

Chapitre 7

Etude de l'influence de l'erreur d'estimation

7.1. Introduction.

Au chapitre précédent, nous avons estimé les paramètres barycentriques intervenant dans le modèle dynamique du robot PUMA 562. Nous cherchons maintenant à évaluer la précision d'estimation. Malheureusement, les paramètres estimés ne peuvent être comparés avec les paramètres exacts car ces derniers nous sont inconnus. Seule est accessible une comparaison avec les résultats des travaux de Tarn (Tarn 85) et de Armstrong (Armstrong 86) (voir tableau 6.5) . Celle-ci reste toute relative car les paramètres ainsi évalués sont également entachés d'erreurs, cfr § 6.6.

Une autre voie pour réaliser cette étude est d'implanter un algorithme de commande utilisant les paramètres estimés sur un manipulateur réel et d'étudier l'erreur de régulation. Cette technique est utilisée par An, Atkeson et Hollerbach (An 88). Hélas, cette solution est hors de notre portée car son implantation nécessite un investissement important. Par conséquent, nous allons travailler par simulation numérique. Dans ce cas, ne connaissant pas les paramètres réels, nous ne pouvons qu'étudier l'influence de l'*erreur d'estimation* sur la régulation en choisissant les *valeurs nominales estimées* comme référence. C'est à cette tâche que nous allons consacrer ce chapitre. Il faut toutefois signaler que les résultats d'une telle étude seront bien évidemment limités au cas du robot traité et de la trajectoire choisie.

7.2. Principe de la simulation

Le schéma de principe de la simulation est représenté à la figure 7.1. Comme nous ne connaissons pas les valeurs exactes des paramètres barycentriques, nous prendrons le vecteur δ_{du} des paramètres estimés comme référence. Dès lors, c'est ce vecteur qui est utilisé pour calculer le modèle dynamique du manipulateur. Le régulateur quant à lui ne connaît que des paramètres entachés d'erreurs représentés par le vecteur $\tilde{\delta}_{du}$ différent de δ_{du} . Nous allons simuler l'erreur de régulation sur une trajectoire donnée en faisant varier séparément chaque terme de $\tilde{\delta}_{du}$ suivant le principe :

$$\text{pour } i=1 \text{ à } N_{du} \text{ et } i \neq j \quad \tilde{\delta}_{du}(i) = \delta_{du}(i) \quad (7.1a)$$

$$\text{pour } i=j \quad \tilde{\delta}_{du}(i) = \delta_{du}(i) + \varepsilon(i) \quad (7.1b)$$

avec $\varepsilon(i)$ fonction de l'intervalle de confiance d'estimation.

Rappelons que δ_{du} représente les paramètres barycentriques estimés et δ_{dk} les paramètres barycentriques supposés connus. Dans notre cas δ_{dk} contient uniquement les inerties principales des actionneurs tandis que δ_{du} contient pour sa part les paramètres des segments. Nous définissons alors:

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_{du} \\ \delta_{dk} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

De la sorte, nous étudions séparément l'influence de chaque paramètre et de son erreur sur la précision de régulation.

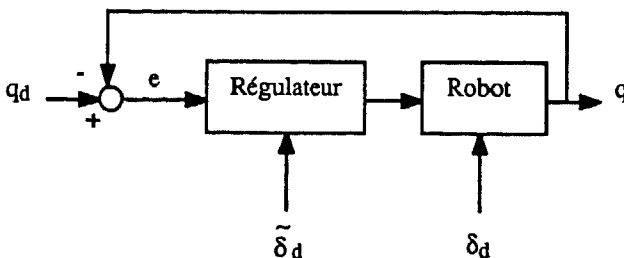


fig. 7.1 Principe de la simulation.

7.3. Le régulateur.

Le nombre de régulateurs présentés dans la littérature est considérable, notre choix conditionnera bien évidemment les résultats de nos simulations. Notre objectif n'étant pas de comparer des régulateurs entre eux, nous nous contentons d'en appliquer un seul. Notre choix s'est porté sur l'algorithme du *couple calculé* avec un régulateur PD. De nombreux auteurs ont travaillé sur cet algorithme, nous ne citerons que Gilbert et Ha (Gilbert 84) qui ont montré que cette méthode est robuste pour de petites erreurs de modélisation et Khosla (Kosla 86) qui lui a montré que cette méthode donnait des précisions comparables à celles de l'*action prévisionnelle*. Nous avons conscience que notre choix est arbitraire. Mais ce type de régulateur nous semble être la base de la régulation dynamique classique (non adaptative). Il en existe de nombreuses variantes permettant d'en améliorer les performances et la vitesse d'exécution. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux de Gorez et O'shea (Gorez 89). Il nous faut également mentionner les régulations de type adaptative qui sont considérées comme plus performantes, mais qui sortent largement du cadre de nos objectifs.

Le schéma bloc du système est présenté à la figure 7.2. Les gains du régulateur ont été choisis en supposant la régulation idéale c'est-à-dire en supposant que $\tilde{\delta}_d = \delta_d$.

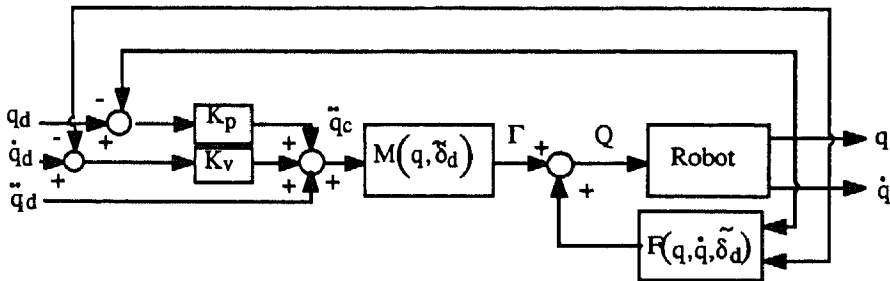


fig. 7.2 Schéma bloc du système.

Le modèle dynamique du manipulateur s'écrit:

$$M(q, \delta_d) \ddot{q} + F(q, \dot{q}, \delta_d) = Q \quad (7.3)$$

dès lors nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} M(q, \delta_d) \ddot{q} &= Q - F(q, \dot{q}, \delta_d) \\ &= \Gamma - F(q, \dot{q}, \delta_d) + F(q, \dot{q}, \tilde{\delta}_d) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Si on suppose $\tilde{\delta}_d = \delta_d$, on obtient:

$$M(q, \delta_d) \ddot{q} = M(q, \delta_d) \ddot{q}_c$$

$$\begin{aligned}
 &= M(q, \delta_d) (\ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) \\
 &= M(q, \delta_d) (\ddot{q}_d + K_v \dot{e}_d + K_p e_d)
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Nous nous trouvons ainsi en présence d'un système du second ordre. En nous basant sur les travaux de Paul (Paul 79), nous choisissons alors les gains du régulateur :

$$\text{Fréquence de coupure: } \omega_n < \frac{1}{2\sqrt{2}} \omega_0$$

avec ω_0 correspondant au premier mode propre de vibration du manipulateur, dans notre cas 20 Hz (voir § 7.3)

$$\text{soit } \omega_n = 33$$

$$\text{Amortissement: } \xi = 0.9$$

Nous obtenons ainsi $K_p = 1089$ et $K_v = 60$ et

$$K_p = \begin{pmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_p & 0 \\ 0 & 0 & K_p \end{pmatrix}$$

$$K_v = \begin{pmatrix} K_v & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & K_v \end{pmatrix}$$

7.4. La trajectoire

Le choix de la trajectoire de simulation joue un rôle primordial sur les résultats de simulation. Nous avons choisi arbitrairement la *trajectoire carrée* représentée à la figure 7.3 , dont les sommets définis par rapport au point O^1 sont:

$$S_1 = [\hat{x}^0]^t \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix} \quad S_2 = [\hat{x}^0]^t \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} \quad S_3 = [\hat{x}^0]^t \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} \quad S_4 = [\hat{x}^0]^t \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ -200 \end{pmatrix}$$

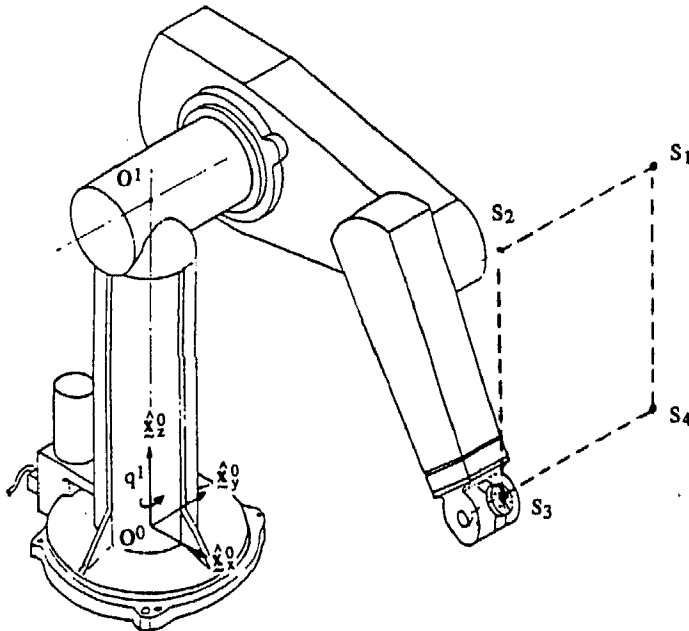


fig 7.3 La trajectoire de simulation.

