_{i=1}^r i \cdot \omega_i.$$

2.2.1 Nombres de Pontryagin normaux

Définition 2.14 Soit M une variété lisse orientée fermée de dimension $4r$ et de fibré normal stable ν_M . Les *nombres de Pontryagin normaux* de M sont les nombres entiers obtenus par les évaluations

$$\langle p_{(\omega)}(\nu_M), [M] \rangle = \langle p_1^{\omega_1}(\nu_M) \cdots p_r^{\omega_r}(\nu_M), [M] \rangle \quad \text{avec} \quad |\omega| = \sum_{i=1}^r i \cdot \omega_i = r.$$

Proposition 2.15 *Deux variétés cobordantes ont les mêmes nombres de Pontryagin normaux.*

Si le fibré normal stable ν_M est classifié par une application $c: M \rightarrow BSO$, alors les nombres de Pontryagin de M représentent les coordonnées du point $c_([M])$ dans le groupe d'homologie $H_{4r}(BSO; \mathbb{Q})$, muni de la base duale de $(p_{(\omega)})$.*

Lorsque M parcourt l'ensemble des classes d'isomorphismes de variétés fermées orientées de dimension $m = 4r$, l'ensemble des images $c_*([M]) \in H_m(BSO; \mathbb{Q})$ est l'image du morphisme d'évaluation rationnel

$$ev_{\mathbb{Q}}: \Omega_m^{BSO} \rightarrow H_m(BSO; \mathbb{Q}).$$

C'est un sous-réseau d'indice fini du réseau entier

$$H_m(BSO; \mathbb{Z})/\text{torsion} \hookrightarrow H_m(BSO; \mathbb{Q}).$$

Démonstration: Voir par exemple [27, §16] □

Définition 2.16 Le réseau image de l'évaluation rationnelle est appelé réseau des nombres de Pontryagin normaux réalisables et il sera noté $\mathcal{L}_m$.

2.2.2 Réseau et congruences de Stong

Le réseau $\mathcal{L}_m$ est complètement déterminé par les congruences issues du théorème de Riemann-Roch d'après les calculs de R. E. Stong [37].

Ces congruences font intervenir le $\hat{A}$ -genre, qui est une forme linéaire rationnelle sur l'anneau de cobordisme Ω_*^{BSO} , définie par une série formelle de $\mathbb{Q}[[x_j]]$

$$\hat{A} = \prod_j \frac{x_j/2}{\text{sh}(x_j/2)} \in \mathbb{Q}[[x_j]]$$

à l'aide de l'identification

$$P = 1 + \sum_i p_i = \prod_j (1 + x_j^2)^{-1}.$$

Le calcul des termes de $\hat{A}$ en bas degré permet d'écrire

$$\hat{A} = 1 - \frac{p_1}{24} + \frac{3p_1^2 + 4p_2}{45 \times 2^7} + \frac{3p_1^3 + 12p_1p_2 + 16p_3}{945 \times 2^{10}} + \dots$$

En degré $m = 4$, le réseau est complètement déterminé par la seule relation

$$p_1 \in 3\mathbb{Z} \tag{2.6}$$

et il est engendré par la classe de $\mathbb{C}P(2)$.

En degré $m = 8$, le réseau est déterminé comme sous-réseau du réseau entier par la seule relation

$$3p_1^2 + 4p_2 \in 45\mathbb{Z} \tag{2.7}$$

et il est là encore engendré par $\mathbb{C}P(2) \times \mathbb{C}P(2)$ et $\mathbb{C}P(4)$.

En degré $m = 12$, le $\hat{A}$ -genre impose la relation

$$3p_1^3 + 12p_1p_2 + 16p_3 \in 945\mathbb{Z}.$$

2.3 Formule de la signature de Hirzebruch

2.3.1 Groupe de Witt

Définition 2.17 Soit g une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel V de dimension finie.

La forme bilinéaire g est dite *hyperbolique* s'il existe un sous-espace de V qui soit son propre orthogonal.

Deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées g et g' sur des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels de dimension finie sont dites équivalentes s'il existe deux formes hyperboliques e et e' telles que les sommes orthogonales $g \oplus e$ et $g' \oplus e'$ soient isomorphes.

Proposition 2.18 *L'ensemble $W(\mathbb{Q})$ des classes d'équivalence de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels de dimension finie est un groupe pour la somme orthogonale.*

Ce groupe est appelé *groupe de Witt* de l'anneau $\mathbb{Q}$.

Proposition 2.19 [22, XV § 11] *L'homomorphisme de la signature*

$$W(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est scindé de manière canonique par le relèvement de $1 \in \mathbb{Z}$ sur le produit scalaire usuel sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 2.20 [22, Corollaries 10.6, 10.7] *Soit g est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{Q}^r$.*

Si g est dans la classe de Witt de $s \in \mathbb{Z} \hookrightarrow W(\mathbb{Q})$ alors r et s ont même parité et il existe une base de $\mathbb{Q}^r$ dans laquelle la matrice de g s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_{\frac{r+s}{2}} & 0 \\ 0 & -I_{\frac{r-s}{2}} \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Forme d'intersection

Si (X, A) est une paire de Poincaré (rationnelle) orientée de dimension $4r$, alors le cup-produit définit une forme bilinéaire symétrique sur $H^{2r}(X; \mathbb{Q})$. Elle induit par dualité de Poincaré une forme bilinéaire symétrique sur $H_{2r}(X; \mathbb{Q})$, appelée *forme d'intersection*, de noyau $i_*(H_{2r}(A; \mathbb{Q}))$.

La forme bilinéaire induite sur $H_{2r}(X; \mathbb{Q})/i_*H_{2r}(A; \mathbb{Q})$ est non-dégénérée et nous notons $\tau(X, A, x)$ sa classe dans le groupe de Witt $W(\mathbb{Q})$.

Définition 2.21 Deux paires de Poincaré rationnelles orientées (X, A) et (Y, A) sont dites *compatibles* si et seulement si leurs classes d'orientation $x \in H_n(X, A; \mathbb{Q})$ et $y \in H_n(Y, A; \mathbb{Q})$ induisent des classes d'orientation opposées sur A .

Dans ce cas, le recollement $X \cup_A Y$ est un complexe de Poincaré rationnel et possède une unique classe d'orientation notée $x + y \in H_n(Z; \mathbb{Q})$ induisant respectivement les classes x et y dans $H_n(Z, Y; \mathbb{Q}) \cong H_n(X, A; \mathbb{Q})$ et $H_n(Z, X; \mathbb{Q}) \cong H_n(Y, A; \mathbb{Q})$.

Proposition 2.22 [3, Lemme 2.1.5] *Si (X, A) et (Y, A) sont deux paires de Poincaré rationnelles compatibles de dimension $4r$ et de classes d'orientation respectives x et y , alors leur recollement $X \cup_A Y$ satisfait l'équation*

$$\tau(X \cup_A Y, \emptyset, x + y) = \tau(X, A, x) + \tau(Y, A, y). \quad (2.8)$$

2.3.3 Polynôme de Hirzebruch

Théorème 2.23 [27, §19] *Soit $r \geq 1$. Il existe un unique polynôme noté $L_r^\nu(p_1, \dots, p_r)$ à coefficients rationnels appelé polynôme de Hirzebruch normal tel que pour toute variété M de dimension $4r$ et de fibré normal stable ν_M , la signature s de la forme d'intersection sur M satisfait la relation*

$$s = \langle L_r^\nu(p_1(\nu_M), \dots, p_r(\nu_M)), [M] \rangle \quad (2.9)$$

Ce polynôme est déterminé par les nombres de Pontryagin des espaces projectifs complexes.

Exemple 2.24 Pour $r = 1$, le polynôme L_1 est complètement déterminé par la variété $\mathbb{C}P(2)$ de signature 1 et de classe totale de Pontryagin normale $P(\nu_{\mathbb{C}P(2)}) = 1 - 3a^2$ où a^2 est la classe fondamentale de la variété, donc

$$L_1^\nu = \frac{-1}{3}p_1.$$

Pour $r = 2$, le calcul s'appuie sur les données suivantes :

$$\text{sign}(\mathbb{C}P(2) \times \mathbb{C}(P)^2) = 1, \quad P(\nu_{\mathbb{C}P(2)^2}) = 1 - 3(a_1^2 + a_2^2) + 9a_1^2a_2^2,$$

$$\text{sign}(\mathbb{C}P(4)) = 1, \quad P(\nu_{\mathbb{C}P(4)}) = 1 - 5a^2 + 15a^4.$$

Le deuxième polynôme de Hirzebruch normal s'écrit alors :

$$L_2^\nu = \frac{6p_1^2 - 7p_2}{45}.$$

Le même procédé permet de calculer :

$$L_3^\nu = \frac{-51p_1^3 + 111p_1p_2 - 62p_3}{945}.$$

Chapitre 3

Homotopie rationnelle

Nous rappelons ici les notions fondamentales de la théorie de l'homotopie rationnelle dans le cas des espaces simplement connexes.

3.1 Rationalisation

3.1.1 Espace $\mathbb{Q}$ -locaux

Définition 3.1 Un espace topologique 1-connexe X_0 est dit $\mathbb{Q}$ -local si ses groupes d'homotopies sont des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, la rationalisation $\pi_n(X_0) \rightarrow \pi_n(X_0) \otimes \mathbb{Q}$ est un isomorphisme.

Une *rationalisation* d'un espace topologique 1-connexe X est une application $l: X \rightarrow X_0$ où X_0 est un espace 1-connexe $\mathbb{Q}$ -local et l'application $l_*: H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X_0; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

Tout espace simplement connexe admet une rationalisation. En outre, cette rationalisation est unique à homotopie près, *i.e.* que si $l: X \rightarrow X_0$ et $l': X \rightarrow X'_0$ sont deux rationalisations de X , il existe une équivalence d'homotopie $h: X_0 \rightarrow X'_0$ unique à homotopie près telle que $l' \simeq h \circ l$.

Remarque : il existe une rationalisation des espaces non simplement connexes mais dont le groupe fondamental est nilpotent et agit de manière nilpotente sur les groupes d'homotopie. Cependant nous n'en ferons pas usage ici.

Exemple 3.2 La grassmannienne orientée $BSO(k)$, classifiant des fibrés vectoriels orientés de rang k , admet pour rationalisation (si $k \geq 1$) un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane s'écrivant

$$\begin{aligned}
- BSO(k)_0 &= \prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} K(\mathbb{Q}, 4i) \quad \text{si } k \text{ est impair;} \\
- BSO(k)_0 &= K(\mathbb{Q}, k) \times \prod_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} K(\mathbb{Q}, 4i) \quad \text{si } k \text{ est pair.}
\end{aligned}$$

Si X est un CW-complexe, l'ensemble $[X, BSO(k)_0]$ des classes d'homotopie d'applications de X dans $BSO(k)_0$ est donc en bijection naturelle avec

$$\begin{aligned}
- \bigoplus_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} H^{4i}(X; \mathbb{Q}) \quad &\text{si } k \text{ est impair;} \\
- H^k(X; \mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} H^{4i}(X; \mathbb{Q}) \quad &\text{si } k \text{ est pair.}
\end{aligned}$$

La colimite $BSO = \operatorname{hocolim}_k BSO(k)$ admet pour rationalisation

$$BSO_0 = \prod_{i>0} K(\mathbb{Q}, 4i).$$

Définition 3.3 Deux espaces 1-connexes X et Y sont dits *rationnellement équivalents* si et seulement si leurs rationalisations X_0 et Y_0 sont homotopiquement équivalentes.

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence associées sont appelées *types d'homotopie rationnelle*.

3.1.2 Applications et diagrammes

Définition 3.4 Une *rationalisation d'une application* $f: X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques 1-connexes est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
l_X \downarrow & & \downarrow l_Y \\
X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0
\end{array}$$

dans lequel l_X et l_Y sont des rationalisations des espaces X et Y .

Plus généralement, une *rationalisation* d'un diagramme commutatif vu comme un foncteur $C \rightarrow \mathcal{T}op^1$ est une transformation naturelle vers un diagramme dans la catégorie des espaces simplement connexes $\mathbb{Q}$ -locaux, induisant des rationalisations entre tous les espaces du diagramme.

Proposition 3.5 *La rationalisation d'un produit fibré homotopique (resp. d'une somme amalgamée homotopique) dans laquelle tous les espaces sont simplement connexes est un produit fibré homotopique (resp. une somme amalgamée homotopique).*

Théorème 3.6 (Whitehead rationnel) *Une application $f: X \rightarrow Y$ entre deux espaces simplement connexes induit un isomorphisme en homologie rationnelle $f_*: H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Q})$ si et seulement si elle induit un isomorphisme en homotopie rationnelle $f_\#: \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q}$.*

Dans ce cas, toute rationalisation $l_Y: Y \rightarrow Y_0$ induit une rationalisation de X par la composée $l_X = l_Y \circ f: X \rightarrow Y_0$.

Définition 3.7 Une application satisfaisant les isomorphismes du théorème 3.6 est appelée une *équivalence rationnelle*.

Remarque : le théorème de Whitehead rationnel permet de bien définir les groupes d'homotopie et d'homologie rationnelles d'un type d'homotopie rationnelle.

En outre, deux espaces simplement connexes sont rationnellement équivalents si et seulement s'ils sont liés par une chaîne d'équivalences rationnelles

$$X \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X_1 \xleftarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X_2 \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \dots \xleftarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X_n \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X'$$

3.1.3 Structure normale rationnelle

Dans une perspectives de classification des variétés fermées simplement connexes, la classification de leurs types d'homotopie rationnelle passe par la remarque suivante : si M est une variété fermée simplement connexe orientée, alors sa rationalisation M_0 est un complexe de Poincaré rationnel orienté, la classe d'orientation $[M]$ induit une classe d'orientation pour M_0 et les classes de Pontryagin rationnelles du fibré tangent induisent des classes en cohomologie $p_i \in H^{4i}(M_0; \mathbb{Q})$.

Cette remarque motive la définition suivante :

Définition 3.8 Soit (X, A) une paire d'espaces 1-connexes $\mathbb{Q}$ -locaux qui détermine une paire de Poincaré rationnelle orientée.

Une *structure normale rationnelle* sur (X, A) est la donnée d'une classe de cohomologie rationnelle $P_X \in H^{4i}(X; \mathbb{Q})$ se décomposant sous la forme $P_X = 1 + \sum_{i>0} p_i(X)$, avec $|p_i| = 4i$.

Elle est dite *réalisable* s'il existe

- une variété 1-connexe compacte orientée M de bord vide ou 1-connexe et de fibré normal stable ν_M ;
- des rationalisations $l_M: M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X$, et $l_{\partial M}: \partial M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} A$ qui s'inscrivent dans un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} \partial M & \hookrightarrow & M \\ l_{\partial M} \downarrow & & \downarrow l_M \\ A & \longrightarrow & X \end{array}$$

qui préservent les classes d'orientation $((l_M, l_{\partial M})_*([M]) = x)$ et telles que $l_M^*(P_X) = P(\nu_M)$.

Le problème de la réalisabilité met en jeu le réseau des nombres de Pontryagin réalisables, la forme d'intersection en dimension moitié pour un complexe de Poincaré rationnel de dimension multiple de 4, et le polynôme de Hirzebruch, toutes notions rappelées au chapitre 2.

Théorème 3.9 (Sullivan) [38, Théorème 13.2] *Soit X un complexe de Poincaré rationnel orienté 1-connexe $\mathbb{Q}$ -local de dimension $m \geq 5$.*

Si m n'est pas un multiple de 4, alors toute structure normale rationnelle est réalisable.

Si $m = 4r$, alors une structure normale rationnelle P_X sur X est réalisable si et seulement si

1. *les nombres rationnels $\langle p_{(\omega)}, x \rangle$ sont les nombres de Pontryagin normaux d'une variété orientée fermée de dimension $4r$;*
2. *la forme d'intersection sur $H_{2r}(X; \mathbb{Q})$ est représentée par une matrice diagonale de la forme*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

3. *la signature $(p-q)$ de la forme d'intersection est donnée par la formule de Hirzebruch*

$$s = \langle L_r^\nu(p_i), x \rangle. \quad (3.2)$$

Notre théorème 6.1 propose une généralisation de ce résultat en réalisant une structure normale rationnelle par une variété munie d'un fibré vectoriel de classes caractéristiques prescrites.

Exemple 3.10 Il n'existe pas de variété fermée orientée de dimension 12 dont la cohomologie rationnelle soit une algèbre polynômiale tronquée à un seul générateur en degré 6 s'écrivant $\mathbb{Q}[a_6]/a^3$.

Supposons qu'il existe une telle variété M . Elle est de dimension 12, et elle vérifie $\dim H^6(M; \mathbb{Q}) = 1$. Sa signature vaut alors $+1$ ou -1 .

En outre, les classes de Pontryagin normales p_1 et p_2 sont nécessairement nulles car $H^4(M; \mathbb{Q}) = H^8(M; \mathbb{Q}) = 0$.

La formule de la signature de Hirzebruch impose la relation

$$\langle 62p_3(\nu_M), [M] \rangle = \pm 945,$$

ce qui est impossible puisque le nombre p_3 doit être entier, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation

$$\langle p_3(\nu_M), [M] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

3.2 Traduction algébrique

3.2.1 Algèbres différentielles graduées commutatives

Une *algèbre différentielle graduée commutative* (ou *adgc*) est une $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée en degré positif A^* munie d'une différentielle d de degré 1 qui soit une dérivation par rapport au produit, et telle que pour tout couple $(u, v) \in A^2$ d'éléments homogènes

$$u \cdot v = (-1)^{|u| \cdot |v|} v \cdot u.$$

Les morphismes d'adgc sont les morphismes d'algèbres graduées de degré 0 qui préservent la différentielle. Un *quasi-isomorphisme* est un morphisme d'adgc $\phi: B \xrightarrow{\sim} A$ induisant un isomorphisme en homologie

$$H\phi: HB \xrightarrow{\cong} HA.$$

Deux adgc A et A' sont dites *équivalentes* si elles sont reliées par une chaîne de quasi-isomorphismes

$$A \xrightarrow{\sim} A_1 \xleftarrow{\sim} A_2 \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} A_n \xrightarrow{\sim} A'$$

De même, deux diagrammes d'adgc sont dits équivalents s'ils sont reliés par une chaîne de diagrammes de même forme telle que les transformations naturelles entre deux diagrammes successifs induisent des quasi-isomorphismes entre leurs objets.

Définition 3.11 Soit A une adgc. Nous appelons *A-adgc* toute adgc B munie d'un morphisme $\phi: A \rightarrow B$.

Un *remplacement* de A est une adgc $\hat{A}$ munie d'un quasi-isomorphisme $\phi: A \xrightarrow{\sim} \hat{A}$.

Rappelons que tout morphisme d'adgc $A \rightarrow B$ peut être factorisé par un remplacement de A suivi d'une surjection [11, §12 (b) page 149]

$$A \xrightarrow{\simeq} \hat{A} \twoheadrightarrow B.$$

Définition 3.12 Si $A \xrightarrow{\phi} B$ et $C \xrightarrow{\psi} B$ sont deux morphismes d'adgc, nous notons $A \times_B C = \{(a, c) \in A \times C \mid \phi(a) = \psi(c)\}$ le *produit fibré* de A et C au dessus de B .

Si $\hat{A} \twoheadrightarrow B$ est un remplacement surjectif de ϕ , le produit fibré $\hat{A} \times_B C$ est un *produit fibré homotopique* de A et C au dessus de B .

Considérons un diagramme commutatif d'adgc

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & B. \end{array}$$

Il *constitue un produit fibré homotopique* s'il induit un quasi-isomorphisme entre R et un produit fibré homotopique de A et C au dessus de B .

3.2.2 Foncteur A_{PL}

D. Sullivan [38] a construit un foncteur $A_{\text{PL}}: \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{ADGC}$ de la catégorie des espaces topologiques vers celle des adgc, avec un isomorphisme d'algèbre naturel

$$H(A_{\text{PL}}(X)) \cong H^*(X; \mathbb{Q}).$$

En outre, deux espaces simplement connexes de $\mathbb{Q}$ -type fini X et Y ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement si les adgc $A_{\text{PL}}(X)$ et $A_{\text{PL}}(Y)$ sont équivalentes.

Définition 3.13 Soit X un espace simplement connexe.

Nous appelons *modèle* de X la donnée d'une adgc (A, d) et d'une chaîne de quasi-isomorphisme la joignant à $A_{\text{PL}}(X)$.

Si $f: X \rightarrow Y$ est une application entre espaces simplement connexes, nous appelons *modélisation* de f la donnée d'un morphisme d'adgc $\phi: B \rightarrow A$ et d'une chaîne de quasi-isomorphismes le joignant à

$$A_{\text{PL}}(f): A_{\text{PL}}(Y) \rightarrow A_{\text{PL}}(X).$$

3.2.3 Formalité

Un modèle d'un espace ou d'une application contient en général plus d'information que la cohomologie rationnelle.

La formalité qualifie certains espaces dont le type d'homotopie rationnelle est complètement déterminé par la cohomologie rationnelle.

Définition 3.14 Un espace simplement connexe est dit *formel* s'il admet l'adgc $(H^*(X; \mathbb{Q}), 0)$ comme modèle.

De nombreux exemples d'espaces simplement connexes formels sont connus : les sphères, les groupes de Lie compacts, les variétés de Kähler compactes (et notamment les variétés projectives complexes [9]). La formalité est aussi stable par produit, et la somme connexe de deux variétés fermées formelles est une variété formelle.

Définition 3.15 Une application $f: X \rightarrow Y$ entre espaces 1-connexes est dite *formalisable* si elle admet l'application $f^*: H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ comme modélisation.

Remarque : si $f: X \rightarrow Y$ est formalisable, alors les espaces X et Y sont formels, mais la réciproque est fausse en général.

3.3 Fibration sphérique rationnelle

3.3.1 Cas général

Définition 3.16 Une *fibration sphérique rationnelle* de rang $k \geq 3$ sur un espace simplement connexe X est une fibration $A \rightarrow X$ dont la fibre est une sphère d'homologie rationnelle simplement connexe de dimension $(k - 1)$.

Elle est dite *rationnellement triviale* si et seulement si elle admet pour rationalisation la projection $X_0 \times S_0^{k-1} \rightarrow X_0$.

Remarque : le rang est ainsi défini pour que le fibré en sphères associé à un fibré vectoriel constitue une fibration rationnelle de même rang.

Proposition 3.17 Toute fibration sphérique rationnelle $p: A \rightarrow X$ de rang $k \geq 3$ sur un complexe de Poincaré rationnel X 1-connexe détermine une paire de Poincaré rationnelle, c'est-à-dire qu'en notant

$$I_p = A \times [0, 1] \cup_{p \times 1} X \times \{1\}$$

le cylindre de l'application p , la paire (I_p, A) satisfait la dualité à coefficients rationnels.

Démonstration: Remplaçons X par un CW-complexe. Il existe un sous-complexe fini simplement connexe X' de X telle que l'injection $X' \hookrightarrow X$ constitue une équivalence rationnelle. La fibration induite $p': A' \rightarrow X'$ est rationnellement équivalente et de même fibre. Puisque X' est simplement connexe, la fibration p' est orientable.

