

Thèse annexe présentée le 7 mai 1996 par Monsieur Pierre HANJOUL
pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences.

Lorsque les coûts de transport sont une fonction concave de la distance, dans le problème d'Hotelling (1929), il n'y a pas d'équilibre parfait symétrique en prix et en localisation tel que dans un voisinage des localisations d'équilibre existe un seul équilibre en prix variant continûment avec la localisation des firmes.

Dans ce problème, deux firmes, j et k , proposent un même bien à des consommateurs répartis uniformément sur un ensemble de demande, D , et constituant une demande totale invariable Q . Les deux firmes essaient de maximiser leurs profits en jouant sur leurs localisations (elles peuvent s'installer n'importe où dans un ensemble de localisation, L) et sur les prix, respectivement p_j et p_k , auxquels elles vendent ce bien en leurs emplacements respectifs.

Les demandes adressées aux firmes sont notées Q_j et Q_k ; on a donc

$$Q_j + Q_k = Q . \quad (1)$$

Les consommateurs situés en un point i , par exemple, choisissent de s'approvisionner à la firme où le prix total, $p_j + h(\delta_{ij})$ ou $p_k + h(\delta_{ik})$, est minimal; h est ici la fonction de coût (unitaire) de transport, et δ désigne la distance. Pour les besoins de notre démonstration, nous supposons que h , définie sur $[0, \infty[$, est continue, strictement croissante et deux fois dérivable. Les coûts de production étant supposés nuls ¹, les profits, B_j et B_k , sont donnés par

$$B_j = p_j Q_j$$

$$B_k = p_k Q_k .$$

¹ Ceci pour simplifier l'exposé. En fait, on peut aussi bien supposer l'existence d'un coût marginal de production v constant et indépendant de la localisation; p_j et p_k sont alors les prix réels diminués de v .

Si chaque firme peut réagir à la situation de l'autre en adaptant son prix et sa localisation, il est bien connu qu'il n'y a pas de solution d'équilibre. Cependant, dans la réalité, les décisions de délocalisation sont évidemment beaucoup plus rares que celles de changement de prix, de sorte qu'il paraît plausible de substituer au jeu *simultané* en prix et en localisation un jeu *séquentiel* où les délocalisations ne se produisent qu'une fois atteint un équilibre en prix (équilibre à la Nash-Cournot, c'est-à-dire tels qu'aucune des deux firmes n'améliore son profit en modifiant son prix). Ce qui revient à dire que ne seront considérés, pour chaque configuration spatiale des firmes, que les couples de prix (p_j , p_k) constituant un tel équilibre; en outre, une configuration spatiale ne sera retenue que s'il y existe un seul équilibre en prix. Dans cette version amendée du problème, on se trouve ainsi ramené, après élimination des variables p_j et p_k , à un jeu où les seules décisions effectives sont des décisions de localisation et où l'équilibre, dit *équilibre parfait en prix et en localisation* ('perfect price-location equilibrium'), redevient envisageable; cf. Jaskold Gabszewicz et Thisse (1986).

Restreignant quelque peu cette définition, nous refusons d'office ce titre d'équilibre parfait au cas où les deux firmes verraient leurs localisations confondues. Comme l'a remarqué Bertrand (1883), on doit alors assister à l'effondrement jusqu'à zéro des prix et des profits: une telle situation est tout à fait défavorable aux deux firmes; ce qui est déjà une raison de la rejeter. On voit facilement, par contre, qu'à un équilibre en prix à localisations distinctes, une au moins des deux firmes réalise un profit non nul. Il est donc très vraisemblable que, dans la plupart des problèmes, si nous partons d'une situation d'équilibre en prix à localisations confondues, une des deux firmes peut améliorer son profit en changeant de localisation. Notre redéfinition de l'équilibre parfait paraît donc pertinente et présente l'avantage de nous éviter, si nous voulons éliminer une solution à localisations confondues, de devoir prouver l'existence d'un équilibre en prix si une des deux firmes s'installe en une localisation distincte de celle de sa concurrente.