La trajectoire est donc composée de 4 *segments de droite* générés par une loi de type bang-bang (accélération maximale, accélération nulle, décélération maximale et arrêt), voir figure 7.4. Celle-ci est caractérisée par les performances maximales du manipulateur pour une trajectoire linéaire (correspondant à une vitesse de 100%), voir tableau 7.1.

accélération maximale	k_a	$2.090 \frac{m}{sec^2}$
vitesse maximale	k_v	$0.470 \frac{m}{sec}$
temps d'accélération	τ	0.225 sec

tab. 7.1 Performances opérationnelles du PUMA 562 (Unimation).

Nous pouvons sur base du tableau 7.1 calculer la trajectoire opérationnelle optimale en temps. Celle-ci doit ensuite être transformée en coordonnées articulaires grâce au modèle géométrique et cinématique. A ce stade, il faut vérifier que la trajectoire calculée est compatible avec les performances des actionneurs, voir tableau 7.2.

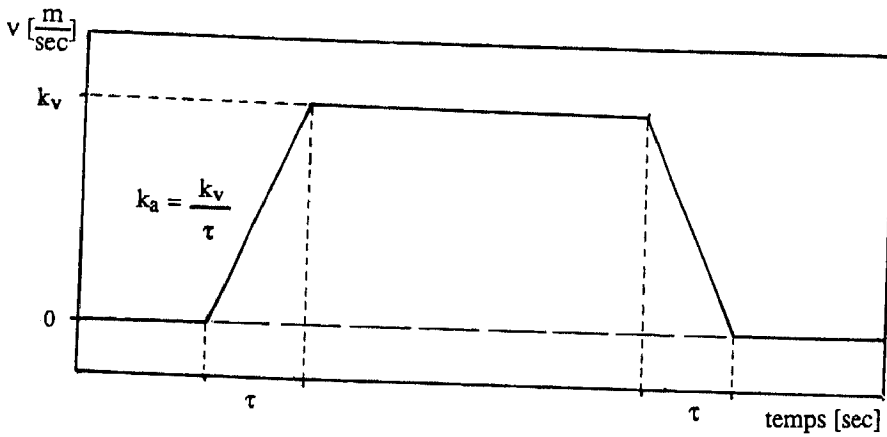


fig 7.4 Evolution de la vitesse linéaire sur un des segments de droite de la trajectoire.

			axe 1	axe2	axe 3
accélération maximale	k_a	$\frac{m}{sec^2}$	1.43	0.94	2.13
vitesse maximale	k_v	$\frac{m}{sec}$	7.52	5.57	12.69
temps d'accélération	τ	sec	0.225		

tab. 7.2 Performances articulaires du PUMA 562 (Unimation).

Notre cas conduit à un dépassement d'environ 33 % sur la vitesse maximale du deuxième segment. Pour tenir compte de cette limitation nous diminuons la vitesse en posant $k_v = 0.315 \frac{m}{sec}$ et $k_a = 1.400 \frac{m}{sec^2}$. Le temps de parcours de la trajectoire ainsi obtenue est de 5.98 sec + 0.3 sec x 4 (pause entre chaque segment) soit 7.18 sec.

7.5. Simulation

Le régulateur a été calculé en supposant $\tilde{\delta}_d \neq \delta_d$, c'est-à-dire que le régulateur dispose des valeurs "exactes" des paramètres caractérisant le modèle. Dans le cas contraire, la relation 7.5 n'est plus valable, et l'expression 7.4 devient:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q, \delta_d) \left(M(q, \tilde{\delta}_d) \ddot{q}_c - F(q, \dot{q}, \delta_d) + F(q, \dot{q}, \tilde{\delta}_d) \right)$$

ou encore:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q, \delta_d) \left(M(q, \tilde{\delta}_d) (\ddot{q}_d + K_v(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) - F(q, \dot{q}, \delta_d) + F(q, \dot{q}, \tilde{\delta}_d) \right) \quad (7.6)$$

Cette expression a été intégrée sur la trajectoire pour différentes valeurs de $\tilde{\delta}_{du}$ suivant le principe de la formule (7.1) en choisissant:

$$\tilde{\delta}_{du}(i) = \delta_{du}(i) + 3\sigma(i) \quad (7.7 \text{ a})$$

$$\tilde{\delta}_{du}(i) = \delta_{du}(i) - 3\sigma(i) \quad (7.7 \text{ b})$$

$$\tilde{\delta}_{du}(i) = 0 \quad (7.7 \text{ c})$$

Les deux premiers cas (7.7 a) et (7.7 b) correspondent aux erreurs maximales pour un intervalle de confiance à 99 % dans le cas d'une distribution Gaussienne. Le troisième cas (7.7 c) revient à négliger purement et simplement le paramètre considéré.

7.6. Résultats et interprétations.

Rappelons que toutes les considérations qui suivent ne s'appliquent qu'à la trajectoire d'essai. Il faut donc être prudent en généralisant ces résultats.

La première série de simulations effectuée tient compte des performances annoncées par le constructeur (tab. 7.1). A titre d'exemple, nous présentons à la figure 7.5 l'évolution de la trajectoire autour du sommet S_3 pour le cas $\tilde{\delta}_{du}(8) = 0$.

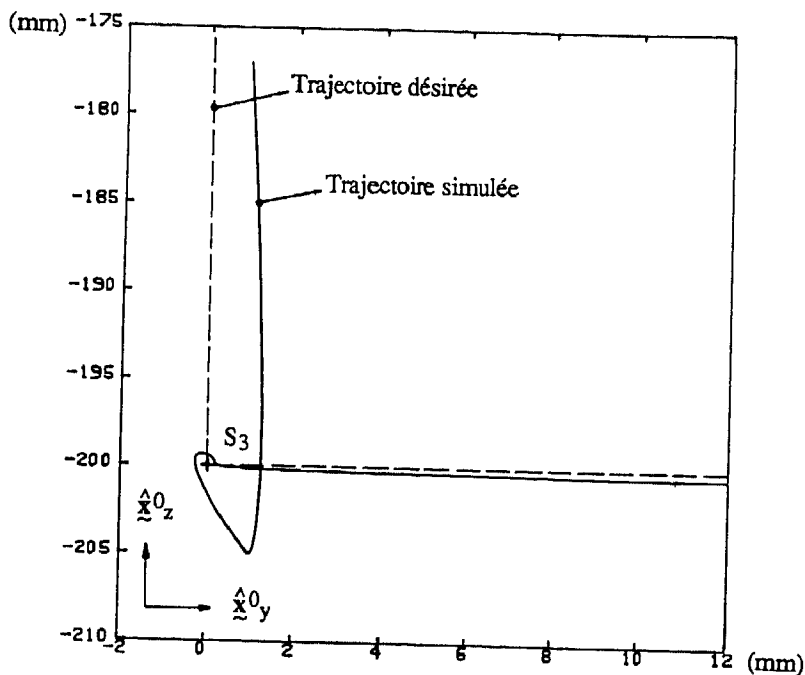


fig. 7.5 Erreur simulée pour le cas $\tilde{\delta}_{du}(8) = 0$.

Pour comparer les résultats, nous avons choisi comme critère de référence l'erreur maximale calculée sur la trajectoire. Les résultats sont présentés dans les trois colonnes de gauche du tableau 7.3.

Erreurs maximales simulées en mm						
Contraintes cinématiques	$k_v = 0.315 \frac{m}{sec}$ et $k_a = 1.400 \frac{m}{sec^2}$		$k_v = 0.630 \frac{m}{sec}$ et $k_a = 2.800 \frac{m}{sec^2}$			
Paramètres du modèle	Paramètres du régulateur $\tilde{\delta}_{du(i)}$					
	$\delta_{du(i)+3\sigma(i)}$	$\delta_{du(i)-3\sigma(i)}$	0	$\delta_{du(i)+3\sigma(i)}$	$\delta_{du(i)-3\sigma(i)}$	0
$\delta_{du(1)} = K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + K_{zz}^3$	0.16	0.22	2.07	0.40	0.45	4.25
$\delta_{du(2)} = K_{xx}^2 - K_{zz}^2$	0.13	0.15	0.87	0.39	0.39	1.90
$\delta_{du(3)} = K_{yy}^2$	0.09	0.10	1.39	0.17	0.19	2.83
$\delta_{du(4)} = K_{yz}^2 - mb_y^3 l_z^{23}$	0.06	0.06	0.22	0.16	0.16	0.63
$\delta_{du(5)} = K_{xx}^3 - K_{zz}^3$	0.23	0.38	0.25	0.64	0.81	0.54
$\delta_{du(6)} = K_{yy}^3$	0.18	0.24	1.95	0.38	0.50	4.06
$\delta_{du(7)} = K_{yz}^3$	0.13	0.13	0.16	0.26	0.26	0.31
$\delta_{du(8)} = mb_z^2$	0.50	0.50	13.96	0.50	0.50	13.96
$\delta_{du(9)} = mb_z^3$	0.65	0.65	6.35	0.65	0.65	6.40