Notons Σ la fibre de p . Le cylindre $I_{p'}$ constitue une fibration sur X' de fibre le cône $C\Sigma$, telle que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C\Sigma & \longrightarrow & I_{p'}. \end{array}$$

Par récurrence sur le squelette de X' et utilisation de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en homologie rationnelle, il existe une *classe de Thom* $\theta' \in H^k(I_{p'}, A'; \mathbb{Q})$ induisant une classe d'orientation de la paire $(C\Sigma; \Sigma)$. Le cup-produit avec cette classe induit un isomorphisme de Thom en homologie rationnelle (voir par exemple [16, page 441–444])

$$\cup \theta': H^*(I_{p'}; \mathbb{Q}) \cong H^*(I_{p'}, A'; \mathbb{Q}).$$

Notons $x \in H_m(X; \mathbb{Q})$ une classe d'orientation du complexe de Poincaré rationnel X et $\theta \in H^k(I_p, A; \mathbb{Q})$ la classe de Thom induite sur la paire (I_p, A) . Il existe une unique classe $t \in H_{m+k}(I_p, A; \mathbb{Q})$ satisfaisant l'égalité

$$\forall \alpha \in H^n(I_p; \mathbb{Q}), \langle \alpha, x \rangle = \langle \alpha \cup \theta, t \rangle.$$

Par construction, l'application $\cap t: H^*(I_p, A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{m+k}(I_p; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque : étant donné une fibration sphérique rationnelle sur un complexe de Poincaré rationnel simplement connexe, le choix d'une orientation sur la fibre et la base détermine par le procédé ci-dessus une unique classe d'orientation pour la paire.

Théorème 3.18 *Soit X un espace simplement connexe qui est rationnellement de type fini. Soit $\pi: A \rightarrow X$ une fibration sphérique rationnelle de rang $k \geq 3$. Si la fibration est rationnellement triviale, alors la cofibre de π est rationnellement équivalente à un bouquet de sphères.*

Démonstration: Notons (Q, d) un modèle d'adgc pour X . Puisque la fibration π est rationnellement triviale, elle est modélisée par le morphisme d'adgc

$Q \oplus z.Q \leftarrow Q \oplus z.Q \oplus \hat{z}.Q$, qui est une surjection de Q -dg modules avec $|z| = k - 1$, $|\hat{z}| = k$, $dz = \hat{z}$ et $z^2 = z\hat{z} = \hat{z}^2 = 0$.

La cofibre homotopique $T(\pi)$ de l'application π est modélisée par l'adgc $(Q \oplus \hat{z}.Q, d)$, qui est un Q -dg module satisfaisant $d\hat{z} = 0$ et $\hat{z}^2 = 0$.

Notons B un supplémentaire de $\text{Ker} d$ dans Q .

Nous définissons alors un morphisme d'adgc $\eta: Q \oplus \hat{z}.Q \rightarrow H(Q \oplus \hat{z}.Q)$ par $\forall q \in \text{Ker} d$, $\eta(z.q) = [z.q]$, et $\forall q \in B$, $\eta(z.q) = 0$.

Par construction, $H\eta$ est le morphisme identité, donc l'espace $T(\pi)$ est formel.

Le théorème découle alors du fait que la multiplication est triviale dans la cohomologie $H^*(T(\pi); \mathbb{Q}) \cong H(Q \oplus \hat{z}.Q)$ $\square$

3.3.2 Rationalisation de fibrés en sphères

Dans toute la suite, la rationalisation du $SO(k)$ -fibré en sphères universel $S\tilde{\gamma}^k$ sur $BSO(k)$ est supposée constituer une vraie fibration orientée $(S\tilde{\gamma}^k)_0 \rightarrow BSO(k)_0$ de fibre S_0^{k-1} .

Soit X un espace topologique muni d'une application $c: X \rightarrow BSO(k)_0$, avec $k \geq 3$.

La donnée de la classe d'homotopie de c est équivalente d'après l'exemple 3.2 à la donnée de classes $p_i \in H^{4i}(X; \mathbb{Q})$, où $1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$, et si k est pair, d'une classe $e \in H^k(X; \mathbb{Q})$.

Définition 3.19 Nous appelons *fibration sphérique rationnelle associée à c* la fibration sphérique rationnelle $S(c) \xrightarrow{\pi} X$ obtenue par produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc} S(c) & \longrightarrow & (S\tilde{\gamma}^k)_0 \\ \downarrow & \Gamma_h & \downarrow l \\ X & \xrightarrow{c} & BSO(k)_0. \end{array}$$

Exemple 3.20 Soit X un espace 1-connexe muni d'un fibré vectoriel orienté ξ , classifié par une application $c: X \rightarrow BSO(k)$. Notons $c_0: X_0 \rightarrow BSO(k)_0$ une rationalisation de l'application c .

Le fibré en sphères $S\xi \rightarrow X$ admet pour rationalisation le fibration sphérique rationnelle $S(c_0) \rightarrow X_0$ associée à c_0 .

Le résultat suivant permet de déduire une modélisation du fibré en sphères associé à un fibré vectoriel à partir d'un modèle de la base et de la classe d'Euler ou d'une certaine classe de Pontryagin selon la parité du rang.

Proposition 3.21 [11, § 15 (b) Exemple 4] *Soit $S(c)$ un fibré en sphères rationnelles de rang $k \geq 3$ au dessus d'un espace 1-connexe X . Soit Q un modèle rationnel de X .*

Un modèle rationnel de l'application $S(c) \rightarrow X$ est l'injection

$$Q \rightarrow Q \otimes \Lambda Z$$

où

- si $k = 2r$, $Z = \mathbb{Q}.z_{2r-1}$, et la différentielle d du modèle Q s'étend à $Q \otimes \Lambda Z$ en posant $dz = e$, où e est un relèvement dans Q de l'image $c^*(e_k) \in H^k(X; \mathbb{Q}) \cong HQ$ de la classe d'Euler universelle de $BSO(k)$;
- si $k = 2r + 1$, $Z = \mathbb{Q}.z_{2r} \oplus \mathbb{Q}.y_{4r-1}$, et la différentielle d du modèle Q s'étend à $Q \otimes \Lambda Z$ en posant $dz = 0$ et $dy = z^2 - \frac{1}{4}p$ où p est un relèvement dans Q de l'image $c^*(p_r) \in H^{4r}(X; \mathbb{Q}) \cong HQ$ de la r ième classe de Pontryagin universelle de $BSO(k)$.

Application 3.22 Soit X un espace simplement connexe muni d'une application continue $c: X \rightarrow BSO(k)_0$ avec $k \geq 3$.

Supposons que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- k est pair et $c^*(e_k) = 0$;
- k est impair et $c^*(p_{\frac{k-1}{2}}) = 0$.

Alors le fibré en sphères rationnelles $S(c) \xrightarrow{\pi} X$ est une fibration sphérique rationnelle triviale et la cofibre de π , notée $T(c)$ est rationnellement équivalente à un bouquet de sphères.

Chapitre 4

Fibrés vectoriels sur une variété

La première obstruction à l'existence d'un plongement à homotopie rationnelle près est la réalisabilité d'un fibré vectoriel dont les classes caractéristiques rationnelles soient celles du fibré normal putatif (définition 1.19). Nous démontrons au chapitre 6 une extension du théorème de Sullivan sur les types d'homotopie rationnelle des variétés (théorème 3.9), afin d'établir quelles peuvent être les classes de Pontryagin et d'Euler d'un fibré vectoriel sur une variété dans un type d'homotopie rationnelle donné. Comme dans le cas sans fibré (section 2.2), les invariants numériques rationnels qui conditionnent la réalisabilité d'une telle structure sont obtenus en évaluant des monômes en les classes caractéristiques putatives sur la classe d'orientation d'un complexe de Poincaré rationnel.

4.1 Généralisation des nombres de Pontryagin

4.1.1 Construction

Soit M une variété fermée orientée de fibré normal stable ν_M .

Si $\dim(M) = 4r$, rappelons que les nombres de Pontryagin normaux de M sont les nombres entiers obtenus par les évaluations de la forme

$$\langle p_{(\omega)}(\nu_M), [M] \rangle = \langle p_1^{\omega_1}(\nu_M) \cdots p_r^{\omega_r}(\nu_M), [M] \rangle$$

avec $|\omega| := \sum_{i=1}^r i \cdot \omega_i = r$.

Supposons maintenant que la variété M est munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k . Nous disposons donc non seulement des classes de Pon-

tryagin rationnelles du fibré normal stable $p_i(\nu_M) \in H^{4i}(M; \mathbb{Q})$, mais également celles induites par le fibré ξ notées $p_i(\xi) \in H^{4i}(M; \mathbb{Q})$, ainsi que la classe d'Euler $e(\xi) \in H^k(M; \mathbb{Q})$ qui vérifie $e(\xi) = 0$ si k est impair et $e(\xi)^2 = p_{\frac{k}{2}}(\xi)$ si k est pair.

Définition 4.1 Soit M une variété compacte orientée de dimension m et de fibré normal ν_M , munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k .

Nous appelons *nombre de Pontryagin mixtes* de (M, ξ) la famille de nombres (entiers) indicée par les multi-entiers de

$$\left\{ \left((\omega_i)_{1 \leq i \leq \frac{m}{4}}, (\alpha_i)_{1 \leq i \leq \frac{k}{2}} \right) \mid 4 \sum_i i \cdot (\omega_i + \alpha_i) = \dim(M) \right\}$$

et définie par

$$p_{(\omega),(\alpha)}(M, \xi) = \langle p_1^{\omega_1}(\nu_M) \cdots p_r^{\omega_r}(\nu_M) \cdot p_1^{\alpha_1}(\xi) \cdots p_r^{\alpha_r}(\xi) [M] \rangle.$$

De même, si k est pair nous appelons *nombre d'Euler-Pontryagin* de (M, ξ) la famille de nombres (entiers) indicée par

$$\left\{ \left((\omega_i)_{1 \leq i \leq \frac{m}{4}}, (\alpha_i)_{1 \leq i \leq \frac{k}{2}} \right) \mid 4 \sum_i i \cdot (\omega_i + \alpha_i) = \dim(M) - k \right\}$$

et définie par

$$\bar{p}_{(\omega),(\alpha)}(M, \xi) = \langle p_{(\omega)}(\nu_M) p_{(\alpha)}(\xi) e(\xi), [M] \rangle.$$

Nous appelons *nombre de Pontryagin généralisés* la donnée de ces deux familles de nombres.

Remarque : la variété M ne possède des nombres Pontryagin mixtes que lorsque $\dim(M)$ est un multiple de 4. Elle n'a des nombres d'Euler-Pontryagin que si k est pair et $(\dim(M) - k)$ est un multiple de 4.

Lorsque $\dim(M)$ et k sont tous deux multiples de 4, les nombres de Pontryagin généralisés existent sous les deux formes.

En pratique, nous noterons souvent les nombres de Pontryagin mixtes $p_{(\omega),(\alpha)}$ sous la forme $\prod_i p_i^{\omega_i} p_i'^{\alpha_i}$ et les nombres d'Euler-Pontryagin $\bar{p}_{(\omega),(\alpha)}$

sous la forme $\left(\prod_i p_i^{\omega_i} p_i'^{\alpha_i} \right) e$.

4.1.2 Exemples

Notons $\gamma_{\mathbb{C}P(4)}$ le fibré canonique en droites complexes sur $\mathbb{C}P(4)$, vu comme un fibré vectoriel réel orienté de rang 2 et considérons $\mathbb{C}P(4)$ muni de la somme de Whitney $\xi = \gamma_{\mathbb{C}P(4)} \oplus \gamma_{\mathbb{C}P(4)}$.

Dans l'algèbre $H^*(\mathbb{C}P(4); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a]/a^5$, les classes de Pontryagin du fibré normal s'écrivent $P(\nu_{\mathbb{C}P(4)}) = 1 - 5a^2 + 15a^4$ donc $p_1(\nu_{\mathbb{C}P(4)}) = -5a^2$ et $p_2(\nu_{\mathbb{C}P(4)}) = 15a^4$. En outre, le calcul des classes de Chern permet d'écrire $e(\xi) = a^2$, et $P(\xi) = 1 + 2a^2 + a^4$ donc $p_1(\xi) = 2a^2$ et $p_2(\xi) = a^4$.

Une variété orientée de dimension 8 et munie d'un fibré vectoriel orienté de rang 4 possède cinq nombres de Pontryagin mixtes $(p_1^2, p_2, p_1p'_1, p_1'^2, p_2')$ et deux nombres d'Euler-Pontryagin $(p_1e_4, p_1'e_4)$. La classe fondamentale de la variété $\mathbb{C}P(4)$ étant représentée par la classe de cohomologie a^4 , nous obtenons donc la suite des nombres de Pontryagin généralisés :

$$(p_1^2, p_2, p_1p'_1, p_1'^2, p_2', p_1e_4, p_1'e_4)(\mathbb{C}P(4), \xi) = (25, 15, -10, 4, 1, -5, 2).$$

Proposition 4.2 *Les nombres de Pontryagin généralisés de quelques variétés de dimension 8 et munies d'un fibré vectoriel de rang 4 se calculent comme suit :*

- $\mathbb{C}P(4)$ muni du fibré trivial ε^4 : $(25, 15, 0, 0, 0, 0, 0)$;
- $\mathbb{C}P(4)$ muni de la somme de Whitney $\gamma_{\mathbb{C}P(4)} \oplus \varepsilon^2$: $(25, 15, -5, 1, 0, 0, 0)$;
- $\mathbb{C}P(3) \times \mathbb{C}P(1)$ muni du produit $\gamma_{\mathbb{C}P(3)} \times \gamma_{\mathbb{C}P(1)}$: $(0, 0, 0, 0, 0, -4, 1)$;
- $\mathbb{C}P(2)^2$ muni du fibré trivial : $(18, 9, 0, 0, 0, 0, 0)$;
- $\mathbb{C}P(2)^2$ muni du produit $\gamma_{\mathbb{C}P(2)} \times \varepsilon^2$: $(18, 9, -3, 0, 0, 0, 0)$;
- $\mathbb{C}P(2)^2$ muni du produit $\gamma_{\mathbb{C}P(2)}^{\times 2}$: $(18, 9, -6, 2, 1, 0, 0)$;
- $\mathbb{C}P(2) \times \mathbb{C}P(1)^2$ muni du fibré induit par $\gamma_{\mathbb{C}P(1)}^{\times 2}$: $(0, 0, 0, 0, 0, -3, 0)$.

4.1.3 Lien avec le cobordisme

Nous spécifions la relation de cobordisme normal de la définition 2.6 au cas de l'espace $BSO \times BSO(k)$ muni du fibré vectoriel stable induit par la projection canonique $BSO \times BSO(k) \rightarrow BSO$.

Ce fibré vectoriel stable est constitué de la suite des espaces $BSO(n) \times BSO(k)$, munis respectivement des fibrés $\tilde{\gamma}^n$ induits par les projections $BSO(n) \times BSO(k) \rightarrow BSO(n)$.

Une $BSO \times BSO(k)$ -structure sur une variété compacte M est équivalente à homotopie près à la donnée d'un fibré vectoriel orienté de rang k sur M . L'équivalence est donnée par les applications classifiantes du fibré normal stable et du fibré de rang k sur M .

Proposition 4.3 *Soit M_1 et M_2 deux variétés fermées de même dimension et munies de fibrés vectoriels orientés de même rang k respectivement notés ξ_1 et ξ_2 . Elles sont normalement cobordantes si et seulement s'il existe une variété compacte orientée W de bord $M_1 \sqcup -M_2$ et munie d'un fibré vectoriel dont les restrictions à M_1 et M_2 sont respectivement isomorphes à ξ_1 et ξ_2 .*

Proposition 4.4 *Deux variétés normalement cobordantes ont les mêmes nombres de Pontryagin généralisés.*

Démonstration: Les nombres de Pontryagin généralisés de l'union disjointe $(M_1 \sqcup -M_2, \xi_1 \sqcup \xi_2)$ correspondent aux différences entre ceux de M_1 et ceux de M_2 . Il suffit de montrer que si W est une variété compacte orientée munie d'un fibré vectoriel orienté ξ , les nombres de Pontryagin généralisés du bord ∂W muni de la restriction $\xi|_{\partial W}$ sont nuls.

Notons donc $g : W \rightarrow BSO \times BSO(k)$ l'application classifiant le fibré normal stable de W et son fibré ξ . Si $i : \partial W \hookrightarrow W$ est l'injection canonique, alors la composée $g \circ i : \partial W \rightarrow BSO \times BSO(k)$ est l'application classifiant le fibré normal stable de ∂W et son fibré $\xi|_{\partial W}$. En outre, la classe d'orientation de ∂W est l'image de la classe d'orientation $[W]$ de W par le connectant dans la suite exacte longue d'homologie de la paire $(W, \partial W)$

$$\cdots \rightarrow H_n(W, \partial W) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial W) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(W) \rightarrow \cdots$$

Pour tout $P \in H^*(BSO \times BSO(k))$ définissant un nombre de Pontryagin généralisé, il vient finalement que

$$\langle (g \circ i)^*(P), [\partial W] \rangle = \langle i^* g^*(P), \partial[W] \rangle = \langle g^*(P), i_* \partial[W] \rangle = 0.$$

□

Remarque : avec la réinterprétation du groupe de cobordisme $\Omega_m^{BSO \times BSO(k)}$ (définition 2.6) de la proposition 4.3, le symétrique d'une classe correspond au changement d'orientation de la variété en préservant l'orientation du fibré de rang k .

$$-[(M, \xi)] = [(-M, \xi)]$$

D'après le théorème de Künneth, l'algèbre $H^*(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$ est une algèbre polynomiale engendrée par d'une part les classes de Pontryagin universelles $(p_i)_{i \geq 1}$ provenant de la cohomologie de BSO et d'autre part les classes de Pontryagin universelles provenant de la cohomologie de $BSO(k)$,

notées $(p'_i)_{1 \leq i \leq \frac{k}{2}}$, ainsi que la classe d'Euler universelle e_k si k est pair, avec dans ce cas la seule relation $e_k^2 = p'_{\frac{k}{2}}$.

Soit M une variété fermée orientée, munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k . Notons $b: M \rightarrow BSO$ l'application classifiant le fibré normal stable de M et $c: M \rightarrow BSO(k)$ l'application classifiant le fibré ξ . Posons enfin $g = (b, c): M \rightarrow BSO \times BSO(k)$.

Les nombres caractéristiques de (M, ξ) représentent les coordonnées de $g_*([M]) \in H_*(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$ dans la base duale de $(p_{(\omega)} p'_{(\alpha)}), (p_{(\omega)} p'_{(\alpha)} e_k)$ en degré m .

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 4.5 *Le sous-ensemble $\{g_*([M]) \in H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})\}$ des nombres de Pontryagin généralisés réalisables par des variétés fermées de dimension m munies d'un fibré vectoriel orienté de rang k est un sous-réseau d'indice fini du réseau entier*

$$H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Z})/\text{torsion} \hookrightarrow H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$$

qui s'identifie avec l'image du morphisme d'évaluation rationnel

$$ev_{\mathbb{Q}}: \Omega_m^{BSO \times BSO(k)} \rightarrow H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q}).$$

Démonstration: L'invariance des nombres de Pontryagin généralisés par cobordisme normal identifie l'ensemble $\{g_*([M]) \in H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})\}$ avec l'image du morphisme d'évaluation rationnel $ev_{\mathbb{Q}}$.

La factorisation par le réseau entier provient de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_m^{BSO \times BSO(k)} & \xrightarrow{ev} & H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Z}) \\ \downarrow \otimes \mathbb{Q} & \searrow ev_{\mathbb{Q}} & \downarrow \otimes \mathbb{Q} \\ \Omega_m^{BSO \times BSO(k)} \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\cong} & H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q}) \end{array}$$

En particulier, cette propriété démontre que l'image du morphisme $ev_{\mathbb{Q}}$ est un groupe abélien libre de type fini.

Puisque la tensorisation par $\mathbb{Q}$ du morphisme $ev_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme (proposition 2.13), l'image de $ev_{\mathbb{Q}}$ est de rang maximal donc d'indice fini dans $H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Z})/\text{torsion}$. $\square$

Définition 4.6 Nous appelons *réseau d'Euler-Pontryagin en dimension m et rang k* et nous notons $\mathcal{L}_m(k)$ l'image du morphisme d'évaluation rationnel $ev_{\mathbb{Q}}$.

Lorsque $k = 0$, ce réseau s'identifie avec le réseau des nombres de Pontryagin normaux réalisables $\mathcal{L}_m$ (définition 2.16).

Exemple 4.7 La classe d'Euler du fibré canonique $\gamma_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}P(n)$ est le générateur canonique de la cohomologie.

Lorsque $n = 2$, la variété $\mathbb{C}P(1)$ munie de $\gamma_{\mathbb{C}}$ engendre le réseau $\mathcal{L}_2(2)$ qui s'identifie au réseau entier.

De même, le fibré canonique et le fibré trivial sur la variété $\mathbb{C}P(2)$ engendrent un sous-réseau de $\mathcal{L}_4(2)$ défini par les relations $p_1 \in 3\mathbb{Z}$ et $p'_1 \in \mathbb{Z}$.

4.2 Structure du réseau d'Euler-Pontryagin

Nous ne disposons pas sur le réseau d'Euler-Pontryagin $\mathcal{L}_m(k)$ d'informations aussi précises que sur le réseau de Pontryagin normal $\mathcal{L}_m$. Cependant il existe des liens entre tous ces réseaux. Nous les mettons en évidence et nous exploitons certains résultats connus pour approcher la détermination des réseaux d'Euler-Pontryagin.

4.2.1 Structure d'anneau bigradué

Le produit cartésien de deux variétés orientées M_1 et M_2 de dimensions respectives m_1 et m_2 et munies de fibrés vectoriels orientés de rang k_1 et k_2 donne une variété orientée de dimension $(m_1 + m_2)$ munie d'un fibré vectoriel orienté de rang $(k_1 + k_2)$.

Comme le produit de deux cobordismes normaux est un cobordisme normal entre les produits, il vient la proposition suivante :

Proposition 4.8 *La somme directe $\mathcal{L}_{*,*} = \bigoplus_{m,k} \mathcal{L}_m(k)$ est un anneau bigradué sans torsion, dont l'unité est représentée par le point muni du fibré vectoriel nul.*

Nous pouvons expliciter deux sous-anneaux particuliers :

- le point muni du fibré vectoriel (trivial) ε de rang 1 engendre le sous-anneau $\mathcal{L}_{0,*} \cong \mathbb{Z}[\varepsilon]$;
- le quotient de l'anneau de cobordisme orienté Ω_*^{BSO} par sa torsion s'identifie au sous-anneau $\mathcal{L}_{*,0} = \bigoplus_i \mathcal{L}_{4i}$.

Il est facile de voir que l'anneau $\mathcal{L}_{*,*}$ n'est pas polynômial, car le produit $\varepsilon\gamma_{CP(1)}$ appartient à $\mathcal{L}_2(4)$ qui est trivial.

Le noyau de la multiplication par ε est un facteur direct $\mathcal{E}_{*,*} \subset \mathcal{L}_{*,*}$.

Il représente l'ensemble des nombres d'Euler-Pontryagin des variétés dont tous les nombres de Pontryagin mixtes sont nuls.

4.2.2 Inclusion du réseau de Pontryagin normal

L'injection canonique $BSO \rightarrow BSO \times BSO(k)$ s'étend en une application fibrée et induit un morphisme de groupe $\Omega_m^{BSO} \rightarrow \Omega_m^{BSO \times BSO(k)}$ correspondant à l'adjonction d'un fibré trivial de rang k .

Par quotient de la torsion, nous obtenons un morphisme de groupe injectif $\mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{L}_m(k)$.

Réciproquement, la projection $BSO \times BSO(k) \rightarrow BSO$ induit une rétraction $\Omega_m^{BSO \times BSO(k)} \rightarrow \Omega_m^{BSO}$ correspondant à l'oubli du fibré de rang k .

Le morphisme de groupe induit par quotient de la torsion est aussi une rétraction de $\mathcal{L}_m(k)$ sur $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(0)$.