Dans l'article mentionné dans le titre de la présente thèse annexe, Hotelling considérait la situation suivante : L et D sont confondus et égaux à un segment de droite, et les coûts de transport sont proportionnels à la

distance euclidienne. Hotelling a cru pouvoir établir que les deux firmes auraient intérêt à se placer aussi près que possible l'une de l'autre. Quoique conscient d'être en porte à faux avec la vérité d'évidence énoncée par Bertrand et que nous venons d'évoquer (si les firmes s'installent au même endroit, leurs profits s'annulent), Hotelling pensait que cette objection n'était valable que lorsque les localisations des deux firmes étaient parfaitement confondues; et qu'elle était donc, en fait, négligeable. Comme l'ont étudié de façon détaillée d'Aspremont et al. (1979), l'erreur essentielle d'Hotelling est de n'avoir pas remarqué que toutes les configurations de firmes ne permettent pas d'arriver à un équilibre en prix. En particulier, pour les configurations symétriques qui nous occupent, il n'y a pas d'équilibre en prix lorsque la distance entre les firmes est inférieure à la moitié de la longueur du segment.

Toutefois, dans les articles cités, d'Aspremont et al. et Jaskold Gabszewicz et Thisse ont aussi examiné le cas de coûts de transport proportionnels au carré de la distance. Ainsi qu'ils l'ont montré, il y a alors un unique équilibre en prix pour chaque configuration des firmes; et les deux configurations où une firme occupe une extrémité du segment, et l'autre, l'extrémité opposée, sont les seules configurations d'équilibre parfait en prix et en localisation.

*

Venons-en maintenant à notre propre étude et plaçons-nous pour commencer dans une situation plus générale : nous ne précisons pas encore les ensembles L et D . La position des deux firmes étant donnée, une condition nécessaire pour que (p_j, p_k) constitue un équilibre en prix à la Nash-Cournot, pour autant que les profits soient dérivables par rapport à p_j et p_k dans cette situation, est que

$$\partial B_k / \partial p_k = \partial B_j / \partial p_j = 0 . \quad (2)$$

Cependant, la région Z_k des consommateurs s'adressant à k , par exemple, est décrite par

$$Z_k = \{i \in D; h(\delta_{ij}) - h(\delta_{ik}) \geq p_k - p_j\} .$$

Bien que quatre variables (j, k, p_j, p_k) soient en jeu (nous désignons ici directement par ' j ' et ' k ' l'emplacement des firmes), les demandes Q_j et Q_k peuvent donc s'exprimer alternativement comme fonctions de trois variables seulement : j, k et la différence $p_j - p_k$, que nous noterons Δp . [Notons-en au passage une conséquence importante, dont nous laissons la démonstration au lecteur : si les points de non-dérivabilité de Q_j (ou, équivalentement, de Q_k) par rapport à Δp ne sont que des points d'inflexion ou des discontinuités, alors, dans tout équilibre en prix, soit les égalités (2) sont satisfaites, soit $p_j = Q_j = 0$ ou $p_k = Q_k = 0$ ²]. Tenant compte de (1), nous voyons ainsi que

$$\partial Q_j / \partial p_j = \partial Q_j / \partial \Delta p = - \partial Q_k / \partial \Delta p = \partial Q_k / \partial p_k .$$

Par conséquent, les égalités (2) deviennent

$$\begin{aligned} 0 &= \partial B_j / \partial p_j = Q_j + p_j \partial Q_j / \partial p_j = Q_j + p_j \partial Q_j / \partial \Delta p \\ 0 &= \partial B_k / \partial p_k = Q_k + p_k \partial Q_k / \partial p_k = Q_k + p_k \partial Q_j / \partial \Delta p . \end{aligned} \quad (3)$$