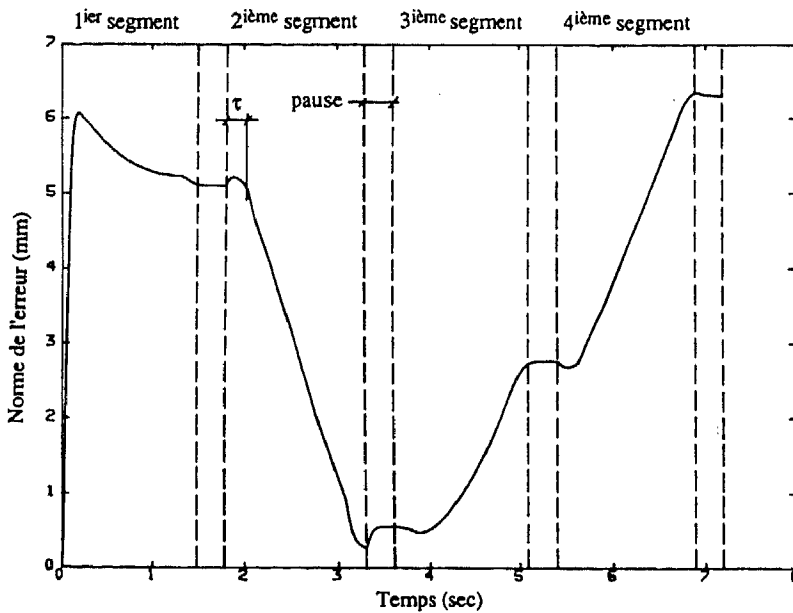
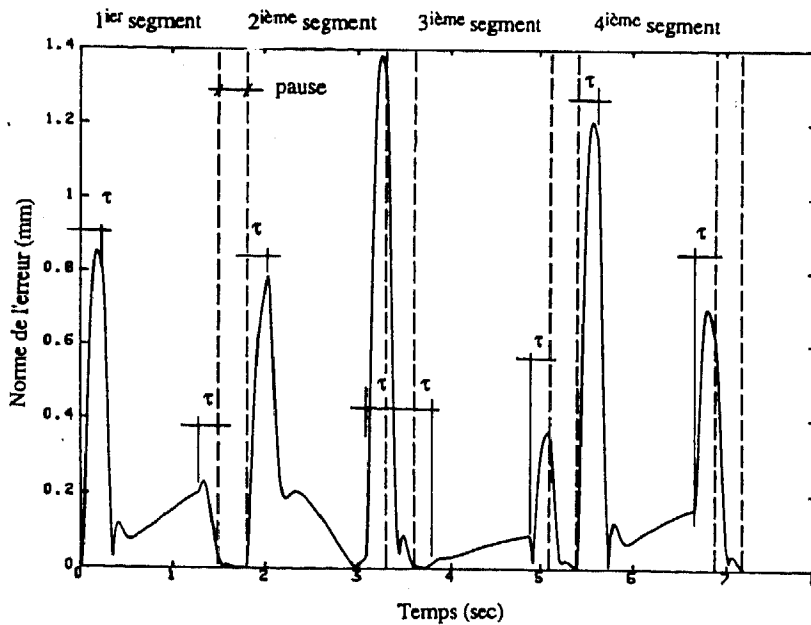
tab. 7.3 Etude de l'influence des paramètres sur l'erreur maximale simulée (en mm)

7.6.1. Influence relative des paramètres.

Grâce aux deux premières colonnes du tableau 7.3, l'influence de l'incertitude d'estimation peut être mise en évidence: elle conduit à une erreur variant de 0.06 mm à 0.65 mm suivant le paramètre étudié. Ces valeurs sont à comparer avec la précision absolue annoncée par le constructeur ± 0.1 mm. Une classification basée sur l'erreur maximale simulée n'a qu'un intérêt limité. Nous pouvons néanmoins classer les paramètres suivant deux catégories.

Premièrement, les éléments des vecteurs barycentriques ($\delta_{du(8)}$ et $\delta_{du(9)}$) conduisent aux erreurs les plus importantes, mais surtout à des *erreurs statiques* qu'il faut obligatoirement compenser, ces termes ne peuvent donc pas être négligés (voir un exemple à la figure 7.6). Remarquons que les constructeurs compensent effectivement ces erreurs. Par exemple, dans le cas du robot SIRTES (Renault Automation) le constructeur ajuste, pour une configuration moyenne et une charge donnée, un couple compensateur de la gravité (cette compensation n'est donc exacte que pour la configuration et la charge de référence). Plus généralement, les erreurs statiques sont compensées par l'introduction d'un intégrateur dans la boucle de régulation.

Deuxièmement, les éléments des tenseurs barycentriques produisent des erreurs maximales simulées deux à dix fois plus faibles que dans le cas des vecteurs barycentriques. Si l'on ne tient compte dans le modèle de régulation que des vecteurs barycentriques à l'exception des tenseurs, on obtient une erreur maximale simulée de 5.55 mm. De plus, comme ils n'entraînent pas d'erreur statique (voir un exemple à la figure 7.7), on peut être tenté de négliger certains de ces paramètres en fonction du niveau d'erreur admissible pour l'application envisagée. Afin d'étudier cette possibilité, nous comparons les deux premières colonnes du tableau 7.3 à la troisième qui représente le cas où l'on a négligé un paramètre dans le régulateur.

fig. 7.6 Norme de l'erreur simulée pour le cas $\tilde{\delta}_{du}(9) = 0$.fig 7.7 Norme de l'erreur simulée cas $\tilde{\delta}_{du}(3) = 0$.

En négligeant les éléments des vecteurs barycentriques, nous arrivons à des erreurs simulées catastrophiques qui confirment les propos tenus ci-dessus. Par contre les résultats obtenus en négligeant les éléments des tenseurs barycentriques sont fort variables d'un paramètre à un autre. Pour les paramètres $\delta_{du}(1)$, $\delta_{du}(2)$, $\delta_{du}(3)$, $\delta_{du}(4)$ et $\delta_{du}(6)$ l'erreur simulée est multipliée par un facteur compris entre 4 et 15. Par conséquent, la connaissance même à $\pm 3\sigma$, améliore la précision de la simulation. A l'opposé, l'erreur simulée pour les paramètres $\delta_{du}(5)$ et $\delta_{du}(7)$ reste du même ordre de grandeur. Donc, la connaissance à $\pm 3\sigma$ de ces paramètres n'améliore pas la précision ou encore l'omission des ces paramètres ne dégrade pas celle-ci. Aussi, il peut être envisagé de les négliger. Il faut néanmoins remarquer que ces deux paramètres, connus à $\pm 3\sigma$ ou négligés, conduisent à des erreurs simulées plus importantes que les paramètres $\delta_{du}(3)$ et $\delta_{du}(4)$ connus à $\pm 3\sigma$.

Signalons enfin que si l'application envisagée nécessite des erreurs inférieures à celles présentées dans les trois premières colonnes du tableau 7.3, il faut améliorer la précision de l'estimation des paramètres ou tout au moins celle des plus gênants pour la régulation. Nous retrouvons ainsi le problème du choix de la trajectoire d'estimation.

7.6.2. Influence de chacun des termes.

Les commentaires tenus dans le paragraphe précédent ont pour objectif de réduire le nombre de paramètres à estimer. Nous obtenons donc un gain au niveau de l'estimation (moins de paramètres à estimer), mais également un gain important au niveau de la commande. Cette réduction est évidemment fondamentale dans un problème de régulation (avec ou sans estimation) car elle permet de réduire le temps calcul. Ayant négligé tous les paramètres voulus, il est encore possible de réduire le modèle en négligeant cette fois des termes et non plus des paramètres. Dans ce cas, le gain se situe principalement au niveau de la régulation.

Plutôt que d'entreprendre une étude terme par terme, ce qui représente un travail fastidieux dont les résultats seront très dépendants de la trajectoire test, nous préférons étudier les termes par famille. Reprenons l'expression (7.3) du modèle dynamique:

$$M(q, \delta_d) \ddot{q} + F(q, \dot{q}, \delta_d) = Q$$

cette expression peut se réécrire en fonction de δ_{du} et δ_{dk} :

$$(M_{du}(q, \delta_{du}) + M_{dk}(q, \delta_{dk})) \ddot{q} + (F_{du}(q, \dot{q}, \delta_{du}) + F_{dk}(q, \dot{q}, \delta_{dk})) = Q$$

$$M_{du}(q, \delta_{du}) \ddot{q} + F_{du}(q, \dot{q}, \delta_{du}) + M_{dk}(q, \delta_{dk}) \ddot{q} + F_{dk}(q, \dot{q}, \delta_{dk}) = Q \quad (7.8)$$

Dans l'expression (7.8) nous ne nous intéressons pas aux termes de M_{dk} et F_{dk} fonctions du vecteur connu δ_{dk} . Le développement de M_{du} et F_{du} , nous permet de classer les termes en quatre grandes familles:

- les termes diagonaux de la matrice de masse (fonction des accélérations)
- les termes non diagonaux de la matrice de masse (fonction des accélérations)
- les termes quadratiques des vitesses
- les termes de gravité (indépendants des vitesses et des accélérations)

Ainsi, pour chaque paramètre barycentrique $\delta_{du}(i)$ nous présentons dans le tableau 7.4 l'erreur maximale simulée en négligeant successivement les termes des quatre familles.

Erreur maximale simulée en mm					
Paramètres étudiés	Termes négligés				
	gravité	diag. de M	non diag. M	$\dot{q}\dot{q}$	TOUS
$\delta_{du}(1)$	/	2.07	/	/	2.07
$\delta_{du}(2)$	/	0.86	/	0.38	0.87
$\delta_{du}(3)$	/	1.38	/	/	1.38
$\delta_{du}(4)$	/	/	0.20	0.12	0.22
$\delta_{du}(5)$	/	0.24	/	0.12	0.25
$\delta_{du}(6)$	/	1.21	0.86	/	1.95
$\delta_{du}(7)$	/	/	0.16	0.02	0.16
$\delta_{du}(8)$	13.96	/	/	/	13.96
$\delta_{du}(9)$	6.31	0.11	0.34	0.13	6.35

$\delta_{du}(1) \text{ à } \delta_{du}(9)$	16.42	7.76	0.51	0.29	17.44
$\delta_{du}(1) \text{ à } \delta_{du}(9)$	/	/	0.51		/
$\delta_{du}(1) \text{ à } \delta_{du}(9)$	/	7.22			/
$\delta_{du}(1) \text{ à } \delta_{du}(9)$	17.44				/

tab. 7.4 Etude de l'influence des termes sur l'erreur maximale simulée.