Notons $\tilde{\mathcal{L}}_m(k)$ le noyau de la rétraction. Il représente l'ensemble des nombres de Pontryagin généralisés des variétés dont les nombres de Pontryagin normaux sont nuls. En particulier, $\mathcal{E}_{m,k} \subset \tilde{\mathcal{L}}_m(k)$. Le groupe abélien libre $\mathcal{L}_m(k)$ se décompose donc de manière canonique en une somme directe

$$\mathcal{L}_m(k) = \mathcal{L}_m \oplus \tilde{\mathcal{L}}_m(k). \quad (4.1)$$

Remarquons qu'un fibré orientable de rang 1 est forcément trivial, donc le réseau $\mathcal{L}_m(1)$ s'identifie au réseau des nombres de Pontryagin normaux réalisables $\mathcal{L}_m$.

Application 4.9 Puisque le réseau $\mathcal{L}_4$ est déterminé par la relation $p_1 \in 3\mathbb{Z}$ (équation 2.6), les calculs de l'exemple 4.7 montrent que $\mathcal{L}_4(2)$ est engendré par le fibré canonique et le fibré trivial sur $\mathbb{C}P(2)$.

De même, le réseau $\mathcal{L}_4(4)$ est engendré par le fibré canonique ε^4 et les sommes de Whitney $\gamma_{\mathbb{C}} \oplus \gamma_{\mathbb{C}}$ et $\gamma_{\mathbb{C}} \oplus \varepsilon^2$ sur $\mathbb{C}P(2)$, ce qui correspond aux seules relations

$$p_1 \in 3\mathbb{Z}, \quad p'_1 \in \mathbb{Z}, \quad e \in \mathbb{Z}.$$

4.2.3 Réseau stable

L'idéal engendré par $(\varepsilon - 1)$ est homogène par rapport à la dimension m . Le quotient $\mathcal{L}_*^S = \mathcal{L}_{*,*}/(\varepsilon - 1)$ s'identifie au réseau de Pontryagin stable.

L'adjonction d'un fibré vectoriel trivial de rang 1 induit un morphisme de groupe $\mathcal{L}_m(k) \rightarrow \mathcal{L}_m(k+1)$ qui est un isomorphisme lorsque $k > m$.

Définition 4.10 Nous appelons *réseau de Pontryagin stable* en dimension m et nous notons $\mathcal{L}_m^S$ la limite $\text{colim}_k \mathcal{L}_m(k)$, vue comme un réseau du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $H_m(BSO \times BSO; \mathbb{Q})$.

Remarque : le réseau de Pontryagin stable s'identifie au quotient de l'anneau $\mathcal{L}_{*,*}$ par l'idéal engendré par $(\varepsilon - 1)$, homogène par rapport à la dimension m .

Par construction, le réseau $\mathcal{L}_m^S$ est l'image de l'évaluation

$$ev_{\mathbb{Q}}: \Omega_m^{BSO \times BSO} \rightarrow H_m(BSO \times BSO; \mathbb{Q}).$$

Nous avons les égalités suivantes :

$$\Omega_m^{BSO \times BSO} = \text{colim}_{\vec{k}} \Omega_m^{BSO \times BSO(k)} = \text{colim}_{\vec{k}, n} \pi_{m+n}(T\text{pr}_1^*(\tilde{\gamma}^n)).$$

Notons $c: BSO(n) \times BSO(k) \rightarrow BSO(n+k)$ l'application classifiant le produit de fibrés $\tilde{\gamma}^n \times \tilde{\gamma}^k$.

Rappelons que tout fibré vectoriel ξ sur un CW-complexe fini admet un complémentaire, c'est-à-dire un fibré vectoriel η tel que $\xi \oplus \eta$ soit trivial. Rappelons également que si ξ est un fibré vectoriel de rang k sur un CW-complexe fini de rang $m < k$, il existe un sous-fibré $\bar{\xi}$ de ξ dont l'orthogonal est trivial.

Avec ces deux rappels, il est facile de voir que l'application fibrée

$$(c, \text{pr}_2): BSO(n) \times BSO(k) \rightarrow BSO(n+k) \times BSO(k)$$

est n -connexe.

Proposition 4.11 *L'application fibrée*

$$(c, \text{pr}_2): BSO(n) \times BSO(k) \rightarrow BSO(n+k) \times BSO(k)$$

induit une application $(2n+k)$ -connexe entre les espaces de Thom. Elle identifie $\pi_{m+n+k}(MSO(n) \wedge MSO(k))$ avec $\Omega_m^{BSO(n+k) \times BSO(k)}$ dès que $m < 2n+k$.

En utilisant l'application naturelle

$$\bigoplus_{i=0}^m (\pi_{n+i}(MSO(n)) \times \pi_{k+m-i}(MSO(k))) \rightarrow \pi_{m+n+k}(MSO(n) \wedge MSO(k)),$$

qui induit après évaluation un isomorphisme en homologie rationnelle

$$\bigoplus_{i=0}^m (H_i(BSO(n); \mathbb{Q}) \oplus H_{m-i}(BSO(k); \mathbb{Q})) \rightarrow H_m(BSO(n) \times BSO(k); \mathbb{Q}),$$

nous pouvons définir une injection de $\bigoplus_{i=0}^m \mathcal{L}_i \times \mathcal{L}_{m-i}$ dans $\mathcal{L}_m^S$ qui en fait un sous-réseau.

4.3 Opérations invariantes par cobordisme normal

Comme dans le cas des nombres de Pontryagin usuels, le réseau d'Euler-Pontryagin $\mathcal{L}_m(k)$ ne s'identifie pas au réseau entier inclus dans le groupe d'homologie $H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$. Nous ne disposons pas encore d'une description complète, mais nous pouvons présenter plusieurs opérations définies sur la somme directe de ces réseaux. Nous en déduisons des lacunes par rapport au réseau entier, et par conséquent des obstructions à la réalisation d'un fibré vectoriel orienté à classes caractéristiques fixées sur une variété donnée.

Par construction, le réseau $\mathcal{L}_m(k)$ est la partie libre du groupe de cobordisme $\Omega_m^{BSO \times BSO(k)}$, donc toute opération invariante par cobordisme normal définit une opération sur les réseaux d'Euler-Pontryagin.

4.3.1 Auto-intersection

Cette opération simple de cobordisme normal va nous permettre d'obtenir des relations sur les réseaux $\mathcal{L}_m(k)$ pour des dimensions m plus élevées.

Soit M une variété compacte orientée de dimension m munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k .

Il existe une section lisse $s: M \hookrightarrow E(\xi)$ du fibré ξ qui soit transverse à la section nulle $i: M \hookrightarrow E(\xi)$, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in s^{-1}(i(M))$, l'équation suivante soit satisfaite :

$$T_x s(T_x M) + T_x i(T_x M) = T_x E(\xi).$$

La préimage $s^{-1}(i(M))$ constitue alors une sous-variété plongée N de codimension k dans M (voir par exemple [5, § II, 15]).

En outre, le fibré normal de N dans M s'identifie au fibré $\xi|_N$. La variété N est alors orientée par la relation

$$\tau_N \oplus \xi|_N = (\tau_M)|_N$$

Proposition 4.12 *Si M est une variété fermée, la classe de cobordisme normal de $(N, \xi|_N)$ ne dépend que de celle de (M, ξ) .*

Démonstration: Il suffit de montrer que si (M, ξ) est normalement cobordante au vide, alors $(N, \xi|_N)$ également. Si W est un cobordisme normal pour $M = \partial W$, muni d'un fibré vectoriel orienté ξ , toute section lisse $s: M \hookrightarrow D(\xi|_M)$ transverse à la section nulle se prolonge en une section lisse $\bar{s}: W \hookrightarrow D\xi$ transverse à la section nulle, et l'intersection entre $\bar{s}(W)$ et la section nulle du fibré $\bar{\xi}$, munie de la restriction du fibré $\bar{\xi}$, constitue un cobordisme normal pour $(N, \xi|_N)$. $\square$

Définition 4.13 Nous appelons *auto-intersection* de (M, ξ) la classe de cobordisme normal de la sous-variété plongée N ainsi définie munie de la restriction $\xi|_N$.

Proposition 4.14 *L'auto-intersection induit un morphisme de groupes*

$$\mathcal{L}_m(k) \rightarrow \mathcal{L}_{m-k}(k).$$

L'intérêt de cette opération réside dans la calculabilité des nombres de Pontryagin généralisés de l'auto-intersection à partir de ceux de la variété initiale.

Proposition 4.15 [5, § VI, Proposition 12.8] *Soit M une variété fermée orientée munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k . Soit $(N, \xi|_N)$ une auto-intersection plongée dans M par $j: N \hookrightarrow M$.*

Les classes de Pontryagin normales rationnelles de N satisfont l'équation

$$P(\nu_N) = j^*P(\nu_M) \cdot j^*P(\xi)$$

et l'image de la classe d'orientation de N s'écrit

$$j_*([N]) = e(\xi) \cap [M].$$

Exemple 4.16 Soit (M, ξ) un représentant d'une classe de $\mathcal{L}_{4+k}(k)$. Notons $(N, \xi|_N)$ une auto-intersection plongée dans M par j .

Nous obtenons les relations

$$\begin{aligned} (p_1 e)(M, \xi) &= \langle p_1(\nu_M) e(\xi), [M] \rangle = \langle p_1(\nu_M), e(\xi) \cap [M] \rangle = \langle p_1(\nu_M), j_*([M]) \rangle \\ &= \langle p_1(\nu_N) - p_1(\xi_N), N \rangle = p_1(N, \xi_N) - p'_1(N, \xi_N). \end{aligned}$$

De même, il vient rapidement

$$(p'_1 e)(M, \xi) = \langle p_1(\xi), e(\xi) \cap [M] \rangle = \langle p_1(\xi_N), [N] \rangle = p'_1(N, \xi_N).$$

La relation $p_1 \in 3\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{L}_4(k)$ impose la relation $(p_1 e + p'_1 e) \in 3\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{L}_{4+k}(k)$, et notamment pour $k = 2$ et $k = 4$.

Par conséquent, le réseau $\mathcal{L}_6(2)$ est engendré par $\mathbb{C}P(3)$ muni du fibré vectoriel canonique $\gamma_{\mathbb{C}P(3)}$ et le produit $\mathbb{C}P(2) \times \mathbb{C}P(1)$ muni du fibré vectoriel canonique $\gamma_{\mathbb{C}P(1)}$. La relation $(p_1 e + p'_1 e) \in 3\mathbb{Z}$ le détermine complètement comme sous-réseau du réseau entier.

Application 4.17 Il n'existe pas de variété fermée orientée de même cohomologie rationnelle que $\mathbb{C}P(3)$ et de classe de Pontryagin nulle qui puisse être munie d'un fibré vectoriel orienté de rang 2 dont le cube de la classe d'Euler corresponde à la classe fondamentale.

De même, le réseau $\mathcal{L}_8(4)$ est engendré par les 7 variétés munies de fibrés vectoriel de la fin de l'exemple 4.2. Il est complètement déterminé par les seules relations (hors relations d'intégralité) :

$$3p_1^2 + 4p_2 \in 45\mathbb{Z}, \quad p_1 e + p'_1 e \in 3\mathbb{Z}.$$

L'image de la variété $\mathbb{C}P(4)$ munie de la somme de Whitney $\gamma_{\mathbb{C}P(4)}^{\oplus 2}$ est reliée aux autres variétés de l'exemple 4.2 par l'équation suivante dans $\mathcal{L}_8(4)$:

$$\begin{aligned} [\gamma_{\mathbb{C}P(4)}^{\oplus 2}] &= 2[\gamma_{\mathbb{C}P(4)} \oplus \varepsilon_{\mathbb{C}P(4)}^2] - [\varepsilon_{\mathbb{C}P(4)}^4] + 2[\gamma_{\mathbb{C}P(1)} \times \gamma_{\mathbb{C}P(3)}] \\ &\quad - 2[\gamma_{\mathbb{C}P(2)} \times \varepsilon_{\mathbb{C}P(2)}^2] + [\gamma_{\mathbb{C}P(2)}^{\times 2}] + [\varepsilon_{\mathbb{C}P(2)}^4] - [\gamma_{\mathbb{C}P(1)}^{\times 2}]. \end{aligned}$$

4.3.2 Sphérisation

Nous pouvons définir une section « à un ordre 2 près » de l'auto-intersection par la méthode suivante :

Si M est une variété compacte orientée munie d'un fibré vectoriel orienté (lisse) ξ de rang k , nous notons $S\xi$ le fibré en sphères associé, qui est une variété compacte orientée. Notons $\pi: S\xi \rightarrow M$ la projection canonique.

Le fibré $\pi^*(\xi)$ sur $S\xi$ contient un sous-fibré trivial λ de rang 1, appelé fibré tautologique, défini comme suit. La fibre de λ au-dessus de tout point

$(x, v) \in S\xi$ est la droite engendrée par v dans la fibre de ξ au dessus de $x \in M$. Notons μ l'orthogonal du sous-fibré λ dans $\pi^*(\xi)$, orienté par la relation

$$\mu \oplus \lambda = \pi^*(\xi).$$

Définition 4.18 Nous appelons *sphérisation* de (M, ξ) la variété $S\xi$ munie du fibré μ , orthogonal du fibré tautologique.

Proposition 4.19 *Tous les nombres de Pontryagin mixtes d'une sphérisation sont nuls.*

Démonstration: Avec les notations ci-dessus, le fibré μ a mêmes classes de Pontryagin que $\mu \oplus \lambda \cong \pi^*(\xi)$, donc il définit les mêmes nombres de Pontryagin mixtes. Or le fibré $\pi^*(\xi)$ s'étend au cobordisme $D(\xi)$, donc $(S(\xi), \pi^*(\xi))$ est normalement cobordant au vide. En particulier, tous ses nombres de Pontryagin mixtes sont nuls. $\square$

Remarque : le fibré tangent de la variété $S\xi$ est donnée par la relation

$$\tau_{S\xi} = \pi^*(\tau_M) \oplus \mu.$$

Proposition 4.20 *La sphérisation induit un morphisme de groupe*

$$S: \mathcal{L}_m(k) \rightarrow \mathcal{L}_{m+k-1}(k-1).$$

Démonstration: La sphérisation d'un cobordisme est un cobordisme pour la sphérisation de son bord. L'opération de sphérisation est donc invariante par cobordisme normal et induit un morphisme de groupe

$$\Omega_m^{BSO \times BSO(k)} \rightarrow \Omega_{m+k-1}^{BSO \times BSO(k-1)}.$$

Par quotient de la torsion, ce morphisme induit le morphisme S . $\square$

L'intérêt de cette construction réside dans la proposition suivante :

Proposition 4.21 *Soit M une variété fermée orientée munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k .*

L'union disjointe $(M, \xi) \sqcup (M, -\xi)$ est une auto-intersection de la sphérisation de $(M, \xi \oplus \varepsilon^1)$.

Démonstration: Notons $\pi: S(\xi \oplus \varepsilon^1) \rightarrow M$ la projection canonique. Le sous-fibré de rang 1 $\pi^*(\varepsilon)$ définit une section lisse de $\pi^*(\xi \oplus \varepsilon)$ sur $S(\xi \oplus \varepsilon^1)$ par

$$s(x, (v, t)) = ((x, (v, t)), (0, 1)).$$

Notons λ le sous fibré tautologique de $\pi^*(\xi \oplus \text{varepsilonpsilon})$. La projection de s sur $E(\lambda^\perp)$ est une section lisse $\bar{s}$ satisfaisant l'équation

$$\bar{s}(x, (v, t)) = ((x, (v, t)), [(0, 1)]).$$

En particulier, si $t \neq 0$, alors $\bar{s}(x, (v, t)) = ((x, (v, t)), [(-\frac{v}{t}, 0)])$.

Montrons que la section $\bar{s}$ est transverse à la section nulle. L'intersection des deux sections est le sous-fibré en sphères $S\varepsilon^1 \subset S(\xi \oplus \varepsilon^1)$, isomorphe à au produit $M \times \{-1, 1\} \cong M_{-1} \sqcup M_{+1}$. Pour tout $(x, (0, j)) \in S\varepsilon$, avec $j \in \{-1, 1\}$, les applications induites entre les espaces tangents s'écrivent

$$T_{(x, (0, j))}i = (\text{Id}_{T_x M \oplus E_{(x, (0, i))}(\mu)}, 0): T_x M \oplus E_{(x, (0, 1))}(\mu) \oplus E_{(x, (0, 1))}(\mu);$$

$$T_{(x, (0, j))}\bar{s} = (\text{Id}_{T_x M}, \Delta_{E_{(x, (0, i))}(\mu)}): T_x M \oplus E_{(x, (0, 1))}(\mu) \oplus E_{(x, (0, 1))}(\mu).$$

Les sections sont donc clairement transverses.

L'orientation de chaque nouvelle copie de M est identique à l'orientation initiale de M par la relation

$$(\tau_{S(\xi \oplus \varepsilon)})|_{M_i} = \pi^*(M)|_{M_i} \oplus \mu|_{M_i}.$$

Enfin, par restriction à M_1 la relation $\lambda|_{M_1} \cong \varepsilon|_{M_1}$ permet d'écrire que $\mu|_{M_1} \cong \pi^*(\xi)|_{M_1}$, mais l'opposition d'orientation $\lambda|_{M_{-1}} \cong -\varepsilon|_{M_{-1}}$ entraîne l'opposition d'orientation $\mu|_{M_{-1}} \cong -\pi^*(\xi)|_{M_{-1}}$. $\square$

Corollaire 4.22 *Si $m = 4r$ et k n'est pas multiple de 4, alors le conoyau de l'auto-intersection $\mathcal{L}_{m+k}(k) \rightarrow \mathcal{L}_m(k)$ est d'ordre 2.*

Démonstration: Une variété fermée orientée de dimension m munie d'un fibré vectoriel orienté de rang k n'a pas de nombres d'Euler-Pontryagin sous les hypothèses du corollaire, donc le changement d'orientation de son fibré ne change pas ses nombres de Pontryagin généralisés. Le doublement de son image dans $\mathcal{L}_m(k)$ correspond à l'auto-intersection de sa sphérisation. $\square$

Chapitre 5

Plongement de Poincaré rationnel

Pour obtenir une version rationnelle du théorème de Browder-Casson-Sullivan-Wall, nous commençons par adapter la notion de plongement de Poincaré.

Dans tout le chapitre 5, nous considérons X et Y deux complexes de Poincaré rationnels simplement connexes de dimensions respectives m et $m + k$, avec $k \geq 3$.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue, et $p: A \rightarrow X$ une fibration sphérique rationnelle de rang k (définition 3.16). Rappelons que dans ce cas, A est aussi un complexe de Poincaré rationnel simplement connexe de dimension $(m + k - 1)$ (proposition 3.17).

5.1 Différentes approches

5.1.1 Formulation topologique

Nous introduisons la notion la notion de plongement de Poincaré rationnel, qui recouvre celle de plongement de Poincaré.

Définition 5.1 Nous dirons que l'application $f: X \rightarrow Y$ *s'insère dans un plongement de Poincaré rationnel* de frontière A s'il existe un espace sim-

plement connexe C et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ p \downarrow & \lrcorner \quad \downarrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (5.1)$$

qui soit une somme amalgamée dans laquelle

- l'application $i: A \rightarrow C$ détermine une paire de Poincaré rationnelle ;
- l'image d'une classe d'orientation de Y dans l'homologie de la paire $H_{m+k}(Y, X; \mathbb{Q}) \cong H_{m+k}(C, A; \mathbb{Q})$ constitue une classe d'orientation pour la paire (C, A) .

L'espace C est appelé le *complémentaire*.

Le plongement de Poincaré est dit *orienté* si A , X et Y le sont et si la classe d'orientation de Y est reliée à celle de A dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, c'est-à-dire par la composition

$$H_{m+k}(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{m+k}(Y, C; \mathbb{Q}) \cong H_{m+k}(X, A; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} H_{m+k-1}(A; \mathbb{Q}).$$

Remarquons que les hypothèses de simple connexité assurent que l'espace C est connexe par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, et même simplement connexe d'après le théorème de Van Kampen.

Proposition 5.2 *Supposons que l'application $f: X \rightarrow Y$ et la projection $p: A \rightarrow X$ s'inscrivent dans un diagramme commutatif de la forme (5.1) qui soit une somme amalgamée homotopique.*

Alors ce diagramme constitue un plongement de Poincaré rationnel si et seulement si $H_{\geq m+k}(C; \mathbb{Q}) = 0$.

Si tel est le cas, alors $H_{m+k-1}(C; \mathbb{Q}) = 0$.

Démonstration: Nous pouvons supposer sans perte de généralité que toutes les flèches du diagramme sont des cofibrations.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris en homologie rationnelle assure que $H_{> m+k}(C; \mathbb{Q}) = 0$.

En outre, toute classe d'orientation $y \in H_{m+k}(Y; \mathbb{Q})$ se réalise par un cycle de la forme $(f_{\#}\hat{a} + g_{\#}b)$, où $\hat{a} \in C_{m+k}(X; \mathbb{Q})$ et $b \in C_{m+k}(C; \mathbb{Q})$ définissent des cycles dans $H_{m+k}(X, A; \mathbb{Q})$ et $H_{m+k}(C, A; \mathbb{Q})$ respectivement.

Supposons $H_{m+k}(C; \mathbb{Q}) = 0$. Alors la classe $y \in H_{m+k}(Y; \mathbb{Q})$ est d'image non nulle $[b] \in H_{m+k}(Y, C; \mathbb{Q}) \cong H_{m+k}(X, A; \mathbb{Q})$. Donc la classe de b est constitue une classe d'orientation pour la paire (X, A) .

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^*(Y, C; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^*(Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C^*(C; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \cap b \\
& & C^*(X, A; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\cap(f_{\#}\hat{a}+g_{\#}b)} & \simeq & & C_{m+k-*}(C, A; \mathbb{Q}) \\
& & \downarrow \cap \hat{a} \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\
0 & \longrightarrow & C_{m+k-*}(X; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C_{m+k-*}(Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & C_{m+k-*}(Y, X; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

La commutativité du diagramme induit un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H^i(Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^i(C; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^{i+1}(X, A; \mathbb{Q}) & \longrightarrow \\
& \downarrow \cap y \cong & & \downarrow \cap [b] & & \downarrow \cap [\hat{a}] \cong & \\
\longrightarrow & H_{m+k-i}(Y; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_{m+k-i}(C, A; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_{m+k-i-1}(X; \mathbb{Q}) & \longrightarrow
\end{array}$$

Le lemme des cinq permet de conclure que le cap-produit avec $[b]$ définit bien un isomorphisme et assure la dualité de Poincaré rationnelle de la paire (C, A) .

Réciproquement, si (C, A) détermine une paire de Poincaré rationnelle de dimension $(m+k)$, alors $H_{m+k}(C; \mathbb{Q}) = 0$ par connexité de C et A .

En outre, l'isomorphisme $H_{m+k}(Y; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_{m+k-1}(A; \mathbb{Q})$ et la nullité de $H_{m+k-1}(Y; \mathbb{Q})$ assurent que $H_{m+k-1}(C; \mathbb{Q}) = 0$. $\square$

Remarque : si $f: X \rightarrow Y$ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière A , alors la rationalisation $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière A_0 , mais la réciproque n'est pas vraie en général.

5.1.2 Formulation algébrique

L'existence d'un plongement de Poincaré rationnel orienté dans lequel puisse s'inscrire l'application $f: X \rightarrow Y$ (à homotopie rationnelle près) se ramène à un problème algébrique que nous décrivons ci-dessous.

Notons $A_0 \xrightarrow{p_0} X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$ une rationalisation de la composée $A \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y$, telle que l'application p_0 soit une fibration sphérique rationnelle.

Notons $R \xrightarrow{\phi} Q \xrightarrow{\pi} S$ un modèle du diagramme $A_0 \xrightarrow{p_0} X_0 \xrightarrow{f_0} Y_0$ (définition 3.13) tel que π soit surjectif.