Soustrayant membre à membre, nous obtenons, par (1),

$$\boxed{2Q_j + \Delta p \partial Q_j / \partial \Delta p = Q} . \quad (4)$$

Nous encadrons cette équation où (j et k étant donnés) la seule inconnue est Δp . C'est l'équation de base qui permet de trouver les équilibres en prix qui ne correspondent pas à une non-dérivabilité des demandes par rapport à Δp ³. Une fois résolue, elle nous fournit les prix correspondants solutions de (2), puisque les égalités (3) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} p_j &= - Q_j / (\partial Q_j / \partial \Delta p) \\ p_k &= - Q_k / (\partial Q_j / \partial \Delta p) . \end{aligned} \quad (5)$$

² Ce second type d'équilibre en prix n'est susceptible de se produire que si toute la demande est localisée dans une des deux régions $V_j = \{i: \delta_{ij} \leq \delta_{ik}\}$ et $V_k = \{i: \delta_{ij} \geq \delta_{ik}\}$, les cellules de Voronoi de j et k (dans le plan muni de la distance euclidienne, il s'agit des deux demi-plans limités par la médiatrice de $\{j, k\}$). En effet, si $p_k = 0$ (par exemple), on aura $p_j = \Delta p$; donc $\Delta p \geq 0$, c.-à-d. que $p_j \geq p_k$, ce qui entraîne que $Z_j \subseteq V_j$. Comme $Q_j = Q$, toute la demande est contenue dans V_j . Notons qu'un tel équilibre ne peut donc pas se produire dans les situations symétriques envisagées plus loin.

³ Une autre conséquence de (3) est que, dans cet équilibre en prix, on a, si $\partial Q_j / \partial \Delta p \neq 0$: $Q_j / Q_k = p_j / p_k = \sqrt{B_j / B_k}$.

L'équation (4) a, dans un cas au moins, une solution évidente : l'espace de transport étant le plan muni de la distance euclidienne, si la médiatrice de $\{j, k\}$ sépare l'ensemble de demande D en deux parties contenant la même demande, alors $\Delta p = 0$ est une solution de (4) (pour peu, rappelons-le, que Q_j soit dérivable par rapport à Δp en 0). En effet, lorsque $\Delta p = 0$, la médiatrice de $\{j, k\}$ est la frontière commune des régions Z_j et Z_k , de sorte que l'on a ici $Q_j = Q_k = Q/2$.

En particulier, lorsque l'ensemble de demande possède un axe de symétrie orthogonale, ce cas se rencontrera lorsque j et k sont eux-mêmes symétriques l'un de l'autre par rapport à cet axe. Une telle situation, avec $\Delta p = 0$, est ce que nous appelons une situation *symétrique en prix et en localisation*. Intuitivement (mais seulement intuitivement), on s'attend qu'à la symétrie de D réponde une telle symétrie dans les équilibres parfaits en prix et en localisation.

*

Nous allons rechercher de tels équilibres dans une situation simple, qui est à peu près celle envisagée par Hotelling, d'Aspremont et al. et Jaskold Gabszewicz et Thisse. L'ensemble de demande D est un segment de droite $[ab]$ de longueur 2λ , l'ensemble de localisation L est la droite support de ce segment. Cette droite est munie d'une abscisse, x , telle que, pour tout couple de points (i, i') de L , la distance $\delta_{ii'}$ soit $|x_i - x_{i'}|$; et que l'on ait $x_b = -x_a = \lambda$.



Considérons d'abord seulement la question de l'équilibre en prix dans une situation où $x_j = -x_k < 0$. Comme nous l'avons vu, si Q_j est dérivable par rapport à Δp en 0, $\Delta p = 0$ est une solution de (4). [C'en est même ici la seule solution, comme dans le problème étudié par Hanjoul et Thill (1987) : si $\Delta p < 0$, on a évidemment $Q_j > Q/2$ et donc, puisque $\partial Q_j / \partial \Delta p$ (s'il existe) est ≤ 0 ,