Parmi tous les paramètres présents dans le modèle dynamique, seul $\delta_{du}(9)$ intervient dans les quatre familles de termes que nous avons définies. Les autres paramètres sont présents dans une seule ou dans deux familles. Considérons une ligne quelconque du tableau 7.4 représentant l'effet dû à un paramètre. En regardant sur cette ligne les colonnes à partir de la gauche vers la droite, nous constatons que la première valeur que nous rencontrons équivaut quasiment à celle de la troisième colonne du tableau 7.3 (cas où le paramètre est posé nul dans le régulateur). Les autres éléments de la ligne sont d'un ordre de grandeur inférieur. Remarquons, que cette conclusion peut facilement être étendue au cas des inerties des actionneurs (Rappelons que si elles n'apparaissent pas dans cette étude, c'est parce que nous les avons supposées connues.). En effet, nous savons que les inerties des actionneurs apparaissent multipliées par le

carré du rapport de réduction des réducteurs pour les termes diagonaux de la matrice de masse et simplement par le rapport de réduction pour les autres termes.

Plus globalement, nous pouvons classer par ordre d'influence décroissante les termes: termes de *gravité*, termes *diagonaux* de la matrice de masse, termes *non diagonaux* de la matrice de masse et enfin les termes *de vitesses*. A titre d'exemple, nous avons calculé l'erreur maximale en négligeant, pour tous les paramètres, tous les termes d'une même famille (cfr dernières lignes du tableau 7.4). Comme nous pouvions nous y attendre, il apparaît que l'erreur due aux termes de gravité est de loin la plus importante.

7.6.3. Influence de la vitesse.

Enfin, nous étudions l'influence de la vitesse sur l'erreur d'estimation. Les contraintes articulaires du PUMA nous imposent une vitesse de déplacement de $0.315 \frac{m}{sec}$. Cette valeur est très faible comparée à celle annoncée par certains constructeurs qui n'hésitent pas à présenter des vitesses de l'ordre du mètre par seconde. Aussi, nous avons réalisé une deuxième série de simulation en doublant la vitesse maximale admissible par le PUMA, soit $k_v = 0.630 \frac{m}{sec}$ et $k_a = 2.800 \frac{m}{sec^2}$. Les résultats obtenus, sont présentés dans les colonnes 4 à 6 du tableau 7.3.

Dans ces conditions, nous nous attendons à voir l'erreur multipliée par un facteur compris entre 2 et 4 pour les composantes des tenseurs barycentriques et inchangée pour les éléments des vecteurs barycentriques. En effet, les termes des équations du modèle dynamique apparaissent soit linéairement avec les accélérations, soit quadratiquement par rapport aux vitesses et enfin fonction de la seule gravité. Les simulations confirment nos attentes avec une erreur maximale pour les paramètres inertiels variant dans un rapport 2 à 3. Signalons enfin que la vitesse ne modifie pas les interprétations énoncées dans les paragraphes précédents.

7.7. Conclusions

L'objectif premier de ce chapitre était d'étudier l'erreur d'estimation. Comme il ne nous était possible ni de comparer nos résultats avec des valeurs de références, ni d'implémenter un algorithme de régulation sur un robot réel, nous avons travaillé par simulation numérique. Les résultats ainsi obtenus sont donc limités au manipulateur et à la trajectoire étudiés. Il faut également rappeler que pour nos simulations, nous avons supposé la géométrie du manipulateur parfaitement connue.

Le premier enseignement que nous pouvons tirer de nos simulations concerne la précision d'estimation. *L'imprécision d'estimation (3σ) conduit à des erreurs de régulation raisonnable (de l'ordre de 0.5 mm).* De plus, nous avons utilisé dans nos simulations un régulateur basé sur la méthode du couple calculé. Par conséquent, l'utilisation d'un régulateur avec action intégrale (pour compenser les erreurs statiques, etc ...) devrait permettre d'améliorer encore ces résultats. En final, il appartient à l'utilisateur de décider si ces erreurs sont oui ou non compatibles avec l'application.

Deuxièmement, nous nous sommes penchés brièvement sur le problème de la réduction du modèle. Nous n'avons pas réalisé une étude exhaustive sur ce sujet, mais nous pouvons tout de même tirer certaines conclusions qui ne sont évidemment applicables qu'au type de manipulateur étudié. Nous proposons de réduire le modèle en deux étapes.

Premièrement, nous négligeons les paramètres les moins influents. Le critère de choix utilisé est de comparer deux simulations, l'une supposant une erreur de $\pm 3\sigma$ sur un paramètre, et l'autre supposant ce paramètre purement et simplement négligé. Si les deux erreurs maximales de simulation sont semblables, nous en déduisons que la connaissance à $\pm 3\sigma$ de ce paramètre n'améliore pas la précision de la régulation et par conséquent il peut être négligé.

Une fois réduit le jeu de paramètres barycentriques, nous pouvons encore réduire le modèle en jouant sur les différents termes. Le gain que l'on attend de cette nouvelle réduction est principalement un gain de temps pour le calcul du modèle, ce qui peut être important pour une application en temps réel. Les termes peuvent être classés en quatre familles que nous présentons dans un ordre d'influence décroissant: les termes de gravité, les termes diagonaux de la matrice de masse, les termes non diagonaux de la matrice de masse et enfin les termes quadratiques dans les vitesses.

Chapitre 8

Conclusions

Les paramètres qui caractérisent un robot manipulateur sont de natures très diverses. Nous avons distingué les paramètres caractéristiques des joints (actionneur et articulation), les paramètres des segments (géométrie et répartition de masse) et enfin les paramètres inertiels de la charge. Ces paramètres peuvent avoir une incidence sur la précision statique ou dynamique. Nous avons subdivisé ces trois familles suivant leur appartenance au modèle géométrique ou au modèle dynamique. Les paramètres géométriques des segments et les paramètres statiques des joints (géométrie, souplesse, ...) sont présents à la fois dans les deux modèles. Par contre, les paramètres inertiels des segments et de la charge ainsi que certains paramètres des joints (les frottements, ...) n'apparaissent que dans le modèle dynamique. L'objectif de notre étude est d'estimer les paramètres qui n'interviennent que dans le modèle dynamique en supposant les paramètres statiques connus.

Les paramètres dynamiques peuvent se distinguer en fonction de leur évolution dans le temps. La charge, et donc les paramètres qui la caractérisent, changent à chaque nouvelle opération. Ils doivent donc être estimés très fréquemment. Les frottements varient lentement en fonction de l'usure de la transmission. Une estimation régulière, par exemple lors de l'entretien, peut être suffisante. Certains préféreront les estimer plus régulièrement en même temps que les caractéristiques de la charge. Enfin, les paramètres des segments sont invariables durant la vie du manipulateur. Ils ne doivent donc être estimés qu'une seule fois à la réception du manipulateur. C'est sur ces derniers types de paramètres que nous nous sommes principalement attachés. Néanmoins, les principes de modélisation et d'estimation que nous avons étudiés peuvent rapidement être adaptés aux paramètres caractéristiques de la charge.

Choix des paramètres

Dans le deuxième chapitre nous avons montré sur un exemple que les paramètres inertiels (masses, moments du premier ordre et moments du second ordre) sont *indépendants* entre eux et apparaissent *linéairement* dans les équations du modèle dynamique. Ces paramètres ne sont malheureusement pas toujours identifiables. Nous avons donc dans les troisième et quatrième chapitres, recherché des combinaisons identifiables.

Dans le troisième chapitre, nous avons introduit un premier type de combinaisons basé sur la définition des corps augmentés et des paramètres barycentriques qui y sont associés. Les paramètres barycentriques sont des *combinaisons indépendantes* et *constantes* des paramètres inertiels classiques basées uniquement sur les caractéristiques de l'arborescence de la structure. Ils apparaissent *linéairement* dans les équations du modèle et constituent des *combinaisons indispensables* à l'estimation. Malheureusement, comme ils ne tiennent pas compte de la mobilité des segments, c'est-à-dire des caractéristiques des articulations, ils ne forment pas nécessairement un jeu identifiable.

La recherche d'un jeu de paramètres identifiables est réalisée dans le quatrième chapitre. L'analyse des équations articulaires de deux corps liés par une articulation rotoïde a mis en évidence des *regroupements* dans le tenseur d'inertie de l'enfant et des *reports* de paramètres de l'enfant sur le parent. Les deux moments d'inertie suivant les directions perpendiculaires à l'axe de l'articulation se regroupent à cause de la rotation du tenseur d'inertie. Les reports sont de deux types. Le premier est un report sur le parent d'un moment d'inertie suivant une des directions transversales. Le deuxième est le report de la composante axiale du vecteur barycentrique. La notion de corps augmenté déplacé permet d'interpréter le report de cette composante. Cette nouvelle notion est une variante des corps augmentés qui consiste à placer l'articulation à hauteur du centre de masse.