Nous notons enfin $\bar{s} \in Q$ une préimage selon π d'un cocycle $s \in S$ représentant la classe fondamentale de A_0 .

Théorème 5.3 *L'application f_0 s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel orienté de frontière A_0*

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \longrightarrow & C_0 \\ \downarrow & \text{\scriptsize $h \lrcorner$} & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & Y_0 \end{array} \quad (5.2)$$

si et seulement s'il existe une R -adgc de type fini simplement connexe T et un morphisme d'adgc $\iota: T \rightarrow S$ faisant commuter le diagramme suivant ;

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\iota} & T \\ \uparrow \pi & & \uparrow \\ Q & \xleftarrow{\phi} & R, \end{array}$$

tels que l'injection

$$\eta: R \rightarrow Q \times_S T \quad (5.3)$$

soit un quasi-isomorphisme identifiant la classe fondamentale de HR avec la classe de $(d\bar{s}, 0) \in Q \times_S T$

Démonstration: Supposons qu'il existe effectivement un plongement de Poincaré rationnel orienté comme sur le diagramme (5.2).

Le foncteur A_{PL} transforme ce diagramme en un produit fibré homotopique dans la catégorie des adgc

$$\begin{array}{ccc} A_{\text{PL}}(A_0) & \longleftarrow & A_{\text{PL}}(C_0) \\ \uparrow & \text{\scriptsize $h \lrcorner$} & \uparrow \\ A_{\text{PL}}(X_0) & \longleftarrow & A_{\text{PL}}(Y_0). \end{array} \quad (5.4)$$

Notons $\Lambda V \xrightarrow{\cong} A_{\text{PL}}(Y_0)$ un modèle de Sullivan (voir [11, § 12] pour une présentation détaillée de ces modèles). Il existe des extensions $\Lambda V \otimes \Lambda U \xrightarrow{\cong} A_{\text{PL}}(X_0)$, et $\Lambda V \otimes \Lambda W \xrightarrow{\cong} A_{\text{PL}}(C_0)$.

En notant $\Lambda(V \oplus U) \otimes \Lambda Z \xrightarrow{\cong} A_{\text{PL}}(A_0)$ le modèle de fibré en sphères (proposition 3.21), nous pouvons l'étendre sous la forme $\Lambda(V \oplus U \oplus Z) \otimes \Lambda(W \oplus \tilde{W})$

de manière à obtenir un diagramme commutatif d'adgc directement équivalent à (5.4) :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(V \oplus U) \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda(W \oplus \check{W}) & \longleftarrow & \Lambda(V \oplus W) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda(V \oplus U) & \longleftarrow & \Lambda V. \end{array} \quad (5.5)$$

Ce diagramme peut être simplifié en utilisant les modèles choisis au préalable, et donne lieu à un troisième diagramme commutatif équivalent :

$$\begin{array}{ccc} S & \longleftarrow & R \otimes \Lambda W \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & \longleftarrow & R. \end{array} \quad (5.6)$$

Ce diagramme est, comme le diagramme (5.4), un produit fibré homotopique, c'est-à-dire que le morphisme d'adgc induit $R \rightarrow Q \times_S T$ est un quasi-isomorphisme. La condition sur les classes fondamentales provient de la condition d'orientation du plongement de Poincaré rationnel.

Réciproquement, la réalisation géométrique du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S & \longleftarrow & T \\ \uparrow & & \uparrow \\ Q & \longleftarrow & R \end{array}$$

est une somme amalgamée homotopique d'espaces $\mathbb{Q}$ -locaux 1-connexes de la forme (5.2). D'après la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, la condition sur les classes fondamentales et la connexité de A , X et Y induisent que $H^{>m+k}(C_0; \mathbb{Q}) = 0$. La proposition 5.2 assure que le diagramme (5.2) ainsi construit est un plongement de Poincaré rationnel. $\square$

Remarquons que ce résultat est valable quel que soit le choix du modèle de la composée $A_0 \rightarrow X_0 \rightarrow Y_0$. Un choix de modèle bien adapté facilite les calculs et permet de répondre en temps raisonnable à la question de l'inscription dans un plongement de Poincaré rationnel orienté.

5.2 Exemples de réalisabilité

Nous utilisons la formulation algébrique pour montrer l'inscription d'une application dans un plongement de Poincaré rationnel dans deux cas simples, où nous supposons que la fibration sphérique rationnelle est triviale.

5.2.1 Cas d'une application formalisable

Rappelons qu'une application est formalisable si elle admet comme modélisation l'application induite en cohomologie (voir section 3.2.3).

Théorème 5.4 *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application entre deux complexes de Poincaré rationnels 1-connexes orientés de dimensions respectives m et $m+k$, avec $k \geq 3$. Supposons que les espaces X et Y sont formels et que l'application $f: X \rightarrow Y$ est formalisable.*

*Si $f^*f^! = 0$ alors la rationalisation $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière $X_0 \times S_0^{k-1}$.*

Démonstration: La composée $X_0 \times S_0^{k-1} \rightarrow X_0 \rightarrow Y_0$ est modélisée par la composée

$$H^*(Y; \mathbb{Q}) \xrightarrow{f^* \otimes 1} Q \xrightarrow{\pi} S$$

où $Q = H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes (H^*(S^{k-1}; \mathbb{Q}) \oplus s^{-1} \tilde{H}^*(S^{k-1}; \mathbb{Q}))$
et $S = H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^{k-1}; \mathbb{Q})$.

Notons $T = H^*(Y; \mathbb{Q}) \oplus_{f^!} s^{-k+1} H^*(X; \mathbb{Q})$ le $H^*(Y; \mathbb{Q})$ -dg module muni de la structure d'adgc semi-triviale, c'est-à-dire que les produits internes à $s^{-k+1} H^*(X; \mathbb{Q})$ sont nuls. Notons enfin $\psi: H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow T$ l'injection évidente et $\iota: T \rightarrow S$ la projection évidente.

Le morphisme d'adgc induit par f^* et ψ

$$H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow T \times_S Q$$

est clairement un quasi-isomorphisme par l'écriture

$$T \times_S Q = H^*(Y; \mathbb{Q}) \oplus_{f^!} (H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes (\tilde{H}^*(S^{k-1}; \mathbb{Q}) \oplus s^{-1} \tilde{H}^*(S^{k-1}; \mathbb{Q}))).$$

□

5.2.2 Dans une sphère d'homologie rationnelle

Théorème 5.5 *Soit X_0 un complexe de Poincaré rationnel 1-connexe $\mathbb{Q}$ -local de dimension m . Pour tout $k \geq 3$ l'application triviale $X_0 \rightarrow S_0^{m+k}$ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière $X_0 \times S_0^{k-1}$*

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times S_0^{k-1} & \longrightarrow & C_0 \\ \downarrow & \lrcorner \scriptstyle h & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & S_0^{m+k}. \end{array}$$

Démonstration: Notons $\bar{Q}$ un modèle de X_0 s'écrivant $\bar{Q} = \bar{Q}^{<m} \oplus \mathbb{Q}.\omega_{\bar{Q}}$ avec $|\omega_{\bar{Q}}| = m$.

Le fibration sphérique rationnelle $X_0 \times S_0^{k-1} \rightarrow X_0$ est modélisée par un morphisme surjectif d'adgc s'écrivant $S = \bar{Q} \oplus z.\bar{Q} \leftarrow Q = \bar{Q} \oplus z.\bar{Q} \oplus \hat{z}.\bar{Q}$, avec $|z| = k-1$, $dz = \hat{z}$ et $z^2 = z\hat{z} = \hat{z}^2 = 0$.

Notons $R = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\omega_R$, avec $|\omega_R| = m+k$, un modèle de la sphère rationnelle S_0^{m+k} , muni du morphisme d'adgc trivial $\phi: R \rightarrow Q$ défini par $\phi(\omega_R) = 0$.

Posons enfin $T = \mathbb{Q} \oplus z.\bar{Q}^{<m}$ et $\psi: R \rightarrow T$ le morphisme trivial.

Le produit fibré $T \times_S Q$ s'écrit $\mathbb{Q} \oplus z_{k-1}\bar{Q}^{<m} \oplus \hat{z}_k\bar{Q}$, et le morphisme d'adgc $R \rightarrow T \times_S Q$ induit par (ϕ, ψ) est clairement un quasi-isomorphisme.

□

5.2.3 Contre-exemple

Dans les deux énoncés précédents, l'hypothèse de trivialité de la fibration sphérique rationnelle est essentielle, comme en témoigne l'exemple suivant.

Considérons l'application triviale $f_0: \mathbb{H}P(3) \rightarrow S^{19}$. Les classes de Pontryagin du fibré normal putatif (définition 1.19) sont les classes de Pontryagin normales de $\mathbb{H}P(3)$, ce qui donne [27, Problem 20-A] :

$$P(f) = 1 - 4a + 4a^2 + 24a^3$$

où a est le générateur canonique de $H^*(\mathbb{H}P(3); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a_4]/a^4$. Notons $c: \mathbb{H}P(3)_0 \rightarrow BSO(7)_0$ l'application induite par les composantes de la classe $P(f) \in H^*(\mathbb{H}P(3); \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathbb{H}P(3)_0; \mathbb{Q})$.

Si f est homotope à une immersion de fibré normal ν , le fibré en sphères associé $S\nu \rightarrow \mathbb{H}P(3)$ admet pour rationalisation la fibration sphérique rationnelle associée à c .

Cependant, nous démontrons le résultat suivant :

Proposition 5.6 *L'application triviale $f_0: \mathbb{H}P(3)_0 \rightarrow S_0^{19}$ ne s'inscrit pas dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière $S(c)$.*

Démonstration: La fibration sphérique rationnelle $S(c) \rightarrow \mathbb{H}P(2)_0$ admet pour modélisation le morphisme surjectif d'adgc

$$S = (\Lambda(a_4, z_6)/(a^4, z^2 - 6a^3), 0) \xleftarrow{\phi} Q = (\Lambda(a_4, z_6, \hat{z}_7)/(a^4, z^4, z^3\hat{z}), dz = \hat{z}).$$

Supposons que f_0 s'inscrive dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière $S(c)$. Par traduction algébrique, il existe une adgc T munie d'un

morphisme $\iota: T \rightarrow S$ telle que le produit fibré $Q \times_S T$ soit 18-connexe en homologie.

En particulier, le cycle $(\hat{z}, 0)$ doit être un bord dans $Q \times_S T$ donc il existe un cycle $\bar{z} \in T^6$ telle que $\iota(\bar{z}) = z$. D'où $\iota(\bar{z}^2) = 6a^3$. Mais le cycle $(6a^3, \bar{z}^2)$ ne peut être un bord dans $Q \times_S T$ car $6a^3$ n'est pas un bord dans Q . Donc l'homologie d'un produit fibré $Q \times_S T$ ne peut être 12-connexe. $\square$

Une conséquence immédiate est que l'espace projectif $\mathbb{H}P(3)$ ne se plonge pas dans une sphère en codimension 7.

5.3 Utilisation de l'application de transfert

Soit X et Y deux complexes de Poincaré rationnels simplement connexes orientés de dimensions respectives m et $m + k$, avec $k \geq 3$.

Si $f: X \rightarrow Y$ est une application continue, les dualités de Poincaré définissent une application de transfert $f^!: H^{*-k}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Q})$ (définition 1.6).

Notons $p: A \rightarrow X$ une fibration sphérique rationnelle de rang k . D'après la proposition 3.17, l'inclusion de A dans le cylindre $\bar{X} = A \times I \cup_p X$ constitue une paire de Poincaré rationnelle du fait d'un isomorphisme de Thom rationnel

$$\Theta: H^{*-k}(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^*(\bar{X}, A; \mathbb{Q}).$$

Notons enfin $C(p)$ la cofibre homotopique de p .

5.3.1 Application de Thom-Pontryagin rationnelle

La proposition 1.15 qui relie l'application de transfert à l'application de Thom-Pontryagin s'étend au cas d'un plongement de Poincaré rationnel.

Proposition 5.7 *Si $f: X \rightarrow Y$ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière A , alors il existe une application $t: Y \rightarrow C(p)$ telle que*

$$t^* \circ \Theta = f^!: H^{*-k}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Q}).$$

Démonstration: Supposons que toutes les flèches du plongement de Poincaré rationnel sont des cofibrations. La cofibre homotopique $C(p)$ s'identifie à la cofibre de p . Notons $\pi: X \rightarrow C(p)$ l'application quotient.

Considérons le diagramme commutatif suivant, qui étend le plongement de Poincaré rationnel :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow \pi & & \downarrow t \\
 C(p) & \xrightarrow{\cong} & C(p)
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in H^*(X; \mathbb{Q})$, et $\beta \in C^*(C(p); \mathbb{Q})$ un cycle représentant de $\Theta[\alpha]$. Notons $\hat{a} \in C_{m+k}(X; \mathbb{Q})$ et $b \in C_{m+k}(C; \mathbb{Q})$ induisant des représentants des classes d'orientation des paires (X, A) et (C, A) , tels que $f_{\#}\hat{a} + g_{\#}b$ représente la classe d'orientation y de Y . L'isomorphisme de Thom $\Theta: H^{*-k}(X; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^*(C(p); \mathbb{Q})$ est défini par la relation

$$\pi^*(\Theta(\alpha)) \cap \hat{a} = \alpha \cap x.$$

Par conséquent, $t^{\#}(\beta) \cap (f_{\#}\hat{a} + g_{\#}b) = f_{\#}(f^{\#}t^{\#}(\beta) \cap \hat{a}) = f_{\#}(\pi^{\#}\beta \cap \hat{a})$ donc $t^*(\Theta\alpha \cap y) = f_*(\pi^*(\Theta\alpha \cap \hat{a})) = f_*(\alpha \cap x)$ i.e. $t^*\Theta(\alpha) = f^!(\alpha)$. $\square$

Corollaire 5.8 *Si $f: X \rightarrow Y$ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière A , alors la composée $f^*f^!$ correspond au cup-produit avec la classe d'Euler $e \in H^k(X; \mathbb{Q})$ de la fibration sphérique rationnelle.*

La démonstration est calquée sur celle du corollaire 1.16.

Nous aurions pu également proposer comme corollaire que la composée $f^! \circ \Theta^{-1}$ doit nécessairement induire un morphisme multiplicatif pour que f s'inscrive dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière A . Mais ce corollaire est plus faible que le précédent d'après la proposition suivante :

Proposition 5.9 *Si $f^*f^!$ est la multiplication par la classe d'Euler de la fibration sphérique rationnelle, alors $f^! \circ \Theta^{-1}$ induit un morphisme multiplicatif $H^*(C(p); \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Q})$.*

Démonstration: Ce résultat découle des relations :

$$f^!\Theta^{-1}(\Theta(a) \cup \Theta(b)) = f^!(a \cup e \cup b) = f^!(f^*f^!(a) \cup b) = f^!(a) \cup f^!(b).$$

$\square$

5.3.2 Cas d'une fibration sphérique rationnelle triviale

Si la fibration sphérique rationnelle $A \rightarrow X$ est triviale, la cofibre $C(p)$ est rationnellement équivalente à un bouquet de sphères d'après le théorème 3.18. Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 5.10 *Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre complexes de Poincaré rationnels et $A \rightarrow X$ une fibration sphérique rationnelle triviale.*

Supposons que f s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière A . Si la composée $\text{hur}^ \circ f^!: H^{*+1-k}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow \text{hom}(\pi_*(\Omega Y), \mathbb{Q})$ a deux images linéairement indépendantes, alors $\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbb{Q}$ contient une sous-algèbre de Lie graduée libre à deux générateurs.*

Démonstration: Supposons que f s'inscrit dans un plongement de Poincaré et appliquons la proposition 1.15. Par hypothèse, l'algèbre de Lie graduée $\pi_*(\Omega C(p)) \otimes \mathbb{Q}$ est libre, engendrée par l'homologie rationnelle réduite de $C(p)$ [11, Theorem 24.5]. Si la composée $\text{hur}^* \circ f^!$ a deux images linéairement indépendantes, il y a deux éléments de $\pi_*(\Omega V) \otimes \mathbb{Q}$ dont les images dans $\pi_*(\Omega C(p)) \otimes \mathbb{Q}$ engendrent une sous-algèbre de Lie graduée libre. Donc ces deux éléments engendrent déjà dans $\pi_*(\Omega Y) \otimes \mathbb{Q}$ une sous-algèbre de Lie graduée libre. $\square$

Ce théorème a une formulation proche de celle du théorème de S. Papadima rappelé en 1.22, mais les hypothèses diffèrent quelque peu : nous nous limitons au cas où les classes définissant la structure rationnelle du fibré normal en sphères sont nulles. En revanche nous considérons l'ensemble des images de l'application de transfert en cohomologie, et non pas seulement celles engendrées par les classes de Pontryagin du fibré normal.

Nous en déduisons une obstruction au plongement dans une variété V elliptique, c'est-à-dire telle que le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\pi_*(V) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie.

Corollaire 5.11 *Soit $f: M \rightarrow V$ une application continue entre variétés fermées simplement connexes orientées en codimension k . Supposons que V est elliptique.*

Supposons que k est pair et $f^ f^!(1) = 0$, ou k est impair et $p_{\frac{k-1}{2}}(f) = 0$.*

Si l'image de la composée

$$\text{hur}^* f^!: H^{*-k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \text{hom}(\pi_*(V), \mathbb{Q})$$

est de dimension au moins deux alors f ne peut être rationnellement équivalente à un plongement.

5.4 Quelques obstructions

Nous donnons à présent plusieurs propriétés des plongements de Poincaré rationnels. Ces propriétés peuvent dans un cadre plus général fournir des obstructions à l'inscription d'une application dans un plongement de Poincaré rationnel. *A fortiori* les obstructions ainsi définies peuvent démontrer l'absence de plongement rationnellement équivalent à une application donnée entre variétés.

5.4.1 Cohomologie du complémentaire

Si $\tilde{f}: M \rightarrow V$ est un plongement entre variétés fermées, l'algèbre de cohomologie du complémentaire C ne dépend pas seulement de la classe d'homotopie de $\tilde{f}$ en général [23, Proposition 9.3]. Cependant, l'inclusion $j: C \hookrightarrow V$ définit un morphisme d'algèbre $j^*: H^*(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(C; \mathbb{Q})$ et par conséquent une structure de $H^*(V; \mathbb{Q})$ -module sur $H^*(C; \mathbb{Q})$, qui, elle, ne dépend que de la classe d'équivalence rationnelle de f [23].

Nous rappelons ce résultat en le reformulant dans le cadre des plongements de Poincaré rationnels, puis nous en déduisons une obstruction au plongement. En effet, lorsque la structure de module, qui est définie pour n'importe quelle application continue $f: M \rightarrow V$, ne peut provenir d'une flèche d'algèbre, elle ne peut correspondre à la cohomologie d'un complémentaire. Une telle situation se produit notamment lorsqu'un élément de $H^*(V; \mathbb{Q})$ d'image nulle dans le module agit non-trivialement sur lui. C'est le cas dans l'exemple 5.15.

Si V^* est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué, nous notons $\#V = \text{hom}(V; \mathbb{Q})$ l'espace dual et sV^* la suspension définie par $(sV)^i = V^{i+1}$.

Théorème 5.12 *Soit X et Y deux complexes de Poincaré rationnels simplement connexes orientés de dimensions respectives m et $m+k$, avec $k \geq 3$. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue.*

Supposons que f s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de complémentaire C . Notons $Q \xleftarrow{\phi} R$ une modélisation algébrique de f .

La structure de $H^(Y; \mathbb{Q})$ -module de $H^*(C; \mathbb{Q})$ induite par l'application $C \rightarrow Y$ est isomorphe à l'homologie du cône algébrique $s^{-k}H(\#R \oplus_{\# \phi} \#Q)$ muni de l'action évidente de $HR \cong H^*(Y; \mathbb{Q})$.*

Démonstration: Le cap-produit avec la classe d'orientation de Y induit un isomorphisme de $H^*(Y; \mathbb{Q})$ -modules entre $H^*(C; \mathbb{Q})$ et $s^{-m-k}H_*(Y, X; \mathbb{Q})$.

Or l'homologie de la paire (Y, X) est isomorphe à l'homologie du cône algébrique $H(C_*(Y; \mathbb{Q}) \oplus_{f\#} C_*(X; \mathbb{Q}))$.

Le théorème découle du remplacement de l'action de l'algèbre des co-chaînes $C^*(Y; \mathbb{Q})$ sur $C_*(Y; \mathbb{Q})$ et $C_*(X; \mathbb{Q})$ par l'action de R sur $\#R$ et $\#Q$. $\square$

Corollaire 5.13 *La cohomologie du complémentaire s'inscrit dans une suite exacte courte de $H^*(Y; \mathbb{Q})$ -modules*

$$0 \rightarrow s^{-m-k} \text{Coker } f_* \rightarrow H^*(C; \mathbb{Q}) \rightarrow s^{-m-k+1} \text{Ker } f_* \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

Proposition 5.14 *Supposons que l'application f est formalisable, c'est-à-dire qu'elle est modélisée par $f^*: H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$.*

Si f s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de complémentaire C , alors l'extension 5.7 est triviale, c'est-à-dire que $H^(C; \mathbb{Q})$ est isomorphe comme $H^*(Y; \mathbb{Q})$ -module à $s^{-m-k} H(H_*(Y; \mathbb{Q}) \oplus_{f_*} sH_*(X; \mathbb{Q})) = s^{-m-k} (\text{Coker } f_* \oplus s\text{Ker } f_*)$.*

Cette extension n'est pas toujours triviale, comme en témoigne l'exemple suivant :

Exemple 5.15 Notons $h: S^3 \rightarrow S^2$ l'application de Hopf (lisse) modélisée par le morphisme d'adgc $(\Lambda(b_3), 0) \leftarrow (\Lambda(a_2, b_3)/(a^3, ab), db = a^2)$. Notons également $i: S^3 \hookrightarrow S^n$, avec $n \geq 4$, l'injection d'un sous-équateur modélisée par $(\Lambda(b_3), 0) \leftarrow (\Lambda(c_n)/c^2, 0)$.

L'application $f = (h, i): S^3 \hookrightarrow S^2 \times S^n$ est un plongement modélisé par le morphisme d'adgc

$$Q = (\Lambda(b_3), 0) \xleftarrow{\phi} R = (\Lambda(a_2, b_3, c_n)/(a^3, ab, c^2), db = a^2).$$

Une base de R est donnée par $(1, a, b, a^2, c, ac, bc, a^2c)$ et nous notons $(\#1, \#a, \#b, \#a^2, \#c, \#ac, \#bc, \#a^2c)$ la base duale.

Le HR -module $H(\#R \oplus_{\# \phi} s\#Q)$ admet comme base la famille des classes $([\#a], [\#a^2 - s\#b], [\#c], [\#ac])$ avec l'action non-triviale

$$[a].[\#a^2 - s\#b] = [\#a].$$

5.4.2 Cup-produit fonctionnel

La formulation algébrique du plongement de Poincaré rationnel va nous permettre d'énoncer une nouvelle obstruction utilisant le cup-produit fonctionnel.

Définition 5.16 Soit $\phi: A \rightarrow B$ un morphisme d'adgc et $\bar{e}$ un cycle de A .
Le *cup-produit fonctionnel* est un morphisme de HA -modules

$$\cup_\phi [\bar{e}]: s^{-k+1} \text{Ker} H\phi \cap \text{Ann}([\bar{e}]) \rightarrow \text{Coker} H\phi / ([\phi(\bar{e})])$$

défini pour tout cocycle $a \in A$ tel que $\phi(a) = db$ et $a\bar{e} = dc$ par

$$[a] \cup_\phi [\bar{e}] = [b\phi(\bar{e}) - \phi(c)].$$

Cette opération ne dépend que de la classe d'équivalence de l'application ϕ . Elle peut donc être définie pour une application topologique φ en l'absence d'un choix de modélisation algébrique. Nous pouvons alors énoncer notre obstruction :

Théorème 5.17 Soit X et Y deux complexes de Poincaré rationnels simplement connexes orientés de dimensions respectives m et $m+k$, avec $k \geq 3$. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue qui s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel. Le cup-produit fonctionnel avec $f^!(1)$ est nul.