$$2Q_j + \Delta p \partial Q_j / \partial \Delta p > Q ;$$

quantité qui, de même, sera $< Q$ si $\Delta p > 0$]. Lorsque $\Delta p = 0$, $Z_j \cap Z_k$ se réduit à $\{o\}$, ce point étant le milieu du segment, d'abscisse 0. La fonction de coût de transport h étant continue sur $[0, \infty[$, il est clair que, si les variations de x_j , x_k et Δp sont suffisamment petites, $Z_j \cap Z_k$ ne contient qu'un point, soit ℓ , et que ce point reste dans le segment $[ab]$. Tant que les variables sont maintenues dans ce voisinage, on a donc, la densité linéaire de demande ρ étant égale à $Q/2\lambda$ sur $[ab]$,

$$Q_j = \rho (\lambda + x_\ell)$$

$$Q_k = \rho (\lambda - x_\ell) .$$

Il sera donc commode de considérer ici Q_j et Q_k comme des fonctions tantôt de x_j , x_k et Δp , tantôt de la seule variable x_ℓ ; qui sera elle-même fonction des trois variables x_j , x_k et Δp .

En particulier, nous avons

$$\partial Q_j / \partial \Delta p = Q'_j(x_\ell) \partial x_\ell / \partial \Delta p = \rho \partial x_\ell / \partial \Delta p .$$

La dérivée $\partial x_\ell / \partial \Delta p$ s'obtient grâce à la relation

$$h(x_\ell - x_j) - h(x_k - x_\ell) + \Delta p = 0 , \quad (6)$$

qui, différenciée à x_k et x_j constants, donne

$$[h'(x_\ell - x_j) + h'(x_k - x_\ell)] dx_\ell + d\Delta p = 0 ;$$

de sorte que, en posant $\Sigma h' = [h'(x_\ell - x_j) + h'(x_k - x_\ell)]$, on a

$$\partial x_\ell / \partial \Delta p = - 1 / \Sigma h' ;$$

et donc

$$\partial Q_j / \partial \Delta p = - \rho / \Sigma h' .$$

Si h est concave comme proposé dans l'intitulé de cette thèse annexe, ou encore si h est convexe, nous aurons $h'(\delta) > 0$, $\forall \delta > 0$, puisque h est

strictement croissante. Les deux dernières inégalités ne poseront donc pas de problème puisque $\Sigma h'$ sera > 0 .

Nous pouvons maintenant récrire (4) :

$$2 \rho (x_\ell + \lambda) - \Delta p \rho / \Sigma h' = 2 \rho \lambda .$$

L'unique Δp solution de (4) dans le voisinage considéré est donc

$$\Delta p = 2x_\ell \Sigma h' . \quad (7)$$

Pour ce qui est de j , l'éventuel prix d'équilibre correspondant est, par (5),

$$p_j = (\lambda + x_\ell) \Sigma h' ;$$

le profit correspondant est

$$B_j = \rho (\lambda + x_\ell)^2 \Sigma h' . \quad (8)$$

*

Considérons maintenant la question de l'équilibre parfait en prix et localisation. Supposons que, conformément à la thèse énoncée, nous ayons affaire à un équilibre, symétrique en prix ($\Delta p = 0$) et en localisation ($x_j = -x_k$), avec $x_k > 0$; et que, dans un voisinage V de (x_j, x_k) , il existe un et un seul équilibre en prix, dont les prix p_j^* et p_k^* , ainsi donc que leur différence Δp^* , soient des fonctions continues de x_j et x_k dans ce voisinage. Les profits B_j^* et B_k^* , les prix d'équilibre p_j^* et p_k^* et leur différence Δp^* ne sont donc plus fonctions ici que de x_j et x_k . En outre, ce que nous avons dit plus haut concernant le point ℓ , devenu ici ℓ^* , est d'application; sa position, x_ℓ^* , est donc aussi uniquement déterminée ici par x_j et x_k . Cependant, nous voyons que nous pouvons seulement exprimer explicitement B_j^* comme une fonction $U(x_j, x_k, x_\ell^*)$ donnée par (8).