Dans le cas d'une articulation prismatique, il est évident que le tenseur d'inertie n'apparaît pas dans l'équation de l'enfant. Il est donc intégralement reporté sur le tenseur du parent.

Sur base cette de étude, nous avons défini des règles de combinaisons qui doivent s'appliquer récursivement en partant de l'extrémité du manipulateur vers la base. Ces règles ont été démontrées a posteriori sur les équations, elles peuvent néanmoins être *appliquées a priori* avant de générer les équations du mouvement. En procédant de la sorte, on simplifie le jeu de paramètres avant de générer le modèle. Nous obtenons ainsi de nouveaux paramètres assimilables à des paramètres barycentriques et qui en possèdent toutes les propriétés. Remarquons enfin, que le logiciel ROBOTRAN (Maes 90) de génération des équations est encore applicable sur les paramètres combinés.

Identification externe

Tous les auteurs excepté Mukerjee (Mukerjee 84) utilisent un dispositif de mesure interne, c'est-à-dire basé sur les mesures proprioceptives, qui sont habituellement utilisées dans la boucle de régulation du manipulateur. Ils mesurent les variables cinématiques par l'intermédiaire des positions des actionneurs et les efforts de liaisons par le courant d'alimentation des actionneurs. Le modèle d'identification correspond donc au modèle de commande, c'est-à-dire au modèle dynamique classique, qui est fonction des paramètres barycentriques et des coefficients de frottements.

Nous avons montré que le désavantage majeur de cette approche, est d'associer l'estimation de ces deux familles de paramètres. Les frottements étant par nature difficiles à modéliser, ils risquent de dégrader l'estimation des paramètres barycentriques. De plus, comme ils varient dans le temps ils doivent donc être estimés régulièrement, ce qui n'est pas le cas des paramètres inertiels. Cette association ne semble donc pas fort heureuse.

Nous avons proposé dans le sixième chapitre une méthode alternative qui dissocie l'estimation de ces deux familles de paramètres. La méthode externe est basée sur la mesure des efforts de liaison par des capteurs extéroceptifs, c'est-à-dire qui n'appartiennent pas au manipulateur. Il existe plusieurs façons de réaliser ces mesures. Comme il nous semble difficile de mesurer les efforts au sein des articulations, nous avons placé le manipulateur sur une plateforme de force à six composantes; ce qui nous permet de mesurer les efforts de réaction du manipulateur sur la base.

Le modèle liant les efforts de réactions du robot à la cinématique est évidemment différent du modèle dynamique. Comme notre objectif est de fournir les éléments nécessaires à la réalisation d'une commande dynamique, nous avons montré que les paramètres du modèle dynamique sont bien identifiables par la méthode externe. Cette démonstration est évidente si l'on considère le modèle de réaction comme l'équation vectorielle d'une articulation fictive placée à la base du manipulateur.

L'avantage majeur de cette mesure externe est d'être indépendante des frottements. Ceux-ci sont simplement perçus comme des efforts internes qui par la loi d'action-réaction disparaissent du modèle. Cette méthode permet donc d'estimer les seuls paramètres barycentriques.

Expérimentation

En plus de la mesure des réactions à la base du manipulateur au moyen d'un capteur de force, nous avons choisi de réaliser les mesures cinématiques par l'intermédiaire d'un système de vision. Par conséquent, l'ensemble du dispositif de mesure est entièrement externe; il peut se transposer directement sur n'importe quel robot sans exiger de connaissances approfondies sur la commande de ce dernier.

Nous avons comparé les deux approches sur un robot à un degré de liberté et ensuite sur un robot industriel de type PUMA 562. Les enseignements que l'on a pu tirer de cette expérimentation sont les suivants.

Dans l'ensemble, la méthode externe est plus précise que la méthode interne. Apportons deux explications à cette différence. La première est évidemment liée à la présence des frottements dans le modèle dynamique utilisé par la méthode interne. La deuxième prend sa source dans la mauvaise connaissance des caractéristiques des actionneurs (en particulier de la constante de couple) pour l'évaluation des efforts de liaison. Dans la pratique, les caractéristiques des actionneurs sont fournies par le constructeur avec des précisions de $\pm 10\%$. Par conséquent, sans un étalonnage préalable de l'actionneur, on ne peut espérer une meilleure précision d'estimation. Par contre, la méthode externe utilise des capteurs beaucoup plus performants permettant des précisions d'estimation supérieures.

Remarquons encore que la méthode interne exige la connaissance préalable de la commande du robot (particulière à chaque famille de robot) mais est ensuite relativement bon

marché car elle ne nécessite pas d'instrumentation particulière. Elle est de plus applicable en temps réel sur le robot en production. La méthode externe nécessite un dispositif de mesure plus coûteux mais standard et de haute précision. Elle est donc applicable directement, sans étude préalable de la commande, à tous les types de manipulateurs.

Les deux approches sont donc parfaitement complémentaires. *La méthode externe permet d'identifier les paramètres barycentriques à la réception du manipulateur. La méthode interne permet la mise à jour des paramètres des articulations (frottement, constante de couple, ...).* De plus, elle peut être utilisée en temps réel pour estimer les caractéristiques de la charge.

Enfin, notre attention s'est portée sur l'étude de la précision d'estimation. N'ayant pas de valeur de référence, nous avons procédé à une simulation. L'interprétation des résultats de cette étude est évidemment dépendante du manipulateur et de la trajectoire choisie. Nous avons mis tout de même en évidence la différence entre les erreurs provoquées par une mauvaise connaissance des vecteurs barycentriques et celles provoquées par les éléments des tenseurs barycentriques. Les premiers sont fonctions de la gravité, une erreur d'estimation conduit donc à une erreur statique qu'il faut obligatoirement compenser. Par contre, les seconds ne conduisent qu'à des erreurs dynamiques. Finalement, les simulations permettent d'étudier l'effet des paramètres. Certains conduisent à des erreurs du second ordre et peuvent donc être négligés. De même, nous avons classé pour chaque paramètre; les termes suivant leur importance. Cette étude n'a qu'un intérêt limité pour notre problème mais permet aux automaticiens qui le souhaitent de réduire la taille du modèle dynamique incluse dans la boucle de commande.

Perspectives

Dans notre étude nous nous sommes limités à estimer les paramètres inertiels dans le cas de structures arborescentes ouvertes. Il entre dans nos projets de prolonger notre investigation au cas des *structures bouclées*. Une des difficultés à résoudre est d'établir la correspondance entre les paramètres inertiels du modèle dynamique et ceux du modèle de réaction. En effet, les règles de combinaisons que nous avons introduites ne s'appliquent qu'aux structures arborescentes. L'élimination des contraintes de boucle introduit probablement des combinaisons différentes.

La méthode externe nous a permis d'estimer les paramètres inertiels indépendamment des autres types de paramètres. Cette estimation réalisée, nous pourrions nous attacher à l'*étude des articulations* en introduisant un modèle de frottement réaliste. Nous pourrions également étudier l'influence de la souplesse articulaire en mesurant simultanément les positions de part et d'autre des articulations (d'un côté la position de l'actionneur grâce au codeur optique et de l'autre côté la position du segment par l'intermédiaire d'un système externe). Remarquons que cette étape nécessite un dispositif de mesure de haute précision. Le système Selspot dont les performances sont suffisantes pour l'estimation des paramètres inertiels ne conviendra plus pour ce type de recherche.

Bibliographie

- (An - 85) C. H. An, Ch. G. Atkeson and J. M. Hollerbach.
Estimation of inertial parameters of rigid body links of manipulators.
Proc. 24th IEEE Conf. on Decision and Control.
Fort Lauderdale, december 11-13, 1985, pp 990-995.
- (An - 86) C. H. An, Ch. G. Atkeson and J. M. Hollerbach.
Experimental determination of the effect of feedforward control on
trajectory tracking errors.
Proc. IEEE Conf. On Robotics and Automation.
San Francisco, April 7 -10, 1986, pp 55-60.
- (An - 88) C. H. An, C. G. Atkeson and J. M. Hollerbach
Model-Based Control of a robot Manipulator
MIT press 1988.
- (Armstrong - 86) B. Armstrong, O. Khatib and J. Burdick.
The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm.
Proc. IEEE Int. Cong. Robotics and Automation (1986) pp. 510-518.
- (Armstrong - 88) B. Armstrong.
Dynamics for Robot Control: Friction Modeling and Ensueing Excitation
During Parameter Identification.
Stanford Univ., CA. Dept. of Computer Science, STAN-CS-88-1205.
- (Atkeson - 86) C.G. Atkeson, C.H. An and J.M. Hollerbach.
Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links.
Int. Journal of Robotics Research. 5(3), 1986, pp 101-119.
- (Becquet - 87) M. Becquet.
Validation théorique et expérimentale de modèle dynamique direct et
inverse de mécanismes articulés à structure cinématique complexe:
application à la robotique.
Thèse de docteur en Sciences Appliquées. Janvier 1987.
- (Bouzouia - 87) B. Bouzouia et M. Renaud.
Estimation des paramètres dynamiques des robots manipulateurs.
Proc. IASTED, Int. Symp. Modelling, Identification and Control.
Grindelwald, Switzerland February 17-20, 1987, pp 194-199.
- (Bu - 88) Y.H. Bu and Y. Wanq.
A New Approach of Dynamic Modelling and Parameters Estimation of
Robot Manipulators.
Proc. IEEE, Int. Conf. Systems , Man, Cybernetics.
Beijing, August 1988, pp 103-106.