Démonstration: Notons $A \rightarrow X$ la fibration sphérique rationnelle du plongement de Poincaré rationnel. Le diagramme $A \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ est modélisé par un diagramme d'adgc de la forme

$$S \xleftarrow{\pi} Q \xleftarrow{\phi} R$$

où $S = (\bar{Q} \otimes \Lambda Z, d_S)$ et $Q = (\bar{Q} \otimes \Lambda(Z \oplus \hat{Z}), d_Q)$ avec $\bar{Q} = \bar{Q}^{\leq m} \xrightarrow{\sim} Q$ et $\Lambda Z \leftarrow \Lambda(Z \oplus \hat{Z})$ est une modélisation de l'inclusion $S^{k-1} \hookrightarrow D^k$.

L'application π est surjective.

Notons $\bar{e} \in R^k$ un cocycle représentant $\phi^!(1) \in H^k R$, et $e = \phi(\bar{e})$. Le modèle S est construit à partir du modèle $\bar{Q}$ à l'aide de $z \in Z$ tel que $d_S(z) = e$.

Considérons un produit fibré homotopique modélisant le plongement de Poincaré dans lequel s'inscrit f :

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\iota} & T \\ \uparrow \pi & & \uparrow \\ Q & \xleftarrow{\phi} & R \end{array}$$

Dans l'adgc Q , la relation $d_Q(z) = e - \hat{z}$ définit $[\hat{z}]$ comme la classe de Thom de la fibration sphérique rationnelle $A \rightarrow X$ dans $H^k(X, A; \mathbb{Q}) = H\text{Ker}(\pi)$.

Donc en notant ω_Q un cocycle représentant la classe fondamentale de X , le produit $\omega_Q \hat{z}$ représente la classe fondamentale de la paire $(A \times I \cup X, A)$.

Par conséquent, le couple $(\hat{z}, 0)$ est un cycle de $Q \times_S T$ qui satisfait l'équivalence

$$[r] \cdot [(\hat{z}, 0)] = [\omega_R] \in HR \iff [\phi(r)] = [\omega_Q] \in HQ.$$

Autrement dit, $[(\hat{z}, 0)] = f^!(1)$ donc il existe $(u, w) \in Q \times_S T$ tel que

$$(e - \hat{z}, \psi(\bar{e})) = d(u, w).$$

Soit a un cocycle de R tel que $\phi(a) = dq$ et $a\bar{e} = dc$. Alors

$$qe - \phi(c) = q(du + \hat{z}) - \phi(c) = (-1)^{|q|}(d(qu) - \phi(a)u) + q\hat{z} - \phi(c).$$

Or $((-1)^{|a|}\phi(a)u + q\hat{z} - \phi(c), (-1)^{|a|}\psi(a)w - \psi(c))$ est un cycle de $Q \times_S T$, donc il existe un cycle de $r \in R$ tel que

$$[\phi(r)] = [(-1)^{|a|}\phi(a)u - q\hat{z} - \phi(c)] = [qe - \phi(c)] \in HQ.$$

□

Corollaire 5.18 *Soit $f: M \rightarrow V$ une application continue entre variétés fermées simplement connexes en codimension $k \geq 3$.*

Si le cup-produit fonctionnel

$$\cup_f f^!(1): H^{*-k+1}(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$$

est non-nul, alors l'application f n'est pas rationnellement équivalente à un plongement.

Exemple 5.19 Notons $[S^2, S^6]: S^7 \rightarrow S^2 \vee S^6$ le produit de Whitehead usuel, modélisée par le morphisme d'adgc

$$(\Lambda(c_7), 0) \leftarrow (\Lambda(a_2, b_6, c_7)/(a^2, b^2, ac, bc), dc = ab).$$

Le pincement définit une application

$$S^2 \times S^7 \# S^3 \times S^6 \rightarrow S^2 \times S^7 \vee S^3 \times S^6 \vee S^9$$

que nous composons avec la projection

$$S^2 \times S^7 \vee S^3 \times S^6 \vee S^9 \rightarrow S^7 \vee S^6 \vee S^9$$

puis avec l'opération

$$S^7 \vee S^6 \vee S^9 \xrightarrow{[S^2, S^6] \vee \text{Id}_{S^6 \vee S^9}} S^2 \vee S^6 \vee S^9$$

et enfin avec l'injection évidente

$$S^2 \vee S^6 \vee S^9 \rightarrow S^2 \times S^{13} \# S^6 \times S^9.$$

Nous proposons une modélisation de l'application composée

$$f: S^2 \times S^7 \# S^3 \times S^6 \rightarrow S^2 \times S^{13} \# S^6 \times S^9.$$

Posons $Q = \Lambda(u_2, v_3, v_6^*, u^*7)/(u^2, (v^*)^2, uv, uv^*, vu^*, v^*u^*, uu^* - vv^*)$, muni de la différentielle nulle, qui modélise l'espace $S^2 \times S^7 \# S^3 \times S^6$. Posons $R = \Lambda(a_2, b_6, c_7, b_9^*, a_{13}^*)/(a^2, b^2, ac, bc, ab^*, ba^*, ca^*, cb^*, b^*a^*, aa^* - bb^*)$ munie de la différentielle d telle que $d(c = ab)$ et $da = db = db^* = da^* = 0$, qui modélise l'espace $S^2 \times S^{13} \# S^6 \times S^9$.

L'application f est modélisée par le morphisme d'adgc $\phi: R \rightarrow Q$ défini par $\phi(a) = \phi(a^*) = 0$, $\phi(b) = v^*$, $\phi(c) = u^*$ et $\phi(b^*) = uu^*$. Les cycles $\bar{e} \in R$ et $e \in Q$ peuvent être respectivement représentés par b et v^* .

Le cup-produit fonctionnel appliqué en a s'écrit alors

$$a \cup_\phi \phi^!(1) = [0 \cdot \phi(b) - \phi(c)] = [-u^*] \neq 0 \in \text{Coker } H\phi.$$

Par conséquent, l'application f ne peut s'inscrire dans un plongement de Poincaré rationnel. *A fortiori*, elle ne peut être rationnellement équivalente à un plongement.

Chapitre 6

Lissage de structures rationnelles

Nous utilisons à présent les outils développés dans les chapitres précédents pour exprimer les obstructions rationnelles au plongement et, lorsque celles-ci sont nulles, construire un plongement lisses entre variétés fermées dans une classe d'équivalence rationnelle d'application.

6.1 Résultats principaux

6.1.1 Théorèmes de réalisation géométrique

La première obstruction au plongement dans une classe d'équivalence rationnelle d'application est la réalisabilité d'un fibré vectoriel sur la variété source dont les classes caractéristiques rationnelles sont celles du fibré normal putatif (définition 1.19).

Nous démontrons en section 6.2 le théorème suivant, qui explicite les conditions pour obtenir un fibré vectoriel de classes caractéristiques fixées sur une variété avec des invariants rationnels donnés. Rappelons qu'une structure normale rationnelle sur un complexe de Poincaré orienté 1-connexe $\mathbb{Q}$ -local X_0 est la donnée d'une classe $P_{X_0} = 1 + \sum_{i \geq 1} p_i(X_0) \in H^*(X_0; \mathbb{Q})$, équivalente à la donnée d'une application $X_0 \rightarrow BSO_0$. La structure normale rationnelle est dite réalisable s'il existe une variété fermée orientée simplement connexe M munie d'une rationalisation $l_M: M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X_0$ qui identifie les classes d'orientations et telle que $l_M^*(P_X)$ soit la classe totale de Pontryagin du fibré normal stable de M .

Théorème 6.1 *Soit X un complexe de Poincaré orienté 1-connexe $\mathbb{Q}$ -local de dimension m muni d'une structure normale rationnelle réalisable induite par $b: X \rightarrow BSO$.*

Soit $c: X \rightarrow BSO(k)_0$ une application continue. Supposons que $m \geq 5$ et posons $g = (b, c): X \rightarrow BSO \times BSO(k)$.

Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. *Il existe une variété M qui réalise la structure normale rationnelle de X et est munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k qui fasse commuter le diagramme à homotopie près*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{c_\xi} & BSO(k) \\ l_M \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{c} & BSO(k)_0. \end{array} \quad (6.1)$$

2. *L'image par g_* de la classe d'orientation $x \in H_m(X; \mathbb{Q})$ appartient au réseau $\mathcal{L}_m(k) \subset H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$ des nombres de Pontryagin généralisés réalisables.*

Nous pouvons alors exprimer un théorème de réalisation de plongement (démonstration en section 6.3) dans le cas où il existe un fibré vectoriel sur la variété source dont les classes de Pontryagin correspondent à celles du fibré normal putatif.

Théorème 6.2 *Soit M et V deux variétés fermées orientées simplement connexes de dimensions respectives m et $m+k$ avec $m \geq 5$ et $k \geq 3$. Notons $l_M: M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} M_0$ et $l_V: V \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} V_0$ des rationalisations de M et V .*

Soit ξ un fibré vectoriel orienté de rang k sur M et $\varphi: M_0 \rightarrow V_0$ une application continue telle que les classes de Pontryagin normales satisfont la relation dans $H^(M; \mathbb{Q})$*

$$P(\nu_M) = P(\xi) \cdot l_M^* \varphi^* (l_V^*)^{-1} P(\nu_V). \quad (6.2)$$

Si l'application φ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel de frontière $(S\xi)_0$ alors il existe une variété lisse fermée orientée simplement connexe $\tilde{V}$ rationnellement équivalente à V et un plongement $\tilde{f}: M \hookrightarrow \tilde{V}$ de fibré normal ξ qui s'inscrit dans un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V} \\ l_M \downarrow \simeq_{\mathbb{Q}} & & l_V \downarrow \simeq_{\mathbb{Q}} \\ M_0 & \xrightarrow{f_0} & V_0 \end{array} \quad (6.3)$$

où les rationalisations l_V et $l_{\tilde{V}}$ identifient les classes d'orientation et les classes de Pontryagin des fibrés normaux stables de V et $\tilde{V}$.

Remarque : le théorème A de l'introduction est un cas particulier du théorème 6.2 dans lequel l'application φ est une rationalisation d'une application $f: M \rightarrow V$.

6.1.2 Applications

L'existence d'un fibré ξ sur M satisfaisant l'équation (6.2) du théorème est vérifiée dès que f est homotope à une immersion. Le théorème 5.5 d'existence du plongement de Poincaré dans une sphère d'homotopie rationnelle permet de montrer :

Corollaire 6.3 *Soit M une variété fermée orientée simplement connexe de dimension $m \geq 5$. Supposons qu'il existe une immersion de M dans une sphère d'homotopie rationnelle simplement connexe en codimension $(k-1)$, de fibré normal ν . Si k est impair, supposons aussi que $p_{\frac{k-1}{2}}(\nu_M) = 0$.*

Alors M se plonge dans une sphère d'homotopie rationnelle simplement connexe en codimension k de fibré normal $\nu \oplus \varepsilon^1$.

Démonstration: Notons $\varphi: M_0 \rightarrow S_0^{m+k+1}$ une application constante.

Le fibré $\xi = \nu \oplus \varepsilon^1$ a les mêmes classes de Pontryagin que ν donc il satisfait l'équation 6.2 et vérifie $p_i(\xi) = 0$ pour $i > \frac{k-1}{2}$. En outre, $e(\xi) = 0$ et par hypothèse, $p_i(\xi) = 0$ si $i = \frac{k-1}{2}$, donc la fibration sphérique rationnelle $(S\xi)_0 \rightarrow M_0$ est rationnellement triviale. Le théorème 5.5 exhibe un plongement de Poincaré rationnel dans lequel s'inscrit φ , et le théorème 6.2 s'applique. $\square$

Dans le rang métastable, la condition sur la classe de Pontryagin est automatiquement vérifiée. La conjecture des immersions (voir l'article de R. Cohen [8]) affirme que toute variété compacte de dimension m s'immerge dans la sphère $S^{2m-\alpha(m)}$, donc en rang métastable dès que $m \geq 5$. Combinée au corollaire 6.3, elle conforte la conjecture de Gitler en impliquant que toute variété fermée orientée simplement connexe de dimension $m \geq 5$ se plonge dans une sphère d'homotopie rationnelle simplement connexe en codimension $(m - \alpha(m) + 1)$.

D'autres hypothèses permettent de vérifier l'existence du fibré ξ et la condition sur le réseau d'Euler-Pontryagin. C'est le cas notamment si les classes caractéristiques du fibré normal putatif sont nulles.

Corollaire 6.4 *Toute variété fermée simplement connexe dont les classes de Pontryagin normales rationnelles sont nulles se plonge dans une sphère d'homotopie rationnelle en codimension 3.*

En particulier, c'est le cas de toute variété fermée simplement connexe parallélisable.

Démonstration: Il suffit de choisir pour ξ le fibré trivial sur M . L'existence du plongement de Poincaré rationnel est assurée par le théorème 5.5. $\square$

6.1.3 Théorème de réalisabilité rationnelle du plongement

La combinaison des théorèmes 6.1 et 6.2 donne une série d'obstructions rationnelles qui constituent des conditions nécessaires et suffisantes à la réalisation à homotopie rationnelle près d'un plongement de Poincaré rationnel par un plongement lisse entre variétés fermées orientées simplement connexes. Nous pouvons les résumer par le théorème suivant, qui ramène la réalisabilité du plongement à un problème algébrique.

Définition 6.5 Soit X_0 et Y_0 deux complexes de Poincaré rationnels orientés 1-connexes $\mathbb{Q}$ -locaux de dimensions respectives m et $m+k$, munis de structures normales rationnelles.

Nous dirons qu'une application $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ est *réalisable par un plongement* si et seulement s'il existe des réalisations de leurs structures normales rationnelles $l_M: M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X_0$ et $l_V: V \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} Y_0$ et un plongement $f: M \hookrightarrow V$ tel que le diagramme ci-dessous commute à homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & V \\ l_M \downarrow \simeq_{\mathbb{Q}} & & l_V \downarrow \simeq_{\mathbb{Q}} \\ X_0 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

Si m est pair, l'image de la rationalisation $\Omega_m^{BSO \times BSO(k)} \rightarrow H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q})$ est un réseau $\mathcal{L}_m(k)$, correspondant aux nombres de Pontryagin généralisés de variétés lisses fermées de dimension m munies d'un fibré vectoriel orienté de rang k .

Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est une application continue entre complexes de Poincaré rationnels orientés, de codimension k , l'application $\varphi^!: H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{*+k}(Y; \mathbb{Q})$ est l'application de transfert en cohomologie définie en 1.6.

Théorème 6.6 *Soit X_0 et Y_0 deux complexes de Poincaré rationnels orientés 1-connexes $\mathbb{Q}$ -locaux de dimensions respectives m et $m + k$, munis de structures normales rationnelles P_X et P_Y induites par $b_X: X_0 \rightarrow BSO_0$ et $b_Y: Y_0 \rightarrow BSO_0$.*

Soit $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$. Supposons que $k \geq 3$ et $m \geq 5$.

L'application φ est réalisable par un plongement si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *les structures normales rationnelles sur X_0 et Y_0 sont réalisables.*
2. *les classes $P_\varphi = P_X \cdot \varphi^*(P_Y)^{-1} \in H^*(X_0; \mathbb{Q})$ et $e_\varphi = \varphi^* \varphi^!(1) \in H^k(X_0; \mathbb{Q})$ sont induites par une application $c: X_0 \rightarrow BSO(k)_0$, c'est-à-dire que :*
 - *la classe P_φ s'écrit sous la forme $1 + \sum_{1 \leq i \leq \frac{k}{2}} p_i(\varphi)$ avec $|p_i(\varphi)| = 4i$,*
 - *si k est impair alors $e_\varphi = 0$, et si k est pair alors $e_\varphi^2 = p_{k/2}(\varphi)$;*
3. *si m est multiple de 4, ou si m est pair et $m - k$ est multiple de 4, alors l'image de la classe d'orientation de X_0 par l'application $(b_X, c): X_0 \rightarrow BSO \times BSO(k)$ en homologie rationnelle appartient au réseau d'Euler-Pontryagin $\mathcal{L}_m(k)$;*
4. *l'application φ s'inscrit dans un plongement de Poincaré rationnel orienté de frontière $S(c)$.*

Démonstration: Supposons que l'application $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ soit effectivement réalisable par un plongement $f: M \hookrightarrow V$. Notons ξ le fibré normal du plongement, qui est un fibré vectoriel de rang k sur M , et $W = V - D\xi$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $f(M) \subset V$. L'application f s'inscrit alors dans un plongement de Poincaré

$$\begin{array}{ccc} S\xi & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ D\xi & \longrightarrow & V. \end{array} \quad (6.4)$$

D'après les propositions 1.13 et 1.18, le fibré ξ admet P_φ pour classe totale de Pontryagin et e_φ pour classe d'Euler, ce qui satisfait la condition 2. Le théorème 6.1 permet de vérifier la condition 3, et par la proposition 3.20, la rationalisation de la projection $S\xi \rightarrow M$ est le fibré en sphères rationnel $S(c) \rightarrow X_0$, donc la rationalisation du plongement de Poincaré (6.4) remplit la condition 4.

Réciproquement, si les conditions 2 et 3 sont satisfaites, alors d'après le théorème 6.1 il existe une variété lisse fermée orientée simplement connexe M

qui réalise la structure normale rationnelle de X_0 et munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k tel que $P(\xi) = P_\varphi$ et $e(\xi) = e_\varphi$. En outre, la fibration sphérique rationnelle $S(b) \rightarrow X_0$ est une rationalisation de $S\xi \rightarrow M$, de même classe d'orientation. Le théorème 6.2 permet de conclure. $\square$

Les exemples de réalisabilité de plongement de Poincaré rationnels de la section 5.2 impliquent les corollaires suivants :

Corollaire 6.7 *Soit M une variété fermée simplement connexe orientée dont les classes de Pontryagin du fibré normal stable ont pour degré maximal $2k > 0$.*

Si $\dim(M)$ n'est pas un multiple de 4, alors il existe une variété fermée simplement connexe orientée M' de même structure rationnelle qui se plonge dans une sphère d'homotopie rationnelle en codimension $k + 2$.

Démonstration: Puisque $\dim(M)$ n'est pas multiple de 4, il n'y a pas de nombres de Pontryagin mixtes. En outre, la classe d'Euler putative est nulle aussi donc les nombres d'Euler-Pontryagin sont nuls. La fibration sphérique rationnelle induite est triviale donc d'après le théorème 5.5, il existe un plongement de Poincaré rationnel qui permet d'appliquer le théorème 6.6. $\square$

Corollaire 6.8 *Soit M et V deux variétés fermées simplement connexes en codimension $k \geq 3$. Soit $\Phi: H^*(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$ un morphisme d'algèbre.*

Supposons que $\Phi\Phi^! = 0$ et que $P(\Phi) \in H^{<2k-2}(M; \mathbb{Q})$. Supposons enfin que $\dim(M)$ ne soit pas un multiple de 4.

Alors il existe des variétés fermées simplement connexes $\widetilde{M}$ et $\widetilde{V}$ rationnellement homologues à M et V avec mêmes classes de Pontryagin et classe d'orientation, munies d'un plongement lisse $\tilde{f}: \widetilde{M} \hookrightarrow \widetilde{V}$ induisant Φ en cohomologie comme sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} H^*(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & H^*(\widetilde{V}; \mathbb{Q}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^*(M; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\Phi} & H^*(V; \mathbb{Q}). \end{array}$$

Démonstration: Notons X_0 et Y_0 les complexes de Poincaré rationnels $\mathbb{Q}$ -locaux *formels* correspondant aux cohomologies respectives de M et V . Les classes caractéristiques du fibré normal putatif satisfont les conditions du théorème 6.6. La condition sur le réseau est validée car $\dim(M)$ n'est pas multiple de 4 et la classe d'Euler putative est nulle. Le théorème 5.4 permet de construire un plongement de Poincaré rationnel dans lequel s'inscrit l'application formalisable définie par Φ . $\square$

6.2 Réalisation d'un fibré vectoriel sur une variété

Nous montrons que les obstructions rationnelles à la réalisation d'un fibré vectoriel de classes caractéristiques sur une variété ne dépend que de l'appartenance des nombres de Pontryagin généralisés au réseau d'Euler-Pontryagin défini au chapitre 4.

6.2.1 Théorème de chirurgie rationnelle

Définition 6.9 Soit (X, A) une paire de Poincaré rationnelle, munie d'une classe d'orientation $x \in H_n(X, A; \mathbb{Q})$ et d'un fibré vectoriel stable ν .

Nous appelons *application normale rationnelle* toute application de paire $g: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$, où M est une variété compacte lisse orientée de dimension n et de fibré normal stable ν_M , telle que la restriction $\partial g: \partial M \rightarrow A$ soit une équivalence rationnelle et $g_*([M]) = x$.

Remarque : lorsque $A = \emptyset$, les applications normales rationnelles sont simplement les représentants des classes de $\Omega_m^X(x)$.

Théorème 6.10 (chirurgie rationnelle) [3, Théorème 4] Soit (X, A) une paire de Poincaré rationnelle simplement connexe orientée par la classe $x \in H_n(X, A; \mathbb{Q})$ et munie d'un fibré vectoriel stable ν . Soit $g: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ une application normale rationnelle.

Supposons que $n \geq 5$.

Il y a équivalence entre les propositions :

1. n n'est pas un multiple de 4 ou $\tau(M) = \tau(X, A, x)$;
2. il existe une variété lisse compacte orientée simplement connexe $\widetilde{M}$ de bord ∂M et une équivalence d'homotopie rationnelle fibrée $\tilde{g}: \widetilde{M} \rightarrow X$ normalement cobordante à g relativement au bord ∂g .

Corollaire 6.11 Soit X un complexe de Poincaré rationnel orienté de dimension n muni d'un fibré vectoriel stable ν . Notons x sa classe d'orientation.

Supposons que la structure rationnelle normale induite sur la rationalisation X_0 soit réalisable. Alors toute classe de cobordisme de $\Omega_n^X(x)$ contient une équivalence rationnelle.

Démonstration: Si m n'est pas un multiple de 4, la conclusion découle directement du théorème 6.10.

Supposons maintenant que m est un multiple de 4. Notons M une variété qui réalise la structure rationnelle sur X_0 et $\bar{X}$ l'espace défini par le produit fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \longrightarrow & BSO \\ l_{\bar{X}} \downarrow & \Gamma_h & \downarrow l_{BSO} \\ X_0 & \longrightarrow & BSO_0. \end{array}$$

Notons $\bar{x}$ la classe d'orientation du complexe de Poincaré rationnel $\bar{X}$ induite par les isomorphismes canoniques $H_n(X; \mathbb{Q}) \cong H_n(X_0; \mathbb{Q}) \cong H_n(\bar{X}; \mathbb{Q})$.

Par propriété universelle du produit fibré homotopique, la rationalisation $M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} X_0$ se relève en une application fibrée $g: M \rightarrow \bar{X}$. L'application $l_{\bar{X}}$ est une équivalence rationnelle donc l'application g également.