Nous pouvons déjà, à propos d'éventuels équilibres symétriques, noter que, par (8),

$$B_j^*(-x_k, x_k) = 2 \rho \lambda^2 h'(x_k) .$$

Pour autant que $\Delta p = 0$ soit bien une solution d'équilibre en prix ⁴, les firmes sont dans une situation d'autant plus profitable qu'elles sont plus éloignées l'une de l'autre, si h est convexe; au contraire de ce qui se passe si h est concave, auquel cas elles auraient intérêt à être plus proches l'une de l'autre. Ceci ne prouve pas, pourtant, qu'en décidant chacune de leur localisation de manière individualiste, elles agissent de manière conforme à leur intérêt réel.

D'autre part, comme Hotelling, nous nous trouvons devant l'objection suscitée par la remarque de Bertrand : notre formule de B_j^* n'est généralement pas valable lorsque $x_j = x_k = 0$, puisque $B_j^*(0, 0) = 0$. Mais ce n'est par là que nous attaquerons le problème. Sous les hypothèses que nous nous sommes données, le Δp^* donné par (7) fournit l'équilibre en prix; pour voir si j est en équilibre, calculons la dérivée du profit B_j^* par rapport à x_j :

$$\partial B_j^* / \partial x_j = \partial U / \partial x_j + (\partial U / \partial x_\ell^*) \partial x_\ell^* / \partial x_j . \quad (9)$$

Le calcul de $\partial x_\ell^* / \partial x_j$ peut se faire par (6), qui devient ici, vu (7),

$$h(x_\ell^* - x_j) - h(x_k - x_\ell^*) + 2 x_\ell^* \Sigma h' = 0 .$$

Différenciant à x_k fixé, et posant $\Delta h'' = [h''(x_\ell^* - x_j) - h''(x_k - x_\ell^*)]$, nous trouvons

$$(3 \Sigma h' + 2 x_\ell^* \Delta h'') dx_\ell^* - [h'(x_\ell^* - x_j) + 2 x_\ell^* h''(x_\ell^* - x_j)] dx_j = 0 .$$

Dans notre situation doublement symétrique où $x_j = -x_k$, $\Delta p^* = 0$ et $x_\ell^* = 0$, et où, par conséquent, $\Sigma h' = 2h'(x_k)$ (et $\Delta h'' = 0$), cette égalité se réduit à

⁴ Il s'agira d'un équilibre en prix si B_j et B_k sont maximisés par rapport à p_j et p_k , respectivement. Concernant B_j , par exemple, cela signifie que, d'une part, p_j maximise localement B_j en $p_j = p_k$; et que, d'autre part, il n'existe pas d'autre valeur de p_j qui fournisse un profit plus élevé. Dans le cas de coûts de transport linéaires par rapport à la distance, c'est cette seconde condition qui n'est pas remplie si $\delta_{jk} \leq \lambda$. Il existe en effet alors des valeurs de p_j pour lesquelles $Q_j = Q$ et $p_k = Q_k = 0$ qui fournissent un profit B_j plus élevé; cf. d'Aspremont et al. (*op. cit.*) et Jaskold Gabszewicz et Thisse (*op. cit.*) Mais, remarquons-le, aucune de ces valeurs ne maximise localement B_j , car la valeur qui semble à première vue être un tel maximant local est en réalité une discontinuité où le profit chute brusquement; cf. *supra*, note 2.

$$6 h'(x_k) dx_l^* - h'(x_k) dx_j = 0 ,$$

de sorte que, si $h'(x_k) \neq 0$ (ce qui est le cas si h est concave ou convexe, puisque h est strictement croissante),

$$\boxed{(\partial x_l^* / \partial x_j) (-x_k, x_k) = 1/6} ; \quad (10)$$

égalité tout à fait remarquable. Par ailleurs, en $(x_j, x_k, \Delta p)$, nous avons

$$\partial U / \partial x_j = -\rho (\lambda + x_l^*)^2 h''(x_l^* - x_j)$$

$$\partial U / \partial x_l^* = \rho \{ 2 (\lambda + x_l^*) \Sigma h' + (\lambda + x_l^*)^2 \Delta h'' \} ;$$