- (Canudas -87) C. Canudas De Wit
Commande Adaptative pour des Systèmes Partiellement connus.
Thèse
Institut National Polytechnique de Grenoble. 29 Avril 1987.
- (Chedmail - 86) P. Chedmail, M. Gauthier and W. Khalil.
Automatic Dynamic Modelling of Robots Including Parazmeters of Links
and Actuators.
IFAC/IFIP/IMACS Int. Symp. on Theory of Robots.
Vienna, Austria, December 3-5, 1986.
- (Dombre - 88) E. Dombre and W. Khalil.
Modélisation et commande des robots.
Traité des Nouvelles Technologies. Série Robotique.
éd. Hermes 1988.
- (Duelen - 87) G. Duelen, U. Kirchoff and J. Held.
Approach for the Estimation of Kinematic Parameters and Joint Stiffness
of Industrial Robots.
Proc. of 5th Yugoslav Symp. on Applied Robotics and Flexibel
Automatization.
Bled, Yugoslavia, June 1-4, 1987, pp 113-121.
- (Ferreira - 84) E. P. Ferreira.
Contribution à l'indentification de paramètres et à la commande dynamique
adaptative des robots manipulateurs.
Thèse
Université Paul Sabatier de Toulouse.
Toulouse, 6 juillet 1984.
- (Fischer - 06) O. Fischer.
Einführung in die Mechanik lebender Mechanismen.
Liepzig, RDA, 1906.
- (Gautier - 86) M. Gautier.
Identification of robot dynamics
Porc. IFAC Symposium on Theory of robots.
Vienna, dec. 1986, p. 351.
- (Gautier - 88 a) M. Gautier and W. Khalil.
A direct determination of minimum inertial parameters of robots.
Conference on Robotic and Control.
IEEE April 1988, pp 1682-1687.
- (Gautier - 88 b) M. Gautier and W. Khalil.
On the identification of the inertial parameters of robots.
Proc. 27th Conf. Decision and Control.
IEEE, Austin, Texas, December 1988, pp 2264-2269.

- (Gautier - 89) M. Gautier.
Contribution à la modélisation et à l'identification des robots.
Thèse de doctorat d'état.
Université de Nantes, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique.
Le 22 Mai 1990.
- (Gilbert - 84) E.G. Gilbert and I.J. Ha.
An approach to nonlinear feedback control with application to robotics.
IEEE Trans. Systems, Man, Cybern. 1984, SMC-14: 879-884.
- (Good - 85) M.C. Good, L.M. Stweet and K.L. Strobel.
Dynamic Models for Control System Design of Integrated Robot and Drive Systems.
Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. vol. 107, march 1985
- (Gorez - 89) R. Gorez and J. O'Shea.
Robots positioning control survey and comparative analysis.
4th Int. Conf. on CAD, CAM, Robotics and Factories of the Future.
INCARF, New-Delhi, December 1989.
- (Held - 88) V. Held and C. Maron.
Estimation of friction Characteristics, Inertial and Coupling Coefficients in Robotic Joints Based on Current and Speed Measurements.
Symposium on Robot Control (1988), pp. 86.1-86.6.
- (Judd - 87) R.P. Judd and A.B. Knasinski.
A Technique to Calibrate Industrial Robots with Experimental Verification.
Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (1987), pp 351-357.
- (Khalil - 86) W. Khalil, M. Gautier and J.F. Kleinfinger.
Automatic Generation of Identification Models of Robots.
International Journal of Robotics and Automation 1986, 1(1): 2-6
- (Khosla - 85) P.K. Khosla and T. Kanade.
Parameter identification of robot dynamics.
Proc. 24th Conf. Decision and Control.
Florida, December 11-13 1985, pp 1754-1760.
- (Khosla - 86) P.K. Khosla and T. Kanade.
Real-time Implementation and evaluation of model-based controls on CMU DD Arm II.
Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation.
San Francisco, April 7-10 1986, pp 1546-1555.
- (Lai - 88) Jiansu Lai and Hong Xiang Lan.
Identification of Dynamic Parameters in Lagrange Robot Model.
Proc. IEEE, Int. Conf. Systems, Man, Cybernetics.
Beijing, August 1988, pp 90-93.
- (Lawson - 74) C. L. Lawson and J. Hanson.
Solving Least Squares Problems.
Prentice-Hall Englewood Cliffs. N.J. 07632. 1974

- (Lee - 78) Lee, C.S.G.
Automatic supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanisms.
IEEE, Transaction on Systems, Man and cybernetics, vol. SMC 7, n°12, dec 1977
- (Liégeois - 74) A. Liégeois et M. Renaud.
Modèle mathématique des systèmes mécaniques articulés en vues de la commande automatique de leur mouvement.
C. R. Acad. Sc. Paris, tome 278, Série B, Avril 1974, pp 799- 801.
- (Liégeois - 80 a) A. Liégeois, A. Fournier and M. Aldon.
Model Reference Control of High-Velocity Industrial Robots.
Proc. Joint Automatic Control Conf..
San Francisco, August 13-15 1980.
- (Liégeois - 80 b) A. Liégeois et M.J. Aldon.
Génération et programmation automatiques des équations de Lagrange des robots et manipulateurs.
Rapport de recherche INRIA n° 32 Septembre 1980.
- (Liégeois - 84) A. Liégeois.
Les robots: analyse des performances et C.A.O.
Hermes 1984
- (Ljung - 87) L. Ljung.
System Identification: Theory for the user.
Prentice-Hall E.G. N.J. 07632. 1987.
Thomas Kailath, Series Editor.
- (Lombard - 83) J. Lombard and J.C. Perrot.
Automatic Measurement of the Positioning Accuracy of Industrial Robots.
Annals of the CIRP. Vol. 32/1/1983, pp 297-299.
- (Maes -88) P. Maes. and J.C. Samin.
Symbolic generation of dynamic and identification models for robots: linearity with respect to barycentric parameters.
Proc. 12th IMACS World Congress on Scientific Computation, Paris, July 12-22, 1988, vol 1, pp 461-464.
- (Maes - 89) P. Maes, J.C. Samin and P.Y. Willems.
Linearity of Multibody Systems with Respect to Barycentric Parameters: Dynamics and Identification Models Obtained by Symbolic Generation.
Mechanics of Structures and Machines
vol 17, n°2, 1989
- (Maes - 90) P. Maes, J.C. Samin and P.Y. Willems.
AUTODYN and ROBOTRAN: Computer Programmes.
Multibody Systems Handbook.
W. Schiehlen editor. 1990, pp 225-264.
- (Mayeda - 84) H. Mayeda, K. Osuka and A. Kangawa.
A new identification method for serial manipulator arms.
Preprints IFAC 9 th World Congress, July 2-6 1984 Budapest
Vol VI: pp. 74-79

- (Mayer - 86) R. Mayer and G.A. Parker.
Optical Considerations in a 3D Laser Tracking Instrument.
- (Megahed -84) S. M. Megahed.
Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots manipulateurs à structure de chaîne cinématique simple ou complexe.
Thèse
Université Paul Sabatier de Toulouse.
Toulouse, 6 juillet 1984.
- (Mukerjee -85) A. Mukerjee and D.H. Ballard.
Self-Calibration in Robot Manipulators.
Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation. Mars 25-28 1985 St Louis
pp 1050-1057.
- (Ntambwe- 90) Ntambwe Kadinda Tubalelela.
Stratégie de commande en force et en position d'un dispositif d'assemblage plan.
Thèse de docteur en Sciences Appliquées
Université Catholique de Louvain
Le 21 juin 1990.
- (Olsen - 85) H.B. Olsen and G.A. Bekey.
Identification of parameters in models robots with rotary joints.
Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation Mars 25-28 1985 St Louis
pp.1045-1050.
- (Olsen - 86) H.B. Olsen and G.A. Bekey.
Identification of robot dynamics.
Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation April 7-10 1986
San Francisco, pp.1004-1010.
- (Payannet - 85) D. Payannet.
Modélisation et correction des erreurs statiques des robots manipulateurs.
Thèse
Université des sciences et techniques du Languedoc.
Montpellier 1985.
- (Raucent - 85) B. Raucent.
Modélisation et compensation des erreurs aléatoires des manipulateurs.
DEA en Automatique
Université des Sciences et techniques du Languedoc.
Montpellier le 9 juillet 1985
- (Raucent - 88) B.Raucent G. Campion, G. Bastin and J.C. Samin.
Identification of Barycentric Parameters of Robotic Manipulators from External Measurements.
Proc. 8th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Beijing (Chine) August 27-31, 1988, pp 1292-1297

- (Raucent - 89) B.Raucent, J.C. Samin and P.Y. Willems.
Identification of dynamic parameters of robot manipulators from external measurements.
European Journal of Mechanical Engineering.
June 1989, n°1.
- (Renaud - 87) M. Renaud.
Quasi-minimal computation of the dynamic model of a robot manipulator utilizing the Newton-Euler formalism and the notion of augmented body.
IEEE, Conf. on Robotics and Automation, Raleigh, EUA.
Mars-April 1987.
- (Renault - 85) Renault Automation.
Robot Sirtès. Description du matériel.
Juin 1985.
- (Roberson - 66) R.E. Roberson and J. Wittenburg.
A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies, with the reference to the problem of satellite attitude control.
Proc. 3rd IFAC-Congress, Session 46, Papier 46 D. Juin 1966.
- (Schiehlen - 86) W.O. Schiehlen and R.G. Kallenbach
Identification of robot system parameters.
Preprints IFAC/IFIP/IMACS Symposium on Theory of robots.
Vienna, Dec 1986. pp 339 - 344.
- (Spur- 84) G. Spur, G. Duellen and U. Kirchoff.
A process for the Determination of Zero Position Values and Lengths of Elements in Kinematic Chains.
Society of Manufacturing Engineers, C.M.E. Technical Paper M.S.
84-498, 1984.
- (Strang - 76) G. Strang.
Linear Algebra and its Applications
Academic Press 1976
- (Unimation - 86) Unimation.
500 Seris (Models (552/562), Equipment Manual.
September 1986.
- (Willems - 79) P. Y. Willems.
Introduction à la mécanique.
Masson, 1979.
- (Wittenburg 77) Dynamics of system of rigid bodies.
B.G. Teubner, Stuttgart, RFA. 1977.