Par application du théorème 6.10, et en utilisant le théorème 2.23, il vient la suite d'égalités

$$\tau(X, \emptyset, x) = \tau(\bar{X}, \emptyset, \bar{x}) = \tau(M) = \langle L_k(p_i(\nu_M)), [M] \rangle = \langle L_k(p_i(\nu)), x \rangle.$$

Soit $g': M' \rightarrow X$ une application normale rationnelle, la proposition 2.23 induit les égalités

$$\tau(M') = \langle L_k(p_i(\nu_{M'})), [M'] \rangle = \langle L_k(p_i(\nu)), x \rangle.$$

Finalement, la condition $\tau(M') = \tau(X, \emptyset, x)$ du théorème de chirurgie rationnelle est satisfaite. $\square$

6.2.2 Rationalité de certains groupes de cobordisme

Lemme 6.12 *Soit X un espace 1-connexe $\mathbb{Q}$ -local. Notons $\hat{X}$ un produit fibré homotopique défini par*

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \longrightarrow & BSO \times BSO(k) \\ \downarrow & \Gamma_h & \downarrow l \\ X & \longrightarrow & BSO_0 \times BSO(k)_0 \end{array}$$

et muni du fibré vectoriel stable induit par celui de BSO .

Notons $\hat{E}$ la fibre homotopique commune de l'application $\hat{X} \rightarrow X$ et la rationalisation l .

Le groupe $\Omega_n^{\hat{X}, \hat{E}}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel naturellement isomorphe à $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Q})$.

Il s'inscrit dans une suite exacte longue naturelle

$$\dots \rightarrow \Omega_n^{\hat{E}} \rightarrow \Omega_n^{\hat{X}} \xrightarrow{ev} \tilde{H}_n(X; \mathbb{Q}) \rightarrow \Omega_{n-1}^{\hat{E}} \rightarrow \dots \quad (6.5)$$

Démonstration: Le fibré vectoriel stable sur $\hat{X}$ est défini par une suite de fibrés vectoriels $\xi_{\hat{X}}^n$ sur la filtration $(\hat{X}_n)$ induite par les fibrés canoniques sur $BSO(n)$.

De même, l'inclusion de la fibre $\hat{E} \hookrightarrow \hat{X}$ définit un fibré vectoriel stable $(\hat{E}_n, \xi_{\hat{E}}^n)$ sur $\hat{E}$.

Puisque X est un espace $\mathbb{Q}$ -local, il vérifie $\tilde{H}_*(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ donc la suite spectrale de Leray-Serre associée à la fibration $\hat{E}_n \xrightarrow{i_n} \hat{X}_n \rightarrow X$ avec coefficients dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dégénère au terme E^2 , et l'application de bord induit un isomorphisme en homologie $(i_n)_*: H_*(\hat{E}_n; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(\hat{X}_n; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. L'isomorphisme de Thom transporte l'isomorphisme en homologie entre les espaces de Thom $(Ti_n)_*: H_*(T\nu_{\hat{E}}^n; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(T\nu_{\hat{X}}^n; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. La fibre F_n de Ti_n est 1-connexe et satisfait $\tilde{H}_*(F_n; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, c'est-à-dire qu'elle est $\mathbb{Q}$ -locale. En faisant croître n vers $+\infty$, il vient que $\Omega_*^{\hat{X}, E} = \lim_{\rightarrow k} \pi_{m+n}(F_n)$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

La suite exacte se déduit de la suite des isomorphismes naturels

$$\Omega_n^{\hat{X}, \hat{E}} \xrightarrow{\cong} \Omega_n^{\hat{X}, \hat{E}} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} H_n(\hat{X}, \hat{E}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X; \mathbb{Q})$$

□

En particulier, le lemme s'applique au cas $X = BSO_0 \times BSO(k)_0$, ce qui permet d'écrire la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \Omega_n^{BSO \times BSO(k)} \xrightarrow{ev_{\mathbb{Q}}} \tilde{H}_n(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q}) \rightarrow \Omega_{n-1}^{\hat{E}} \rightarrow \dots \quad (6.6)$$

6.2.3 Démonstration du théorème 6.1

Définissons l'espace $\hat{X}$ par le produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \longrightarrow & BSO \times BSO(k) \\ \downarrow h & \lrcorner_h & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g=(b,c)} & BSO_0 \times BSO(k)_0 \end{array}$$

muni du fibré stable induit par celui sur BSO . L'application $h: \hat{X} \rightarrow X$ est une équivalence rationnelle, donc $\hat{X}$ est un complexe de Poincaré rationnel orienté par $\hat{x} \in H_m(\hat{X}; \mathbb{Q})$ correspondant à la classe d'orientation de X .

Proposition 6.13 *Chaque proposition du théorème 6.1 est équivalente à la condition $\Omega_m^{\hat{X}}(x) \neq \emptyset$.*

Démonstration: S'il existe une variété M qui réalise la structure normale rationnelle de X et munie d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang k qui fasse commuter le diagramme 6.1 alors elle s'inscrit dans un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \searrow \nu_{M,\xi} & & \\
 \hat{X} & \xrightarrow{\hat{g}} & BSO \times BSO(k) \\
 \downarrow l_M & \searrow \Gamma_h & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g} & BSO_0 \times BSO(k)_0.
 \end{array}$$

Par propriété du produit fibré homotopique, il existe une application $M \rightarrow \hat{X}$ qui complète le diagramme. Cette application s'étend en une application fibrée, et définit une classe de cobordisme de $\Omega_m^{\hat{X}}(\hat{x})$.

Réciproquement, le corollaire 6.11 du théorème de chirurgie rationnelle assure que toute classe non-vide de $\Omega_m^{\hat{X}}(\hat{x})$ contient une équivalence rationnelle $l_M: M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \hat{X}$, et la variété M obtenue satisfait la condition 1.

Il reste à montrer que la condition 2 aussi est équivalente au fait que $\Omega_m^{\hat{X}}(\hat{x})$ soit non vide. Notons $\hat{E}$ la fibre commune aux fibrations $\hat{X} \rightarrow X$ et $BSO \times BSO(k) \rightarrow BSO_0 \times BSO(k)_0$. Considérons les suites longues de cobordisme (lemme 6.12) associées aux paires $(\hat{X}, \hat{E})$ et $(BSO \times BSO(k), \hat{E})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & \Omega_m^{\hat{X}} & \xrightarrow{ev_{\mathbb{Q}}} & H_m(\hat{X}; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{m-1}^{\hat{E}} & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow \hat{g}_* & & \downarrow \cong & \\
 \longrightarrow & \Omega_m^{BSO \times BSO(k)} & \xrightarrow{ev_{\mathbb{Q}}} & H_m(BSO \times BSO(k); \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{m-1}^{\hat{E}} & \longrightarrow .
 \end{array}$$

Il s'en suit que $\Omega_m^{\hat{X}}(\hat{x})$ est non vide si et seulement si $\partial \hat{x} = 0$, c'est-à-dire si $\hat{g}_*(\hat{x})$ est dans l'image de $\Omega_m^{BSO \times BSO(k)}$, ce qui correspond à la condition 2 du théorème. $\square$

6.3 Réalisation géométrique du plongement

Nous allons à présent démontrer le théorème 6.2, sur la réalisation géométrique d'un plongement de Poincaré rationnel par un plongement lisse entre variétés fermées simplement connexes.

Soit M et V deux variétés fermées orientées simplement connexes de dimensions respectives m et $m + k$ avec $m \geq 5$ et $k \geq 3$. Notons $l_M: M \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} M_0$ et $l_V: V \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} V_0$ des rationalisations de M et V .

Soit ξ un fibré vectoriel orienté de rang k sur M et $\varphi: M_0 \rightarrow V_0$ une application continue entre les espaces rationalisés telle que les classes de Pontryagin normales satisfont la relation dans $H^*(M; \mathbb{Q})$

$$P(\nu_M) = P(\xi) \cdot l_M^* \varphi^* (l_V^*)^{-1} P(\nu_V). \quad (6.7)$$

À partir d'un plongement de Poincaré rationnel d'espaces $\mathbb{Q}$ -locaux, dans lequel s'inscrit φ , nous réalisons un plongement de Poincaré rationnel d'espaces munis de fibrés vectoriels stables, tels que toutes les flèches du diagramme soient fibrées. C'est à partir de ce diagramme d'espaces que se font ensuite les opérations de chirurgie normale.

Nous construisons une variété compacte dont le bord s'identifie à orientation près avec le fibré en sphères $S\xi$ sur M . Par des techniques de chirurgie normale, nous pouvons supposer que cette variété a le type d'homotopie rationnel du complémentaire. Le recollement de cette variété avec le fibré en disques $D\xi$ le long de leur bord commun donne une variété $\tilde{V}$ rationnellement équivalente à V et dans laquelle se plonge M avec ξ pour fibré normal.

6.3.1 Plongement de Poincaré rationnel fibré stable

Notons $b_V: V_0 \rightarrow BSO_0$ l'application induite par la classe $(l_V^*)^{-1} P(\nu_V) \in H^*(V_0; \mathbb{Q})$,

Le plongement de Poincaré rationnel permet de construire le diagramme ci-dessous, dans lequel les faces verticales sont des produits fibrés homotopiques, et les flèches verticales sont des équivalences rationnelles.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{S} & \xrightarrow{\quad} & \bar{C} & & & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & & & \\
 & \bar{M} & \xrightarrow{\quad} & \bar{V} & \xrightarrow{\quad} & BSO & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \Gamma_h & \downarrow & \\
 (S\xi)_0 & \xrightarrow{\quad} & C_0 & & & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & & & \\
 & M_0 & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & V_0 & \xrightarrow{\quad b_V \quad} & BSO_0 & \\
 & & & & & &
 \end{array} \quad (6.8)$$

Les espaces $\bar{S}$, $\bar{M}$, $\bar{C}$, $\bar{V}$ sont munis de fibrés stables induits par l'application dans BSO , et constituent aussi un plongement de Poincaré rationnel simplement connexe.

Lemme 6.14 *La rationalisation $l_S: S\xi \rightarrow (S\xi)_0$ se factorise par une équivalence rationnelle $i: S\xi \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \bar{S}$ qui définit une classe de cobordisme dans $\Omega_{m+k-1}^{\bar{S}}$.*

Démonstration: Notons $\nu_{D\xi}$ le fibré normal stable de $D\xi$, classifié par une application $b': D\xi \rightarrow BSO$.

Sa restriction à M satisfait la relation $\nu_M \cong \xi \oplus (\nu_{D\xi})|_M$.

La relation $P(\nu_M) = P(\xi) \cdot P((\nu_{D\xi})|_M)$ et l'équation (6.7) assurent l'égalité $P((\nu_{D\xi})|_M) = l_M^* \varphi^* (l_V^*)^{-1} P(\nu_V)$ et la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 S\xi & \xrightarrow[l_S]{\simeq_{\mathbb{Q}}} & (S\xi)_0 & \longrightarrow & C_0 \\
 \downarrow p_\xi & & \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow[l_M]{\simeq_{\mathbb{Q}}} & M_0 & \longrightarrow & V_0 \\
 \downarrow b'|_M & & & & \downarrow b_V \\
 BSO & \longrightarrow & & & BSO_0.
 \end{array} \tag{6.9}$$

Par propriété universelle du produit fibré homotopique [10], l'application l_S se relève en une application fibrée $i: S\xi \rightarrow \bar{S}$. Comme les applications $S\xi \rightarrow (S\xi)_0$ et $\bar{S} \rightarrow (S\xi)_0$ sont des équivalences rationnelles, l'application i en est une également.

Par construction, $p_\xi^*(\mu)$ est le fibré normal stable de $S\xi$. □

6.3.2 Construction d'un cobord de $S\xi$

Lemme 6.15 *Par composition avec l'application fibrée $\bar{S} \rightarrow \bar{C}$, l'image de la classe de cobordisme normal de i est nulle dans $\Omega_{m+k-1}^{\bar{C}}$.*

Démonstration: La fibre homotopique de l'application $\bar{C} \rightarrow C_0$ est la fibre homotopique $E^{\mathbb{Q}}$ de la rationalisation $BSO \rightarrow BSO_0$, et le lemme 6.12 (pour $k = 0$) associé à la paire $(\bar{C}, E^{\mathbb{Q}})$ permet d'écrire la suite exacte

$$H_{m+k}(\bar{C}; \mathbb{Q}) \rightarrow \Omega_{m+k-1}^{E^{\mathbb{Q}}} \rightarrow \Omega_{m+k-1}^{\bar{C}} \rightarrow H_{m+k-1}(\bar{C}; \mathbb{Q}). \tag{6.10}$$

Puisque le diagramme d'espaces barrés est un plongement de Poincaré rationnel simplement connexe, et d'après la proposition 5.2, la nullité des groupes

d'homologie $H_{m+k}(C_0; \mathbb{Q})$ et $H_{m+k-1}(C_0; \mathbb{Q})$ réduit la suite exacte (6.10) à un isomorphisme $\Omega_{m+k-1}^{E^{\mathbb{Q}}} \cong \Omega_{m+k-1}^{\bar{C}}$.

Il en résulte que la composée $S\xi \rightarrow \bar{S} \rightarrow \bar{C}$ est normalement cobordante à une composée fibrée $N \rightarrow E^{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{C}$ où N est une variété lisse fermée orientée munie de son fibré normal stable. Notons W le cobordisme normal reliant $S\xi$ et N , qui s'inscrit dans un diagramme commutatif à homotopie près dans lequel toutes les applications sont fibrées.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N & & \\
 & & \downarrow & \searrow & \\
 S\xi & \xrightarrow{\quad} & W & & E^{\mathbb{Q}} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 D\xi & & \bar{S} & \longrightarrow & \bar{C} \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \bar{M} & \longrightarrow & \bar{V}
 \end{array}$$

Le recollement $D\xi \cup_{S\xi} W$ est une variété lisse compacte orientée de bord N , et définit une classe de cobordisme dans $\Omega_{m+k}^{\bar{V}, E^{\mathbb{Q}}}$ qui relève la classe de cobordisme de $N \rightarrow E^{\mathbb{Q}}$ le long du connectant dans la suite exacte longue (2.1) :

$$\dots \rightarrow \Omega_{m+k}^{\bar{V}} \rightarrow \Omega_{m+k}^{\bar{V}, E^{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\partial} \Omega_{m+k-1}^{E^{\mathbb{Q}}} \rightarrow \dots$$

Le diagramme commutatif suivant identifie la classe de la paire $(D\xi \cup_{S\xi} W, N)$ avec la classe d'orientation $[V] \in H_{m+k}(V; \mathbb{Q}) \cong H_{m+k}(\bar{V}; \mathbb{Q})$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & (D\xi \cup_{S\xi} W, N) & & (D\xi \cup_{S\xi} W, N) & & (D\xi, S\xi) & & S\xi \\
 \Omega_{m+k}^{\bar{V}} & \xrightarrow{\quad} & \Omega_{m+k}^{\bar{V}, E^{\mathbb{Q}}} & \xrightarrow{\quad} & \Omega_{m+k}^{\bar{V}, \bar{C}} & \xleftarrow{\quad} & \Omega_{m+k}^{\bar{M}, \bar{S}} & \xrightarrow{\quad} & \Omega_{m+k-1}^{\bar{S}} \\
 \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{m+k}(\bar{V}) & \xrightarrow{\cong} & H_{m+k}(\bar{V}, E^{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\cong} & H_{m+k}(\bar{V}, \bar{C}) & \xleftarrow{\cong} & H_{m+k}(\bar{M}, \bar{S}) & \xrightarrow[\partial]{\cong} & H_{m+k-1}(\bar{S}) \\
 [V] & & & & & & & & [S\xi]
 \end{array}$$

Comme la classe d'orientation $[V] \in H_{m+k}(V; \mathbb{Q}) \cong \Omega_{m+k}^{\bar{V}, E^{\mathbb{Q}}}$ provient de la classe de cobordisme de $V \rightarrow \bar{V}$ dans $\Omega_{m+k}^{\bar{V}}$, elle est d'image nulle dans $\Omega_{m+k-1}^{E^{\mathbb{Q}}}$.

Finalement, la classe de cobordisme de $N \rightarrow E^{\mathbb{Q}}$ est triviale et celle de $S\xi \rightarrow \bar{C}$ également. $\square$

Par conséquent, il existe une variété compacte W fibrée par $\bar{C}$ et de bord orienté $\partial W = -S\xi$, et $D\xi \cup_{S\xi} W$ est une variété fermée.

6.3.3 Fin de la démonstration

Lemme 6.16 *L'application $(W, S\xi) \rightarrow (\bar{C}, \bar{S})$ est normalement cobordante, relativement au bord, à une équivalence rationnelle $(W', S\xi) \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} (\bar{C}, \bar{S})$, où W' est une variété compacte simplement connexe.*

Démonstration: Supposons que $m + k = 4r$. La proposition 2.22 et le théorème 2.23 permettent d'écrire les équations

$$\begin{aligned} \tau(W) &= \tau(W \cup_{S\xi} D\xi) - \tau(D\xi) \\ &= \langle L_r(p_i(\nu_{W \cup_{S\xi} D\xi})), [W \cup_{S\xi} D\xi] \rangle - \tau(M_0, (S\xi)_0, [D\xi], f_0^* P(\nu_V)) \\ &= \langle L_r(p_i(\nu_V)), [V] \rangle - (\tau(V_0, \emptyset, [V], P(\nu_V)) - \tau(C_0, (S\xi)_0, [C_0], g_0^* P(\nu_V))) \\ &= \tau(C_0, (S\xi)_0, [C_0], g_0^* P(\nu_V)). \end{aligned}$$

Finalement, quels que soient $m \geq 2$ et $k \geq 3$, la condition du théorème de chirurgie rationnelle 6.10 est remplie. $\square$

Notons $\tilde{V} = D\xi \cup_{S\xi} W'$ la variété lisse fermée orientée simplement connexe obtenue par recollement, qui est fibrée par $\bar{V}$. La rationalisation de la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} S\xi & \longrightarrow & D\xi \\ \downarrow & \text{h} \lrcorner & \downarrow \\ W & \longrightarrow & \tilde{V} \end{array}$$

coïncide avec la somme amalgamée homotopique du diagramme (5.2). En outre, les classes de Pontryagin du fibré stable de $\tilde{V}$ correspondent à celles du fibré normal stable de V , et la classe d'orientation de $\tilde{V}$ est reliée à celle de $S\xi$ par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, donc correspond à la classe d'orientation de V .

Nous avons montré que le plongement $M \hookrightarrow \tilde{V}$ réalise le diagramme (6.3).

Chapitre 7

Plongement dans une variété fixée

Dans le chapitre précédent, nous avons donné des conditions sous lesquelles, étant donné une application continue

$$f: M \rightarrow V$$

il était possible de construire un plongement

$$\tilde{f}: M \hookrightarrow \tilde{V}$$

« rationnellement équivalent » à f . Pour ce faire, nous avons remplacé la variété *but* V par une variété $\tilde{V}$ qui lui est rationnellement équivalente avec les mêmes invariants rationnels (classe d'orientation et classes de Pontryagin normales).

Dans ce chapitre, nous allons construire un plongement équivalent à *co-homologie* rationnelle près en remplaçant seulement la variété *source* M par une variété rationnellement équivalente $\tilde{M}$ avec mêmes classes de Pontryagin. Nous ne pouvons ici garantir que l'équivalence préserve la classe d'orientation, ce qui limite le résultat à une variété source de signature nulle.

7.1 Théorème principal

Pour énoncer précisément le théorème, nous avons besoin des deux définitions suivantes :

Définition 7.1 Nous appelons *dilatation homogène* de rapport $t \in \mathbb{Z}^*$ sur un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué H^* l'endomorphisme gradué $\lambda : x \mapsto t^{|x|}x$.

Si H^* est une algèbre de Poincaré de dimension n , nous appelons *degré* de λ l'entier t^n .

Définition 7.2 Soit $f : M^m \rightarrow V^{m+k}$ une application continue entre variétés orientées fermées simplement connexes.

Nous dirons que l'application f est *cohomologiquement $\mathbb{Q}$ -réalisable par un plongement*, s'il existe une variété lisse orientée fermée simplement connexe $\widetilde{M}$, munie d'un quasi-isomorphisme rationnel $h : \widetilde{M} \rightarrow M$ préservant les classes de Pontryagin du fibré normal stable, une dilatation homogène λ de même degré sur $H^*(V)$, et un plongement $\tilde{f} : \widetilde{M} \hookrightarrow V$ tels que $\tilde{f}^* \lambda = h^* f^*$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & V \\ h \downarrow \simeq_{\mathbb{Q}} & & \\ M & \xrightarrow{f} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^*(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & H^*(V; \mathbb{Q}) \\ h^* \uparrow \cong & & \uparrow \lambda \\ H^*(M; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{f^*} & H^*(V; \mathbb{Q}) \end{array} \quad (7.1)$$

Remarque : les applications f et $\tilde{f}$ n'ont pas nécessairement des modèles rationnels équivalents (voir [11] pour un exposé des notions de l'homotopie rationnelle), même si f est effectivement un plongement, mais elles sont identiques en cohomologie à isomorphisme près.

Le théorème central de ce chapitre est le suivant :

Théorème 7.3 Soit $f : M^m \rightarrow V^{m+k}$ une application continue entre variétés orientées fermées simplement connexes. Supposons que

1. $k > \frac{m}{2} + 1$;
2. V soit rationnellement $\frac{m}{2}$ -connexe et $f^*(P(\tau_V)) = 1 \in H^*(M; \mathbb{Q})$
3. si $m = 4r$ alors M est de signature nulle.

Alors f est cohomologiquement $\mathbb{Q}$ -réalisable par un plongement si et seulement si l'application $f^* f^! : H^*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{*+k}(M; \mathbb{Q})$ est la multiplication par une classe $e \in H^k(V; \mathbb{Q})$ qui est nulle si k est impair.

La démonstration est présentée en section 7.4.2.

L'évaluation de $f^* f^!$ ne nécessite que la connaissance des anneaux de cohomologie rationnelle $H^*(M; \mathbb{Q})$ et $H^*(V; \mathbb{Q})$, et de l'application f^* . La vérification de l'obstruction est donc facile à mener.

En particulier, l'obstruction cohomologique est toujours levée lorsque V est une sphère d'homologie rationnelle, ce qui nous donne le corollaire immédiat :

Corollaire 7.4 *Toute variété orientée fermée simplement connexe de signature nulle M est rationnellement équivalente à une variété $\widetilde{M}$ qui se plonge dans une sphère dans le rang métastable, par une application $\widetilde{M} \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} M$ préservant les classes de Pontryagin normales :*

$$M^m \xleftarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \widetilde{M} \hookrightarrow S^{\lfloor \frac{3m}{2} \rfloor + 2}.$$

En appliquant ce corollaire aux espaces complexes projectifs, on obtient que l'application triviale $\mathbb{C}P(2n+1) \rightarrow S^{6n+5}$ est cohomologiquement $\mathbb{Q}$ -réalisable, c'est-à-dire qu'il existe une variété $\widetilde{M}$ qui se plonge dans cette sphère et qui est rationnellement équivalente à $\mathbb{C}P(2n+1)$ avec identification des classes de Pontryagin normales

La codimension ici est beaucoup plus faible que celle de plongements connus. Mukherjee [29] exhibe des plongements $\mathbb{C}P(2n+1) \hookrightarrow S^{8n-\alpha(n)+2}$, où $\alpha(n)$ est le nombre de chiffres 1 dans l'écriture binaire de n .

La $\mathbb{Q}$ -réalisabilité cohomologique par un plongement n'implique pas pour autant la réalisabilité par un plongement. Les classes de Stiefel-Whitney (que nous négligeons dans ce travail) peuvent être exploitées pour montrer que $\mathbb{C}P(2n+1)$ ne se plonge pas dans $S^{8n-2\alpha(n)+2}$ [2].

Pour démontrer le théorème 7.3, nous allons construire une sous-variété M' de V et la transformer par des opérations de chirurgie en une sous-variété rationnellement équivalente à M . Une différence importante avec le travail effectué au chapitre 6 réside dans le fait que les cobordismes normaux doivent ici être plongés dans la variété V . Pour cela nous développons la notion de chirurgie normale plongée.