d'où

$$(\partial U / \partial x_j) (-x_k, x_k, 0) = -\rho \lambda^2 h''(x_k)$$

$$(\partial U / \partial x_l^*) (-x_k, x_k, 0) = 4\rho \lambda h'(x_k) .$$

Au total, nous avons donc, par (9) et (10),

$$(\partial B_j^* / \partial x_j) (-x_k, x_k) = -\rho \lambda^2 h''(x_k) + 2\rho \lambda h'(x_k) / 3 . \quad (11)$$

Si h est concave, on a $h''(x_k) \leq 0$; et, puisque h est aussi strictement croissante, $h'(x_k) > 0$; par conséquent, dans ce cas, $(\partial B_j^* / \partial x_j) (-x_k, x_k) > 0$. La firme j n'est donc pas en équilibre si h est concave : elle a intérêt à se relocaliser plus près de la firme k. Ceci, que les localisations soient permises sur toute la droite comme nous l'avons envisagé, ou que $L = D$, comme dans les articles cités d'Hotelling, d'Aspremont et al. et de Jaskold Gabszewicz et Thisse. Ayant exclu par définition le cas où $x_j = x_k = 0$, nous avons donc prouvé la thèse annoncée.

*

Nous avons formulé celle-ci sur un mode pessimiste. En fait, raisonnant comme l'a fait Hotelling, nous pouvons nous dire que l'équilibre en prix de Bertrand, lorsque $x_j = x_k = 0$, n'est qu'une singularité mathématique : il n'y a pas de sens concret à dire que les deux firmes doivent être localisées exactement au même endroit. Si nous ajoutons au problème la contrainte que $x_j \leq x_k - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, nos résultats n'excluent pas que la configuration où

$x_j = -\varepsilon/2$ et $x_k = \varepsilon/2$ soit en équilibre. C'était déjà la conclusion tirée par Hotelling dans le cas particulier d'une fonction h linéaire. Pour ne pas commettre la même erreur que lui, il faudrait pousser plus loin l'analyse; nous n'avons voulu opérer ici qu'une percée au cœur de ce problème complexe.

Remarquons encore que, bien entendu, l'égalité (11) ne contredit pas les conclusions d'Aspremont et al. et de Jaskold Gabszewicz et Thisse concernant le cas quadratique. Si $h(\delta) = \delta^2$, (11) indique en effet que $(\partial B_j^* / \partial x_j) (-x_k, x_k) < 0$ si $x_k < 3\lambda/2$, condition qui est évidemment vérifiée si $L = D$; les firmes en équilibre doublement symétrique ont ici intérêt à s'éloigner l'une de l'autre, ce qui les coince aux extrémités opposées de l'intervalle. Plus généralement, si $h(\delta) = \delta^a$, (11) laisse penser que l'on pourrait aboutir à la même conclusion pour $a \geq 5/3$; et que, si L est à nouveau étendu à toute la droite, un équilibre parfait en prix et localisation pourrait être atteint pour $x_k = -x_j = 3\lambda(a-1)/2$ lorsque $a > 1$, c'est-à-dire lorsque ce type de fonction est strictement convexe.

Références

- d'Aspremont, C., J. Jaskold Gabszewicz and J.-F. Thisse, 1979, On Hotelling's 'Stability in competition', *Econometrica* 47, 1045-1050.
- Bertrand, J., 1883, Théorie mathématique de la richesse sociale, *Journal des Savants* 48, 499-508.
- Hanjoul, P. and J.-C. Thill, 1987, Elements of planar analysis in spatial competition, *Regional Science and Urban Economics* 17, 423-439.
- Hotelling, H., 1929, Stability in competition, *Economic Journal* 39, 41-57.
- Jaskold Gabszewicz, J. and J.-F. Thisse, 1986, Spatial competition and the location of firms, *Fundamentals of Pure and Applied Economics* 5, 1-71.