Annexe 1

Modèle dynamique du PUMA 562

(description voir § 6.5.2)

Modèle:

$$\varphi_{du} \delta_{du} + \varphi_{dk} \delta_{dk} + F\psi = Q_a$$

Paramètres géométriques:

$$l_z^{01} = 0.672 + 0.080 \text{ m}$$

$$l_z^{23} = 0.432 \text{ m}$$

$$n1 = 62.55$$

$$n2 = 107.81$$

$$n3 = -53.65$$

Paramètres barycentriques:

$$\delta_{du} = \begin{pmatrix} K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + K_{zz}^3 \\ K_{xx}^2 - K_{zz}^2 \\ K_{yy}^2 \\ K_{yz}^2 - mb_y^3 l_z^{23} \\ K_{xx}^3 - K_{zz}^3 \\ K_{yy}^3 \\ K_{yz}^3 \\ mb_z^2 \\ mb_z^3 \end{pmatrix} \quad \delta_{dk} = I^m$$

(I^m est supposée identique pour les trois actionneurs)

Paramètres de frottements:

$$\psi = \begin{pmatrix} c_f^1 \\ c_f^2 \\ c_f^3 \end{pmatrix}$$

Variables intermédiaires:

$$\begin{aligned} C1 &= \cos(q^1) \\ S1 &= \sin(q^1) \\ C2 &= \cos(q^2) \\ S2 &= \sin(q^2) \\ C3 &= \cos(q^3) \\ S3 &= \sin(q^3) \\ C23 &= \cos(q^2+q^3) \\ S23 &= \sin(q^2+q^3) \\ z1 &= S2 \\ z3 &= S2 \\ C2233 &= C23*C23 - S23*S23 \\ S2233 &= S23*C23 + S23*C23 \\ z5 &= C23*S23 \\ z6 &= C2*C3*S2 \\ z7 &= S2*S2*S3 \\ C22 &= C2*C2 - S2*S2 \\ S22 &= S2*C2 + S2*C2 \\ z8 &= C2*S2 \\ z9 &= C2*S2 \\ z11 &= C2*S2 \\ z13 &= C2*C2*S3 \\ z14 &= S2*S2 \\ z15 &= C2*C2 \\ z16 &= S23*S23 \\ z17 &= C23*C23 \\ z18 &= S2*S23 \\ C223 &= C3*C22 - S3*S22 \\ S223 &= S3*C22 + S22*C3 \end{aligned}$$

Equations du modèle:*Première articulation*

$$\delta_{du}(1,1) = qpp1$$

$$\delta_{du}(1,2) = qp1*qp2*S22+qpp1*z14$$

$$\delta_{du}(1,4) = -qp2*qp2*S2+qpp2*C2$$

$$\delta_{du}(1,5) = q_{p1} * q_{p2} * S_{2233} + q_{p1} * q_{p3} * S_{2233} + q_{pp1} * z_{16}$$

$$\delta_{du}(1,7) = -2 * q_{p2} * q_{p3} * S_{23} - q_{p2} * q_{p2} * S_{23} - q_{p3} * q_{p3} * S_{23} + q_{pp2} * C_{23} + q_{pp3} * C_{23}$$

$$\delta_{du}(1,9) = 2 * q_{p1} * q_{p2} * d_{33} * S_{223} - 2 * q_{p1} * q_{p3} * d_{33} * (-z_6 + z_7) + 2 * q_{pp1} * d_{33} * z_{18}$$

$$\begin{aligned} \delta_{dk}(1,1) = & q_{pp1} * n_1 * n_1 + 2 * q_{p1} * q_{p2} * (-z_9 - z_{10}) + q_{p2} * q_{p2} * n_2 * (-z_3 - z_4) \dots \\ & + q_{pp1} * z_{15} + q_{pp2} * n_2 * C_2 + 2 * q_{p1} * q_{p2} * (-z_{11} - z_{12}) \dots \\ & + q_{p2} * q_{p3} * n_3 * (-z_1 - z_2) + q_{pp1} * z_{15} + q_{pp3} * n_3 * C_2 \end{aligned}$$

$$F(1,1) = \text{sign}(q_{p1} * n_1) * n_1$$

Deuxième articulation

$$\delta_{du}(2,2) = -q_{p1} * q_{p1} * z_8$$

$$\delta_{du}(2,3) = q_{pp2}$$

$$\delta_{du}(2,4) = q_{pp1} * C_2$$

$$\delta_{du}(2,5) = -q_{p1} * q_{p1} * z_5$$

$$\delta_{du}(2,6) = q_{pp2} + q_{pp3}$$

$$\delta_{du}(2,7) = q_{pp1} * C_{23}$$

$$\delta_{du}(2,8) = -g * S_2$$

$$\begin{aligned} \delta_{du}(2,9) = & -g * S_{23} - q_{p1} * q_{p1} * d_{33} * (z_6 - z_7) \dots \\ & - 2 * q_{p2} * q_{p3} * d_{33} * S_3 - q_{p1} * q_{p1} * d_{33} * (z_{13} + z_6) + q_{pp2} * d_{33} * C_3 \dots \\ & - q_{p3} * q_{p3} * d_{33} * S_3 + q_{pp2} * d_{33} * C_3 + q_{pp3} * d_{33} * C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{dk}(2,1) = & q_{p1} * q_{p2} * (-z_3 - z_4) * n_2 + q_{pp1} * C_2 * n_2 + q_{pp2} * n_2 * n_2 + q_{p1} * q_{p1} * (z_9 + z_{10}) \dots \\ & + q_{p1} * q_{p2} * (z_3 + z_4) * n_2 + q_{p1} * q_{p1} * (z_{11} + z_{12}) + q_{p1} * q_{p3} * n_3 * (z_1 + z_2) \end{aligned}$$

$$F(2,2) = \text{sign}(q_{p2} * n_2) * n_2$$

Troisième articulation

$$\delta_{du}(3,5) = -qp1*qp1*z5$$

$$\delta_{du}(3,6) = qpp2+qpp3$$

$$\delta_{du}(3,7) = qpp1*C23$$

$$\delta_{du}(3,9) = -g*S23-qp1*qp1*d33*(z6-z7)+qp2*qp2*d33*S3+qpp2*d33*C3$$

$$\delta_{dk}(3) = qp1*qp2*(-z1-z2)*n3+qpp1*C2*n3+qpp3*n3*n3$$

$$F(3,3) = \text{sign}(qp3*n3)*n3$$

Annexe 2

Modèle de réaction du PUMA 562

(description voir § 6.5.2)

Modèle:

$$\varphi_{ru} \delta_{ru} + \varphi_{rk} \delta_{rk} = Q_b$$

Paramètres géométriques:

$$l_z^{01} = 0.672 + 0.080 \text{ m}$$

$$l_z^{23} = 0.432 \text{ m}$$

$$n1 = 62.55$$

$$n2 = 107.81$$

$$n3 = -53.65$$

Paramètres barycentriques:

$$\delta_{ru} = \begin{pmatrix} K_{zz}^1 + K_{zz}^2 + K_{zz}^3 \\ K_{xx}^2 - K_{zz}^2 \\ K_{yy}^2 \\ K_{yz}^2 - mb_y^3 l_z^{23} \\ K_{xx}^3 - K_{zz}^3 \\ K_{yy}^3 \\ K_{yz}^3 \\ mb_z^2 \\ mb_z^3 \\ mb_y^1 + mb_y^2 + mb_y^3 \end{pmatrix} \quad \delta_{rk} = I^m$$

Positions initiales:

$$\begin{aligned}
Ci1 &= \cos(q_0^1) \\
Si1 &= \sin(q_0^1) \\
Ci2 &= \cos(q_0^2) \\
Si2 &= \sin(q_0^2) \\
Ci3 &= \cos(q_0^3) \\
Si3 &= \sin(q_0^3) \\
Si23 &= \sin(q_0^2 + q_0^3) \\
yi20 &= Si1 * Si2 \\
yi21 &= Si1 * Si23 \\
yi5 &= Ci1 * Si2 \\
yi6 &= Ci1 * Si23
\end{aligned}$$