7.2 Chirurgie normale plongée

Dans toute la section 7.2, X désignera un espace topologique muni d'un fibré vectoriel ξ de rang $k \geq 1$.

7.2.1 Plongement fibré

Définition 7.5 Soit V une variété de dimension $m+k$.

- Nous appelons *plongement fibré dans V* tout quadruplet (M, f, ν, g) où
- M est une variété compacte de dimension m ;
 - $f: M \hookrightarrow V$ est un plongement transverse en $f(\partial M)$ au bord ∂V , de fibré normal ν ;
 - $g: (M, \nu) \rightarrow (X, \xi)$ est une application fibrée.

- Remarques**
1. Si V et ξ sont orientés, alors pour tout plongement fibré (M, f, ν, g) , M est orientée canoniquement par son fibré normal.
 2. Une application fibrée $g : (M, \nu(f)) \rightarrow (X, \xi)$ induit une application entre les espaces de Thom associés $Tg : T\nu(f) \rightarrow T\xi$.

La notion de plongement fibré étend celle de X -structure (définition 2.4). Là encore il existe une notion de cobordisme

Définition 7.6 Soit V une variété ouverte. Soit (M_i, f_i, ν_i, g_i) , $i \in \{0, 1\}$ deux plongements fibrés dans V . Supposons que les variétés M_i sont fermées. Nous dirons que ces plongements fibrés sont *cobordants* s'il existe un cobordisme W entre M_0 et M_1 et un plongement $F : W \hookrightarrow I \times V$ tel que les intersections avec $\{i\} \times V$ correspondent aux plongements des composantes de bord $\{i\} \times f_i$ et tel que les applications g_i s'étendent en une application fibrée $G : (W, \nu(F)) \rightarrow (X, \xi)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \nearrow g_0 & \uparrow G & \nwarrow g_1 & \\
 M_0 & \xrightarrow{\quad} & W & \xleftarrow{\quad} & M_1 \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow F & & \downarrow f_1 \\
 \{0\} \times V & \hookrightarrow & I \times V & \longleftarrow & \{1\} \times V
 \end{array} \tag{7.2}$$

Ce cobordisme induit une relation d'équivalence sur les plongements dans V et fibrés par ξ . Comme cette relation est plus fine que celle du cobordisme classique, les invariants de cobordisme (tels que la signature) sont préservés.

Remarque : si $(X, \xi) = (BSO(k), \tilde{\gamma}^k)$ est le classifiant des fibrés vectoriels orientés [27], alors les classes de cobordisme plongé fibré correspondent aux L -équivalences [39, page 71].

En particulier, si de plus $V = S^{m+k}$ avec $k > m$, alors ces classes sont les éléments du groupe de cobordisme Ω_m^{SO} .

Cependant, dans le cas général le cobordisme plongé fibré ne définit pas une catégorie de cobordisme au sens de Stong [36] car sauf dans de rares cas (si V est une sphère par exemple), il n'y a pas d'addition sur les plongements fibrés.

Proposition 7.7 Soit (M_j, f_j, ν_j, g_j) , $j \in \{0, 1\}$, deux plongements fibrés cobordants comme sur le diagramme (7.2). Notons $t_j : V \rightarrow T\nu_j$ les applica-

tions de Thom-Pontryagin correspondantes.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T\xi & & \\
 & \nearrow Tg_0 & \uparrow TG & \nwarrow Tg_1 & \\
 T\nu_0 & \longrightarrow & T\nu(F) & \longleftarrow & T\nu_1 \\
 \uparrow t_0 & & \uparrow t & & \uparrow t_1 \\
 \{0\} \times V & \longrightarrow & I \times V & \longleftarrow & \{1\} \times V
 \end{array}$$

Alors $(Tg_0) \circ t_0 \simeq (Tg_1) \circ t_1 : V \rightarrow T\xi$.

7.2.2 Données de chirurgie

Nous raffinons la notion de donnée de chirurgie classique [24] pour l'adapter au cadre de l'exposé.

Soit X un espace topologique muni d'un fibré vectoriel ξ de rang k . Soit M et V deux variétés fermées de dimensions respectives $m = p + q + 1$ et $n = m + k$.

Définition 7.8 Nous appelons *donnée de chirurgie simple* tout plongement $j : S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ en codimension 0. Nous notons $j_0 = j|_{S^p \times \{0\}}$.

Si M est munie d'un plongement $f : M \hookrightarrow V$ nous appelons *donnée de chirurgie plongée* tout plongement de la forme $J : D^{p+1} \times D^{q+1} \hookrightarrow V$ s'inscrivant dans un diagramme commutatif de plongements qui soit un produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 S^p \times D^{q+1} & \xrightarrow{i} & D^{p+1} \times D^{q+1} \\
 j \downarrow & \lrcorner & \downarrow J \\
 M & \xrightarrow{f} & V
 \end{array}$$

et tel que le fibré normal $\nu(i)$ induise un sous-fibré de rang 1 de $j^*(\nu(f))$.

Enfin, si M est munie d'une application fibrée $g : (M, \nu(f)) \rightarrow (X, \xi)$ telle que $(M, f, \nu(f), g)$ constitue un plongement fibré, nous appelons *donnée de chirurgie plongée fibrée* tout plongement fibré dans $I \times V$ s'écrivant

$$(D^{p+1} \times D^{q+1}, \{0\} \times J, \varepsilon \oplus \nu(J), \bar{g})$$

où :

1. J est une donnée de chirurgie plongée dans V ,
2. ε est la restriction du fibré normal de $\{0\} \times V$ dans $I \times V$,

3. $\bar{g}|_{S^p \times D^{q+1}}$ coïncide avec $g \circ j$ par l'isomorphisme de fibrés

$$i^*(\varepsilon \oplus \nu(J)) \cong \nu(i) \oplus i^*\nu(J) \cong j^*\nu(f).$$

Proposition 7.9 *Soit $(M, f, \nu(f), g)$ un plongement fibré dans V , et soit $j: S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ une donnée de chirurgie simple telle que les composées $f \circ j_0: S^p \hookrightarrow V$ et $g \circ j_0: S^p \rightarrow X$ soient homotopiquement triviales.*

$$\begin{array}{ccc} S^p & \xrightarrow{i} & D^{p+1} \\ j_0 \downarrow & & \downarrow J_0 \\ M & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow g & \downarrow h \\ & & X \end{array} \quad (7.3)$$

Si $k > p + 1$ alors il existe une donnée de chirurgie plongée fibrée qui étend la donnée de chirurgie simple j .

Démonstration: Le fibré vectoriel $h^*\xi$ induit sur le disque D^{p+1} admet une trivialisatıon sous la forme

$$h^*\xi = \eta^1 \oplus \zeta^{k-1}. \quad (7.4)$$

Puisque l'application $h: D^{p+1} \rightarrow X$ étend la composée fibrée $g \circ j_0$ le fibré $j_0^*\nu(f)$ s'identifie à la restriction $(h^*\xi)|_{S^p}$.

Comme la composée $f \circ j_0$ s'étend au disque D^{p+1} , par théorème de mise en position générique, il existe un plongement $J_0: D^p \hookrightarrow V$ qui prolonge $f \circ j_0$ et tel que le fibré $\eta|_{S^p}$ corresponde au fibré normal de la sphère $fj_0(S^p)$ dans $J_0(D^{p+1})$. Par mise en position transverse, puisque $k > p$, le plongement J_0 peut même être choisi pour que l'intersection de $f(M)$ et $J_0(D^{p+1})$ soit vide en dehors de $fj_0(S^p)$.

Toutes les variétés du diagramme (7.3) peuvent donc être considérées comme des sous-variétés de V , et les fibrés définis sur S^p satisfont

$$(\tau_V)|_{S^p} = (\tau_M)|_{S^p} \oplus \nu(f)|_{S^p} = (\tau_{S^p} \oplus \nu_{j_0}) \oplus (\eta|_{S^p} \oplus \zeta|_{S^p}).$$

Considérons une trivialisatıon du fibré normal $\nu(J_0) = \nu_{D^{p+1}}^V$ sur le disque D^{p+1} . Sa restriction $\nu(J_0)|_{S^p}$ s'identifie (à orientation près) au fibré $\nu(j_0) \oplus \zeta|_{S^p}$. Puisque le sous-fibré $\nu(j_0)$ est trivial, la trivialisatıon de $\zeta|_{S^p}$ s'étend en un sous-fibré trivial $\zeta \subset \nu(J_0)$. Son orthogonal $\mu = \zeta^\perp$ dans $\nu(J_0)$ est un fibré vectoriel de rang $(q + 1)$ qui étend $\nu(j_0)$. Il suffit de considérer le

plongement du fibré en disque $J: D^{p+1} \times D^{q+1} \cong D\mu \hookrightarrow V$ qui prolonge $j: S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow V$ pour obtenir une donnée de chirurgie plongée.

La projection $\pi: D^{p+1} \times D^{q+1} \rightarrow D^{p+1}$ définit le fibré trivial $\pi^*(\eta \oplus \zeta)$ de rang k sur $D^{p+1} \times D^{q+1}$ dont la restriction à $S^p \times D^{q+1}$ correspond à la trivialisisation du fibré normal $\nu(f)|_{(S^p \times D^{q+1})}$. L'application fibrée $\bar{g}: (D^{p+1} \times D^{q+1}, \pi^*(\eta \oplus \zeta)) \rightarrow (X, \xi)$ étend donc simultanément les applications $g: S^p \times D^{q+1} \rightarrow X$ et $h: D^{p+1} \times \{0\} \rightarrow X$, ce qui complète la définition d'une donnée de chirurgie plongée fibrée. $\square$

7.2.3 Opération de chirurgie

L'intérêt des données de chirurgie réside dans le fait qu'elles permettent de construire des cobordismes pour notamment réduire certains groupes d'homotopie de manière précise [25].

Définition 7.10 Soit $j: S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ une donnée de chirurgie simple sur une variété M de dimension $p + q + 1$.

Posons $\check{M} = M - \text{int}(\text{im}(j))$. La restriction $j|_{S^p \times S^q}$ et l'inclusion naturelle $S^p \times S^q \hookrightarrow D^{p+1} \times S^q$ permettent de construire le recollement

$$\chi(M, j) = \check{M} \cup_{S^p \times S^q} D^{p+1} \times S^q \quad (7.5)$$

appelé *image de la variété M par la chirurgie associée à j* . L'injection canonique $j': S^q \times D^{p+1} \hookrightarrow \chi(M, j)$ est appelée *donnée de chirurgie duale*.

Pour établir notre résultat de chirurgie proprement, rappelons comment peut se construire un cobordisme entre une variété et son image par chirurgie.

Lemme 7.11 *Il existe une hypersurface $L_{p,q}$ de $[0, 1] \times D^{p+1} \times D^{q+1}$ satisfaisant les conditions suivantes*

- la variété à bord $L_{p,q}$ se prolonge de manière lisse avec la sous-variété $[0, 1] \times S^p \times (\mathbb{R}^{q+1} - D^{q+1}) \subset \mathbb{R}^{p+q+3}$ le long de $[0, 1] \times S^p \times S^q$;
- les restrictions $L_{p,q} \cap (\{i\} \times \mathbb{R}^{p+q+2})$, $i \in \{0, 1\}$ soient respectivement isotopes à $\{0\} \times S^p \times D^{q+1}$ et $\{1\} \times D^{p+1} \times S^q$ relativement à leur bord $\{i\} \times S^p \times S^q$;
- la projection $L_{p,q} \rightarrow D^{p+1} \times D^{q+1}$ est injective en dehors de $[0, 1] \times S^p \times S^q$ et son image est isotope relativement à $S^p \times S^q$ au produit $D^{p+1} \times D^{q+1}$.

Démonstration: Il suffit de considérer une application lisse $C: \mathbb{R} \rightarrow [0, 2]$ telle que $C(x) = 0$ pour $x \leq -1$, $C(x) = 2$ pour $x \geq 1$, $C(0) = 1$ et $C'(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$.

Définissons ensuite la fonction

$$\begin{aligned} f: I \times \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto \|x\|^2 + C(2t - 1)C(-\|y\|^2) \end{aligned}$$

L'hypersurface $L_{p,q}$ est alors définie par la courbe de niveau $f^{-1}(1)$. $\square$

Nous pouvons utiliser cette hypersurface pour rappeler :

Proposition 7.12 *Soit $j: S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ est une donnée de chirurgie simple. Notons $\check{M} = M - \text{int}(\text{im}(j))$.*

Le recollement $W_j = ([0, 1] \times \check{M}) \cup_{[0,1] \times S^p \times S^q} L_{p,q}$ constitue un cobordisme entre M et $\chi(M, j)$ qui se rétracte sur $M \cup_{j_0} D^{p+1}$, et difféomorphe au cobordisme $W_{-j'}$.

La construction que nous avons choisie pour la variété $L_{p,q}$ nous permet d'étendre ce résultat au cas plongé fibré.

Proposition 7.13 *Si $(D^{p+1} \times D^{q+1}, \{0\} \times J, \nu(J) \oplus \varepsilon, \bar{g})$ est une donnée de chirurgie plongée fibrée, alors il existe un cobordisme plongé fibré s'écrivant $(W_j, F, \nu(F), G)$, où W_j est le cobordisme canonique défini en proposition 7.12.*

Le résultat fondamental de chirurgie classique peut alors s'énoncer comme suit (voir Browder [7], IV.1.1 à IV.1.5) :

Théorème 7.14 *Soit $j: S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ une donnée de chirurgie simple.*

L'injection $M \hookrightarrow W_j$ est p -connexe, et en notant (j_0) le sous $\pi_1(M)$ -module de $\pi_p(M)$ engendré par la classe de $j_0: S^p \rightarrow W$, les groupes d'homotopie en degré p s'inscrivent dans une suite exacte

$$0 \rightarrow (j_0) \rightarrow \pi_p(M) \rightarrow \pi_p(W_j) \rightarrow 0.$$

7.3 Application normale plongée

Dans toute cette partie, X est un complexe de Poincaré rationnel orienté 1-connexe de dimension $m \geq 5$ rationnellement équivalent à une variété orientée et muni d'un fibré vectoriel orienté ξ de rang $k \geq 3$.

Nous noterons V une variété orientée simplement connexe de dimension $m + k$.

7.3.1 Noyau de chirurgie rationnelle

Définition 7.15 Nous appellerons *plongement normal rationnel* tout plongement fibré (M, f, ν, g) dans V tel que $g_*([M]) \neq 0 \in H_m(X; \mathbb{Q})$.

Définition 7.16 Soit $g: M \rightarrow X$ une application normale rationnelle

Nous notons $K_p(g)$ le noyau de l'application $H_p(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{g_*} H_p(X; \mathbb{Q})$ que nous appelons *noyau de chirurgie rationnelle*.

Rappelons la notation $\pi_{p+1}(X, M)$ désignant l'ensemble des classes d'homotopie de couples d'applications (α, β) qui s'inscrivent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^p & \longrightarrow & D^{p+1} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ M & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

Cet ensemble est un groupe pour $p \geq 1$.

Proposition 7.17 *Le noyau de chirurgie s'inscrit dans une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow K_p(g) \rightarrow H_p(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_p(X; \mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (7.6)$$

En outre, si g est p -connexe avec $p > 1$, le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme $\pi_{p+1}(X, M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} K_p(g)$.

Démonstration: La dualité de Poincaré impose que l'application normale rationnelle g soit injective en cohomologie, donc surjective en homologie, ce qui démontre la suite exacte.

L'isomorphisme de Hurewicz rationnel relatif identifie $K_p(g)$ avec le groupe d'homotopie relatif. $\square$

Lemme 7.18 *Soit (M, f, ν, g) un plongement normal rationnel tel que M soit 1-connexe et g soit rationnellement p -connexe avec $1 \leq p \leq \frac{m}{2}$, c'est-à-dire que le groupe $\pi_i(X, M) \otimes \mathbb{Q}$ est nul pour $i \leq p$.*

Soit $x \in K_p(g) - \{0\}$. Si $p = \frac{m}{2}$ et p pair, nous supposons que x est isotrope pour la forme d'intersection, c'est-à-dire que son dual $x' \in H^p(M; \mathbb{Q})$ satisfait l'équation

$$\langle x' \cup x', [M] \rangle = 0.$$

Alors il existe une donnée de chirurgie plongée fibrée

$$(D^{p+1} \times D^{q+1}, \{0\} \times J, \varepsilon \oplus \nu(J), \hat{g})$$

telle que la classe d'homologie de $J(S^p \times \{0\})$ définisse un multiple non nul de $x \in H_p(M; \mathbb{Q})$.

Démonstration: Il existe un multiple de x dans l'image du morphisme de Hurewicz, donc s'écrivant $(j_0)_*([S^p])$, où $j_0: S^p \rightarrow M$ s'étend en une application $g: D^{p+1} \rightarrow X$.

Puisque la variété V est rationnellement $\frac{m}{2}$ -connexe, quitte à remplacer j_0 par un multiple, la composée $f \circ j_0: S^p \rightarrow V$ est homotopiquement triviale.

Puisque $p \leq \frac{m}{2}$, l'application j_0 peut être déformée en un plongement. La variétés M et S^p peuvent désormais être identifiées avec les sous-variétés images dans V .

Montrons enfin que le fibré normal $\nu(j_0)$ du plongement de S^p dans M est trivial. Puisque le plongement $S^p \hookrightarrow V$ est homotopiquement trivial, la restriction $(\tau_V)|_{S^p}$ du fibré tangent de V est un fibré trivial. De même, puisque la composée $g \circ j_0$ est homotopiquement triviale, la restriction $\nu(f)|_{S^p}$ est également un fibré trivial. Comme le fibré tangent τ_{S^p} est stablement trivial, il ressort de l'égalité suivante

$$(\tau_V)|_{S^p} = \tau_{S^p} \oplus \nu(j_0) \oplus \nu(f)|_{S^p}$$

que le fibré $\nu(j_0)$ de rang $(q+1)$ sur S^p est stablement trivial.

Si $p < q+1$ alors $\nu(j_0)$ est trivial.

Si $p = q+1 = \frac{m}{2}$ alors le fibré vectoriel orienté $\nu(j_0)$ est classifié par un élément du noyau de $\pi_p(BSO(p+1)) \rightarrow \pi_p(BSO(p))$. Dans le cas où p est impair, ce noyau est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ donc quitte à avoir choisi un multiple pair de j_0 au départ, le fibré $\nu(j_0)$ peut être trivialisé. Dans le cas où p est pair, ce noyau est isomorphe à $\mathbb{Z}$ par la donnée de la classe d'Euler. L'hypothèse d'isotropie de x assure que la classe d'Euler de $\nu(j_0)$ est nulle, donc le fibré est trivial.

La donnée de chirurgie simple qui en résulte permet de construire une donnée de chirurgie plongée fibrée d'après la proposition 7.9. $\square$

7.3.2 Chirurgie en dimension moitié

Si $j: S^p \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ est une donnée de chirurgie simple avec $p < q$, la théorème 7.14 permet de montrer que le groupe d'homotopie $\pi_p(\chi(M, j))$ est de rang plus faible que $\pi_p(M)$, ce qui permet de réduire la dimension du noyau de chirurgie rationnelle.

Lorsque $p = q$ ou $p = q+1$, nous aurons besoin du lemme suivant.

Notons $\tilde{M} = M - \text{int}(\text{im}(j))$ et $x = j_{0*}[S^p]$. La forme d'intersection sera notée $(\cdot)$ et les groupes d'homologie sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Lemme 7.19 [7] *Si $p > 1$, alors les suites exactes d'homologie associées aux paires $(M, \check{M})$ et $(\chi(M, j), \check{M})$ peuvent s'écrire*

$$0 \rightarrow H_{q+1}(\check{M}) \xrightarrow{i^*} H_{q+1}(M) \xrightarrow{x} \mathbb{Q} \xrightarrow{d} H_q(\check{M}) \rightarrow H_q(M) \rightarrow 0 \quad (7.7)$$

$$0 \rightarrow H_{p+1}(\check{M}) \xrightarrow{i'_*} H_{p+1}(\chi(M, j)) \xrightarrow{y} \mathbb{Q} \xrightarrow{d'} H_p(\check{M}) \rightarrow H_p(\chi(M, j)) \rightarrow 0 \quad (7.8)$$

avec la relation $x = i_* d'(1)$.

L'effet d'une chirurgie « en dimension moitié » s'exprime donc par la proposition suivante :

Proposition 7.20 *Si $x \neq 0$ alors $\dim H_p(\chi(M, j); \mathbb{Q}) < \dim H_p(M; \mathbb{Q})$.*

Démonstration: L'application $z \mapsto z \cdot x$ de la suite exacte (7.7) est surjective par dualité de Poincaré. Donc $H_q(\check{M}) \cong H_q(M)$ et $\dim H_{q+1}(\check{M}) = \dim H_{q+1}(M) - 1$, donc quelle que soit la parité de m , il vient l'inégalité

$$\dim H_p(\check{M}) \leq \dim H_p(M).$$

En outre, l'application d' de l'équation (7.8) est injective ce qui assure la relation

$$\dim H_p(M') = \dim H_p(\check{M}) - 1 \leq \dim H_p(M) - 1.$$

□

7.3.3 Théorème de réduction du noyau

Théorème 7.21 *Soit (M, f, ν, g) un plongement normal rationnel.*

Supposons que V est rationnellement $\frac{m}{2}$ -connexe et que $k > \frac{m}{2} + 1$ (hypothèse métastable). Si m est un multiple de 4, nous supposons également que les formes d'intersection sur M et X ont même signature.

Alors (M, f, ν, g) est cobordant à un plongement normal rationnel s'écrivant $(\widetilde{M}, \widetilde{f}, \widetilde{\nu}, \widetilde{g})$, où $\widetilde{g}$ est une équivalence rationnelle.

Démonstration: Montrons d'abord que toute classe de cobordisme plongé fibré dans V contient un représentant simplement connexe. Puisque la codimension k est supérieure ou égale à 2, et par connexité de V et de X , toutes les composantes connexes d'un plongement fibré peuvent être connectées par des données de chirurgie simple, qui s'étendent en données de chirurgie plongée fibrée d'après la proposition 7.9. Les opérations de chirurgie correspondantes permettent d'obtenir un représentant connexe.

De même, la simple connexité de V et de X permettent de définir une donnée de chirurgie simple pour une famille de générateurs du groupe fondamental de la variété plongée. Les opérations sur les données de chirurgie plongée fibrée correspondantes permettent de construire un représentant simplement connexe (M_1, f_1, ν_1, g_1) .

Par applications successives du lemme 7.18 il est facile de construire des plongements normaux rationnels (M_p, f_p, ν_p, g_p) cobordants tels que M_p soit 1-connexe et l'application $g_p: M_p \rightarrow X$ soit rationnellement p -connexe, avec $1 < p < \frac{m}{2} + 1$.

Si m est impair, l'application $g_{\frac{m+1}{2}}$ est rationnellement $\frac{m+1}{2}$ -connexe entre deux complexes de Poincaré rationnels de dimension m , donc par dualité de Poincaré elle constitue une équivalence d'homotopie rationnelle.

Si $m = 2p$ avec p impair, le même procédé continue pour réduire $K_p(g_p)$ à 0. Si $m = 2p$ avec p pair, les classes dans le groupe de Witt des formes d'intersection de M et X sont déterminées par la signature, donc sont identiques. Tant que le noyau de chirurgie rationnelle est non-nul il contient donc des vecteurs isotropes. Le procédé de réduction de $K_{\frac{m}{2}}(g_{\frac{m}{2}})$ se termine. Quelle que soit la parité de p , il existe finalement un représentant $(M_{p+1}, f_{p+1}, \nu_{p+1}, g_{p+1})$ avec M_{p+1} simplement connexe et g_{p+1} rationnellement $(p+1)$ -connexe, donc g_{p+1} constitue une équivalence d'homotopie rationnelle entre les complexes de Poincaré rationnels M et X . $\square$

7.4 Démonstration du théorème principal

7.4.1 Dérationalisation d'une application

Proposition 7.22 (S. Papadima [32, Proposition 3.1]) *Soit V un CW-complexe fini et K un CW-complexe fini simplement connexe formel. Notons $l: K \rightarrow K_0$ une rationalisation.*

Pour toute application $\varphi: V \rightarrow K_0$ il existe une équivalence rationnelle $\psi: K \rightarrow K$ induisant une dilatation homogène en homologie et une application $q: V \rightarrow K$ tel que $\psi_0 \varphi = lq$.

$$\begin{array}{ccccc}
 V & & & & \\
 & \searrow q & & \nearrow \psi & \\
 & & K & \xrightarrow[\cong]{\psi} & K \\
 & \searrow \varphi & \downarrow l & & \downarrow l \\
 & & K_0 & \xrightarrow[\cong]{\psi_0} & K_0
 \end{array}$$

Les résultats d'homotopie rationnelle vont nous permettre de réaliser des applications en cohomologie par des applications topologiques « à dilatation homogène près ».

Corollaire 7.23 *Soit X un CW-complexe fini de dimension m , muni d'un fibré vectoriel ξ de rang $k > 1$. Soit V un CW-complexe fini simplement connexe de dimension $m + k$.*

Si $k > \frac{m}{2} + 1$, alors pour tout morphisme d'algèbres $\Phi : H^(T\xi) \rightarrow H^*(V)$ il existe une application $q : V \rightarrow T\xi$ et une dilatation homogène λ sur $H^*(V)$ telle que $q^* = \lambda\Phi$.*

Démonstration: L'espace $T\xi$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini $(k - 1)$ -connexe d'après l'isomorphisme de Thom. En outre, la condition $k > \frac{m}{2} + 1$ assure que $\dim(V) \leq 3k - 2$.

Notons $T\xi_0$ une rationalisation de l'espace de Thom $T\xi$. D'après un théorème de M. Vigué [40, Théorème 3.1.5], il existe une application $\varphi : V \rightarrow (T\xi)_0$ induisant Φ en cohomologie.

Comme l'espace $T\xi$ est formel [18, Corollary 5.16], la proposition 7.22 s'applique. Il existe $\psi : T\xi \rightarrow T\xi$ et $q : V \rightarrow T\xi$ tels que $H\psi$ soit une dilatation homogène sur $H^*(T\xi; \mathbb{Q})$ et $\psi_0\varphi$ soit homotope à lq .

Finalement, en notant $\lambda = H\psi$, il vient $\lambda\Phi = q^*$. $\square$

7.4.2 Réalisation géométrique du plongement homologue

Supposons que

1. $k > \frac{m}{2} + 1$;
2. V soit rationnellement $\frac{m}{2}$ -connexe et $f^*(P(\tau_V)) = 1 \in H^*(M; \mathbb{Q})$
3. si $m = 4r$ alors M est de signature nulle.

Supposons que l'application f soit cohomologiquement $\mathbb{Q}$ -réalisable. Notons $t \in \mathbb{Z}^*$ le rapport de la dilatation homogène λ .

Le diagramme (7.1) permet de calculer la relation suivante :

$$f^* f^! = t^{m+k} (h^*)^{-1} \tilde{f}^* \tilde{f}^! (h^!)^{-1}.$$

L'application $\tilde{f}$ étant un plongement, nous pouvons noter $e(\nu) \in H^k(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ la classe d'Euler de son fibré normal. La proposition 1.16 assure que la composée $\tilde{f}^* \tilde{f}^! : H^{*-k}(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ correspond au cup-produit avec la classe $e(\nu)$. Comme $h^! h^*$ est la multiplication par $\deg h = t^{m+k}$ [5, page 394], il vient que la composée $f^* f^! : H^{*-k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$ correspond au cup-produit avec la classe $(h^*)^{-1} e(\nu)$.

Montrons à présent le sens réciproque du théorème. Si $m \leq 4$, le rang métastable est inclus dans le rang stable donc f est homotope à un plongement.

Nous supposons dorénavant que $m \geq 5$. La construction du plongement va se faire en 4 étapes.

Lemme 7.24 *Il existe un complexe de Poincaré rationnel orienté fini X muni d'une équivalence rationnelle $h_X: X \rightarrow M$ préservant les classes d'orientation et un fibré ξ^k sur X satisfaisant les équations suivantes :*

$$P(\xi) = h_X^* P(\nu_M) \quad (7.9)$$

$$e(\xi) = h_X^* f^* f^!(1). \quad (7.10)$$

Démonstration: Les classes $P(\nu_M)$ et (si k est pair) la classe $e = f^* f^!(1)$ définissent une application $c_0: M \rightarrow BSO(k)_0$ unique à homotopie près.

Notons $\bar{M}$ l'espace défini par le produit fibré homotopique.

$$\begin{array}{ccc} \bar{M} & \xrightarrow{c_0} & BSO(k) \\ \downarrow & \lrcorner_h & \downarrow l \\ M & \xrightarrow{c_0} & BSO(k)_0 \end{array}$$

Comme l'espace $\bar{M}$ est 1-connexe et $H^*(\bar{M}; \mathbb{Q}) \cong H^*(M; \mathbb{Q})$ est de dimension finie, il existe un CW-complexe fini 1-connexe X muni d'une équivalence rationnelle $X \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \bar{M}$ [11, 9.9].

La composée $X \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \bar{M} \rightarrow BSO(k)$ définit alors un fibré ξ sur X , dont les classes caractéristiques rationnelles satisfont les équations (7.9) et (7.10).

□

Posons $f_X = f \circ h_X: X \rightarrow V$. L'isomorphisme de Thom sera noté $\Theta_X: H^{*-k}(X) \rightarrow H^*(T\xi)$. Il induit une classe d'homologie particulière $[T\xi] \in H_{m+k}(T\xi; \mathbb{Q})$ provenant de la classe d'orientation de X , et qui permettra de parler de « degré » d'une application vers $T\xi$.

Lemme 7.25 *Il existe une application $q: V \rightarrow T\xi$ et une dilatation homogène λ sur $H^*(V)$ de même degré telles que $q^* \Theta_X = \lambda f_X^!$.*

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{f_X^!} & \tilde{H}^{*+k}(V) \\ \Theta_X \downarrow \cong & \circlearrowleft & \cong \downarrow \lambda \\ \tilde{H}^{*+k}(T\xi) & \xrightarrow{q^*} & \tilde{H}^{*+k}(V) \end{array} \quad (7.11)$$

Démonstration: La composition $f_X^! \circ \Theta_X^{-1}: \tilde{H}^*(T\xi; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(V; \mathbb{Q})$ induit un morphisme d'algèbres graduées $\Phi: H^*(T\xi) \rightarrow H^*(V)$ de degré 1 d'après la proposition 5.9.

Le corollaire 7.23 assure alors l'existence des applications q et λ , de même degré, qui satisfont le diagramme (7.11). $\square$

Lemme 7.26 *Il existe un plongement fibré dans V noté (M', f', ν', g') tel que $(Tg') \circ t'$ soit homotope à q , où t' est l'application de Thom-Pontryagin associée à f' .*

$$\begin{array}{ccccc}
 \nu' & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & \\
 \xi & & M' \xrightarrow{f'} V & \xrightarrow{t'} T\nu' & \\
 & \searrow g' & \downarrow & \downarrow Tg' & \\
 & & X & \xrightarrow{q} T\xi &
 \end{array}$$

Démonstration: Quitte à déformer q dans sa classe d'homotopie, nous pouvons supposer qu'elle est transverse à X , c'est-à-dire telle que $M' = q^{-1}(X)$ définisse une sous-variété lisse fermée de V , de codimension k , orientée par son fibré normal $\nu' = (q|_{M_0})^*(\xi)$ (voir par exemple [7]).

$$\begin{array}{ccc}
 M' & \xrightarrow{f'} & V \\
 g' \downarrow & \lrcorner & \downarrow q \\
 X & \longrightarrow & T\xi
 \end{array}$$

$\square$

Remarquons que dans ce cas, le plongement fibré est en fait un plongement normal rationnel, c'est-à-dire qu'il satisfait en plus $g'_*([M']) \neq 0 \in H_m(X; \mathbb{Q})$ car $\deg(g') = \deg(q)$.

Lemme 7.27 *Si m est multiple de 4, les formes d'intersection de M et X ont même signature.*

Démonstration: Utilisons la formule de la signature de Hirzebruch [17] :

$$\begin{aligned}
 \text{sign}(M') &= \langle L(p_i(\nu')), [M'] \rangle \\
 &= (\deg g') \langle L(p_i(\xi)), [X] \rangle \\
 &= (\deg g') \langle L(p_i(\nu_M)), [M] \rangle \\
 &= (\deg g') \text{sign}(M)
 \end{aligned}$$

pour conclure que $\text{sign}(M') = 0 = \text{sign}(M) = \text{sign}(X)$. $\square$

Le théorème 7.21 nous permet de conclure qu'il existe un plongement normal rationnel cobordant $(\widetilde{M}, \tilde{f}, \tilde{\nu}, \tilde{g})$ tel que $\widetilde{M}$ soit une variété 1-connexe et $\tilde{g}$ soit une équivalence rationnelle.

D'après la proposition 7.7, en notant $\tilde{t}$ l'application de Thom-Pontryagin associée à $\tilde{f}$, les applications q et $(T\tilde{g}) \circ \tilde{t}$ restent homotopes.

Dès lors, nous obtenons les relations

$$\begin{aligned} \lambda f^! h_X^! &= \lambda f_X^! \text{ par définition de } f_X \\ &= q^* \Theta_X \text{ d'après le lemme 7.25} \\ &= \tilde{t}'^* (T\tilde{g}')^* \Theta_X \text{ d'après le lemme 7.26} \\ &= \tilde{t}^* (T\tilde{g})^* \Theta_X \text{ d'après la proposition 7.7} \\ &= \tilde{t}^* \Theta_{\widetilde{M}} \tilde{g}^* \text{ par définition de } T\tilde{g} \\ &= \tilde{f}^! \tilde{g}^* \text{ d'après la proposition 1.15.} \end{aligned}$$

Posons $h = h_X \circ \tilde{g}: \widetilde{M} \rightarrow M$ qui est une équivalence rationnelle. Il est facile de voir qu'elle préserve les classes de Pontryagin des fibrés normaux.

Enfin, $\lambda f^! h^! = (\deg \tilde{g}) \tilde{f}^! = t^{m+k} \tilde{f}^!$ i.e. $\lambda f^* = h^* f^*$, ce qui assure que f est cohomologiquement $\mathbb{Q}$ -réalisable par un plongement.

Bibliographie

- [1] M. Atiyah, F. Hirzebruch, *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 276–281.
- [2] M. Atiyah, F. Hirzebruch, *Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 383–396.
- [3] J. Barge, *Structures différentiables sur les types d'homotopie rationnelle simplement connexes* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **9** (1976), 469–501.
- [4] J. Barge, J. Lannes, F. Latour, P. Vogel, Λ -spheres, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **4** (1974), 463–506.
- [5] G. E. Bredon, *Topology and Geometry* G.T.M. **139**, Springer-Verlag (1993).
- [6] W. Browder, *Embedding smooth manifolds*, Proc. I.C.M. (Moscow, 1966). Mir (1968), 712–719.
- [7] W. Browder, *Surgery on simply-connected manifolds*, Springer-Verlag (1972).
- [8] R. Cohen *The immersion conjecture for differentiable manifolds*, Annals of Math. **122** (1985), 237–328.
- [9] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan, *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274.
- [10] J. P. Doeraene, *Homotopy pull-back, homotopy push-out and joins*, Bull. Belg. Math., Soc. Simon Stevin **5** (1998), 15–37.
- [11] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas, *Rational homotopy theory*, G.T.M **205**, Springer-Verlag (2001).
- [12] S. Gitler, *Immersion and embedding of manifolds*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. XXII, univ. Wisconsin, Madison, Wis. (1970), 87–96, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1971).

- [13] P. A. Griffiths, J. W. Morgan, *Rational homotopy theory and differential forms*, Progress in Math. **16** (1981).
- [14] A. Haefliger, *Differential embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$* , Ann. of Math. (2) **83** (1966), 402–436.
- [15] A. Haefliger, *Plongements différentiables de variétés dans variétés*, Comment. Math. Helv. **36** (1961), 47–82.
- [16] A. Hatcher *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [17] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1966).
- [18] S. Halperin, J. D. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. **32** (1979), no. 3, 233–279.
- [19] W. C. Hsiang, R. H. Szczarba, *On the embeddability and non-embeddability of sphere bundles over spheres*, Ann. of Math. (2) **80** (1964), 397–402.
- [20] J. R. Klein, *Poincaré duality spaces*, Surveys on Surgery Theory, Annals of Math. Studies, Princeton University Press (2000).
- [21] T. Y. Lam *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics **67**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).
- [22] S. Lang, *Algebra*, Revised third edition. G.T.M. **211**, Springer-Verlag, New-York (2002).
- [23] P. Lambrechts, D. Stanley, *Algebraic models of Poincaré embeddings*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 135–182 (electronic).
- [24] J. Milnor, *Lecture on the h -cobordism theorem*, Princeton University Press (1965).
- [25] J. Milnor, *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds*, (1961) Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III pp. 39–55 American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [26] J. Milnor, *On the immersion of n -manifolds in $(n+1)$ -space*, Comm. Math. Helv. **30** (1956) 275–284.
- [27] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies **76**, Princeton University Press (1974).
- [28] R. E. Mosher, M. C. Tangora, *Cohomology operations and applications in homotopy theory*, Harper's Series in Modern Math. (1968).
- [29] A. Mukherjee, *Embedding complex projective spaces in Euclidian space*, Bull. London Math. Soc. **13** (1981), n° 4, 323–324.

- [30] H. Osborn *Vector Bundles 1 : Foundations and Stiefel-Whitney classes* Academic Press (1982).
- [31] S. Papadima, *Homotopy Lie algebras and submanifolds*, Journal of Pure and Applied Algebra **91** (1994), 219–229.
- [32] S. Papadima, *The rational homotopy of Thom spaces and the smoothing of homology class*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 601–614.
- [33] P. F. Peterson, *Some nonembedding problems*, Bol. Soc. Mat. Mex. **2** (1957) 9–15.
- [34] M. M. Postnikov, *Localization of topological spaces*, Russian Math. Surveys **32** : 6 (1977), 121–184.
- [35] H. Shiga, *Rational homotopy type and self-maps*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 427–434.
- [36] R. E. Stong, *Notes on cobordism theory*, Math. Notes, Princeton University Press (1968).
- [37] R. E. Stong, *Relations among characteristic numbers I*, Topology **4** (1965), 367–281.
- [38] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publi. Math. IHES **47** (1977), 269–331.
- [39] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.
- [40] M. Vigué-Poirrier, *Réalisation de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), n° 2, 447–484.
- [41] C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, London Math. Soc. Monographs, Academic Press, London-New York (1970) n° 1.
- [42] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology*, Topology **6** (1967), 273–296.
- [43] H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Annals of Math. **45** (1944), n° 2, 220–246.

Index

- adgc, 27
- algèbre différentielle graduée commu-
tative, 27
- application normale rationnelle, 69
- application classifiante, 2
- application de Thom-Pontryagin, 3,
16
- application de transfert en cohomolo-
gie, 4
- application réalisable par un plonge-
ment, 66
- auto-intersection, 42

- classe d'Euler, 2
 - du fibré normal putatif, 10
- classes de Pontryagin, 2
 - du fibré normal putatif, 8
- cobordisme, 15
 - normal, 15
- complexe de Poincaré, 4
- conjecture de Gitler, ix
- cup-produit fonctionnel, 59

- dilatation homogène, 77
- donnée de chirurgie
 - duale, 83
 - plongée, 81
 - plongée fibrée, 81
 - simple, 81

- équivalence rationnelle, 24
- espace de Thom, 2

- fibration sphérique rationnelle, 29
 - associée, 31
 - triviale, 29
- fibré vectoriel
 - normal, 1
 - normal stable, 14
 - stable, 13
 - tangent, 1
 - universel, 2
- formalisable, 29
- forme d'intersection, 20
- formel, 29
- frontière, 7

- groupe de Witt, 19

- homomorphisme de Hurewicz, 11, 16
 - dual, 11

- image par chirurgie, 83
- immersion, 1

- métastable, 6
- modèle, 28
- modélisation, 28
- morphisme d'évaluation, 16
 - rationnelle, 37

- nombres d'Euler-Pontryagin, 34
- nombres de Pontryagin
 - généralisés, 34
 - mixtes, 34
 - normaux, 17

- noyau de chirurgie rationnelle, 85
- orientation
 - complexe de Poincaré, 4
 - paire de Poincaré, 4
 - plongement de Poincaré rationnel, 48
 - variété, 1
- paire de Poincaré, 4
 - rationnelle, 4
 - compatible, 20
- plongement, 1
 - fibré, 79
 - cobordant, 80
 - normal rationnel, 85
 - rationnellement équivalent, xi
- plongement de Poincaré, 7
 - rationnel, 47
- polynôme de Hirzebruch normal, 20
- produit fibré, 28
- produit fibré homotopique, 28
- $\mathbb{Q}$ -local, 23
- $\mathbb{Q}$ -réalisabilité cohomologique par un
 - plongement, 78
- quasi-isomorphisme, 27
- rang
 - de plongement, ix
 - fibration sphérique rationnelle, 29
 - métastable, 6
 - stable, 5
- rationalisation
 - application, 24
 - espace, 23
- remplacement, 27
- réseau
 - d'Euler-Pontryagin, 38
 - de Pontryagin stable, 40
 - entier, 18, 37
- shriek map, 4
- signature, 19, 20
- sous-variété plongée, 1
- sphère d'homotopie rationnelle, xi
- sphérisation, 44
- structure normale, 14
- structure normale rationnelle, 25
 - réalisable, 25
- structure rationnelle, xi
- théorème
 - Browder-Casson-Sullivan-Wall, 8
 - Haefliger, 6
 - isomorphisme de Thom, 3
 - plongement de Whitney, 5
 - signature de Hirzebruch, 20
 - Sullivan, 26
 - Whitehead rationnel, 25
- type d'homotopie rationnelle, 24
- variété, 1
 - elliptique, 11

Glossaire

BSO	classifiant des fibrés vectoriels stables orientés, 2
$BSO(k)$	classifiant des fibrés vectoriels orientés de rang k , 2
$C^*(X)$	espace des cochaînes singulières sur X , 9
$C_*(X)$	espace des chaînes singulières, 9
$D\xi$	fibré en disques associé à ξ , 2
D_X	dualité de Poincaré inverse pour X , 4
$H^*(X; \Lambda)$	cohomologie de X à coefficients dans Λ , 4
$H_*(X; \Lambda)$	homologie de X à coefficients dans Λ , 3
I_f	cylindre de l'application f , 4
I_n	matrice identité d'ordre n , 19
$K_p(g)$	noyau de chirurgie rationnelle, 85
L_r^ν	polynôme de Hirzebruch normal, 20
$L_{p,q}$	pièce de chirurgie, 83
$M \hookrightarrow V$	plongement de M dans V , 1
$M \looparrowright V$	immersion de M dans V , 1
$MSO(k)$	$T\tilde{\gamma}^k$ espace de Thom universel de rang k , 41
$P(\xi)$	classe totale de Pontryagin, 2
$P(f)$	classe totale de Pontryagin du fibré normal putatif de f , 8
$S\xi$	fibré en sphères associé à ξ , 2
TM	espace tangent de la variété M , 1
$T\xi$	espace de Thom associé à ξ , 2
Tf	application induite entre espaces tangents, 1
$W(\mathbb{Q})$	groupe de Witt de l'anneau $\mathbb{Q}$, 19
W_j	cobordisme associé à la donnée de chirurgie j , 84
X_0	rationalisé de l'espace X , 23

$[V]$	classe d'orientation de la variété V , 9
$A_{\mathbf{PL}}$	foncteur $A_{\mathbf{PL}}$, 28
$\mathbb{C}P(n)$	espace projectif complexe de dimension (complexe) n , 9
$\mathbb{H}P(n)$	espace projectif quaternionique de dimension n (sur $\mathbb{H}$), 9
ΛV	algèbre graduée commutative libre sur V , 50
ΩX	espace des lacets sur X , 11
Ω_m^X	groupe des classes de cobordisme des X -structures normales en dimension m , 15
$\Omega_m^X(x)$	$ev^{-1}(\{x\}) \subset \Omega_m^X$, 16
$\Omega_m^{X,A}$	groupe des classes de cobordisme des (X, A) -structures normales en dimension m , 15
$\mathbb{R}P(n)$	espace projectif réel de dimension n , 5
Θ	isomorphisme de Thom, 3
$\alpha(m)$	nombre de 1 dans l'écriture de m en base 2, 5
$\overset{\circ}{M}$	variété M privée de l'image d'une donnée de chirurgie, 83
$\mathcal{E}_{m,k}$	facteur direct de $\mathcal{L}_m(k)$, 39
$\mathcal{L}_m$	réseau des nombres de Pontryagin réalisables, 18
$\mathcal{L}_m(k)$	réseau d'Euler-Pontryagin en dimension m et rang k , 38
$\mathcal{L}_m^{\mathbf{S}}$	réseau de Pontryagin stable, 40
$\cap$	cap-produit, 4
$\chi(M, j)$	image de la variété M par la chirurgie associée à j , 83
$\cong$	difféomorphisme, 5
$\cup_f$	cup-produit fonctionnel, 59
$\dim(M)$	dimension de la variété M , 5
ev	morphisme d'évaluation, 16
$ev_{\mathbb{Q}}$	morphisme d'évaluation rationnelle, 37
$\gamma_{\mathbb{C}}$	fibré canonique sur $\mathbb{C}P(n)$, 38
$\hat{A}$-genre	forme linéaire sur Ω_*^{BSO} , 18
$\nu(f)$	fibré normal de f , 1
ν_M	fibré normal stable de M , 14
$\overset{\circ}{N}$	intérieur de la variété N , 6
∂M	bord de la variété M , 1

$\pi_*(X)$	groupes d'homotopie de X , 11
$\simeq$	quasi-isomorphisme, 27
$\simeq_{\mathbb{Q}}$	équivalence rationnelle, 25
$\sqcup$	union disjointe, 6
$\tau(X, A, x)$	classe de la forme d'intersection sur la paire de Poincaré rationnelle (X, A) orientée par x dans le groupe de Witt, 20
τ_M	fibré vectoriel tangent, 1
$\theta(\xi)$	classe de Thom associée à ξ , 3
$\tilde{\mathcal{L}}_m(k)$	noyau de la rétraction $\mathcal{L}_m(k) \rightarrow \mathcal{L}_m$, 39
$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$	grassmannienne des k -plans orientés de $\mathbb{R}^{n+k}$, 2
$\tilde{\gamma}^k$	fibré universel orienté de rang k , 2
ε^k	fibré trivial de rang k , 39
c_ξ	application classifiante du fibré ξ , 2
$e(\xi)$	classe d'Euler du fibré ξ , 2
$e(f)$	classe d'Euler du fibré normal putatif de f , 10
f^*	application induite par f en cohomologie, 5
$f^\#$	application induite par f sur les cochaînes singulières, 9
$f^!$	application de transfert en cohomologie, 4
f_*	application induite par f en homologie, 4
$f_\#$	application induite par f sur les chaînes singulières, 9
l_X	rationalisation de l'espace X , 23
p'_i	classe de Pontryagin du fibré joint, 34
$p_i(\xi)$	classes de Pontryagin du fibré ξ , 2
$p(\omega)$	nombre de Pontryagin normal s'écrivant $\prod_{i=1}^r p_i^{\omega_i}$, 17