Variables intermédiaires:

$$\begin{aligned}
C1 &= \cos(q^1) \\
C2 &= \cos(q^2) \\
C3 &= \cos(q^3) \\
C23 &= \cos(q^2 + q^3) \\
S23 &= \sin(q^2 + q^3) \\
y1 &= C1 * C2 * S2 \\
y2 &= C2 * S1 \\
y3 &= C1 * C23 * S23 \\
y4 &= C23 * S1 \\
y5 &= C1 * S2 \\
y6 &= C1 * S23 \\
y7 &= C1 * C2 * S23 \\
y8 &= C1 * C23 * S2 \\
y9 &= C3 * S1 \\
y10 &= C2 * S1 * S2 \\
y11 &= C1 * C2 * C2 * C2 \\
y12 &= C1 * C2 * S2 * S2 \\
y13 &= C23 * S1 * S23 \\
y14 &= C1 * C23 * C23 * C23 \\
y15 &= C1 * C23 * S23 * S23 \\
y16 &= C2 * S1 * S2 \\
y18 &= C2 * S1 * S2 \\
y20 &= S1 * S2 \\
y21 &= S1 * S23 \\
y22 &= C2 * C2 * S1 * S3 \\
y23 &= C2 * C3 * S1 * S2 \\
y24 &= S1 * S2 * S2 * S3 \\
y25 &= C1 * C2 \\
y26 &= C1 * C23 \\
y27 &= C1 * C1 * C2 * S2 \\
y28 &= C1 * C2 * S1 \\
y29 &= C1 * C1 * C23 * S23 \\
y30 &= C1 * C23 * S1
\end{aligned}$$

$y_{31} = C1 * C1 * C2 * S2$
 $y_{33} = C1 * C1 * C2 * S2$
 $y_{35} = C1 * C2 * C2 * C3$
 $y_{36} = C1 * C2 * S2 * S3$
 $y_{37} = S1 * S3$
 $y_{38} = C1 * C2$
 $y_{40} = C1 * C2$
 $y_{42} = C1 * C2 * C2$
 $y_{43} = C1 * S2 * S2$
 $y_{44} = C1 * C23 * C23$
 $y_{45} = C1 * S23 * S23$
 $y_{46} = C1 * C2 * C2 * S2$
 $y_{47} = C1 * S2 * S2 * S2$
 $y_{48} = C1 * C23 * C23 * S23$
 $y_{49} = C1 * S23 * S23 * S23$
 $y_{50} = C2 * S1 * S23$
 $y_{51} = C23 * S1 * S2$
 $y_{52} = C1 * C3$
 $y_{53} = C2 * C2 * C2 * S1$
 $y_{54} = C2 * S1 * S2 * S2$
 $y_{55} = C23 * C23 * C23 * S1$
 $y_{56} = C23 * S1 * S23 * S23$
 $y_{57} = C1 * C2 * S2$
 $y_{59} = C1 * C2 * S2$
 $y_{61} = C1 * C2 * C2 * S3$
 $y_{62} = C1 * C2 * C3 * S2$
 $y_{63} = C1 * S2 * S2 * S3$
 $y_{64} = C2 * S1 * S1 * S2$
 $y_{65} = C23 * S1 * S1 * S23$
 $y_{66} = C2 * S1 * S1 * S2$
 $y_{68} = C2 * S1 * S1 * S2$
 $y_{70} = C2 * C2 * C3 * S1$
 $y_{71} = C2 * S1 * S2 * S3$
 $y_{72} = C1 * S3$
 $y_{73} = C2 * S1$
 $y_{75} = C2 * S1$
 $y_{77} = C2 * C2 * S1$
 $y_{78} = S1 * S2 * S2$
 $y_{79} = C23 * C23 * S1$
 $y_{80} = S1 * S23 * S23$
 $y_{81} = C2 * C2 * S1 * S2$
 $y_{82} = S1 * S2 * S2 * S2$
 $y_{83} = C23 * C23 * S1 * S23$
 $y_{84} = S1 * S23 * S23 * S23$
 $y_{85} = S2 * S2$
 $y_{86} = C2 * C2$
 $y_{87} = S23 * S23$
 $y_{88} = C23 * C23$
 $y_{89} = S2 * S23$
 $C22 = C2 * C2 - S2 * S2$
 $S22 = S2 * C2 + S2 * C2$
 $C2233 = C23 * C23 - S23 * S23$
 $S2233 = S23 * C23 + S23 * C23$
 $y_{90} = C2 * S2$
 $y_{92} = C2 * S2$
 $C223 = C3 * C22 - S3 * S22$

$$\begin{aligned}
S223 &= S3*C22 + S22*C3 \\
y94 &= C2*C3*S2 \\
y95 &= S2*S2*S3 \\
y96 &= S2 \\
y98 &= S2
\end{aligned}$$

Equations du modèle

L_x

$$\begin{aligned}
\delta_{ru}(1,2) &= -2*qp1*qp2*y27+qp1*qp1*y10-qpp1*y1 \\
\delta_{ru}(1,3) &= -qpp2*S1 \\
\delta_{ru}(1,4) &= +qp1*qp1*(-y11-y12)+qp2*qp2*y25-qpp1*y2+qpp2*y5 \\
\delta_{ru}(1,5) &= -2*qp1*qp2*y29-2*qp1*qp3*y29+qp1*qp1*y13-qpp1*y3 \\
\delta_{ru}(1,6) &= -qpp2*S1-qpp3*S1 \\
\delta_{ru}(1,7) &= -2*qp1*qp2*y30-2*qp1*qp3*y30+2*qp2*qp3*y26... \\
&\quad +qp1*qp1*(-y14-y15)+qp2*qp2*y26+qp3*qp3*y26... \\
&\quad -qpp1*y4+qpp2*y6+qpp3*y6 \\
\delta_{ru}(1,8) &= -2*qp1*qp2*d23*y25+g*(y20-yi20)+qp1*qp1*d23*y20... \\
&\quad +qp2*qp2*d23*y20-qpp1*d23*y5-qpp2*d23*y2 \\
\delta_{ru}(1,9) &= -2*qp1*qp2*d23*y26-2*qp1*qp2*d33*(2*y35-2*y36)... \\
&\quad -2*qp1*qp3*d23*y26-2*qp1*qp3*d33*(y35-y36)... \\
&\quad +2*qp2*qp3*d23*y21+2*qp2*qp3*d33*y37-2*qpp2*d33*y9... \\
&\quad +g*(y21-yi21)+qp1*qp1*d23*y21 \\
&\quad -qp1*qp1*d33*(-y22-2*y23+y24)+qp2*qp2*d23*y21... \\
&\quad +qp3*qp3*d23*y21+qp3*qp3*d33*y37-qpp1*d23*y6... \\
&\quad -qpp1*d33*(y7+y8)-qpp2*d23*y4-qpp3*d23*y4-qpp3*d33*y9 \\
\delta_{ru}(1,10) &= g*(C1-Ci1)+qp1*qp1*d23*C1 \\
\delta_{rk}(1,1) &= +2*qp1*qp2*(y31+y32)+qp1*qp1*(-y16-y17)+qp2*qp2*n2*(y38+y39)... \\
&\quad +qpp1*y1+qpp2*n2*y5+2*qp1*qp2*(y33+y34)+qp1*qp1*(-y18-y19)... \\
&\quad +qp2*qp3*n3*(y40+y41)+qpp1*y1+qpp3*n3*y5
\end{aligned}$$

F_x

$$\begin{aligned}
\delta_{ru}(2,8) &= -2*qp1*qp2*y2+qp1*qp1*(-y46-y47)-qp2*qp2*y5-qpp1*y20+qpp2*y25 \\
\delta_{ru}(2,9) &= -2*qp1*qp2*y4-2*qp1*qp3*y4-2*qp2*qp3*y6+qp1*qp1*(-y48-y49)... \\
&\quad -qp2*qp2*y6-qp3*qp3*y6-qpp1*y21+qpp2*y26+qpp3*y26 \\
\delta_{ru}(2,10) &= qp1*qp1*S1-qpp1*C1
\end{aligned}$$

L_y

$$\delta_{ru}(3,2) = -2*qp1*qp2*y64-qp1*qp1*y1-qpp1*y10$$

$$\delta_{ru}(3,3) = qpp2*C1$$

$$\delta_{ru}(3,4) = +qp1*qp1*(-y53-y54)+qp2*qp2*y2+qpp1*y25+qpp2*y20$$

$$\delta_{ru}(3,5) = -2*qp1*qp2*y65-2*qp1*qp3*y65-qp1*qp1*y3-qpp1*y13$$

$$\delta_{ru}(3,6) = qpp2*C1+qpp3*C1$$

$$\delta_{ru}(3,7) = 2*qp1*qp2*y30+2*qp1*qp3*y30+2*qp2*qp3*y4... \\ +qp1*qp1*(-y55-y56)+qp2*qp2*y4+qp3*qp3*y4... \\ +qpp1*y26+qpp2*y21+qpp3*y21$$

$$\delta_{ru}(3,8) = -2*qp1*qp2*d23*y2-g*(y5-yi5)-qp1*qp1*d23*y5-qp2*qp2*d23*y5... \\ -qpp1*d23*y20+qpp2*d23*y25$$

$$\delta_{ru}(3,9) = -2*qp1*qp2*d23*y4-2*qp1*qp2*d33*(2*y70-2*y71)... \\ -2*qp1*qp3*d23*y4-2*qp1*qp3*d33*(y70-y71)-2*qp2*qp3*d23*y6... \\ -2*qp2*qp3*d33*y72+2*qpp2*d33*y52-g*(y6-yi6)-qp1*qp1*d23*y6... \\ -qp1*qp1*d33*(y61+2*y62-y63)-qp2*qp2*d23*y6... \\ -qp3*qp3*d23*y6-qp3*qp3*d33*y72-qpp1*d23*y21... \\ -qpp1*d33*(y50+y51)... \\ +qpp2*d23*y26+qpp3*d23*y26+qpp3*d33*y52$$

$$\delta_{ru}(3,10) = +g*(S1-Si1)+qp1*qp1*d23*S1$$

$$\delta_{rk}(3,1) = 2*qp1*qp2*(y66+y67)+qp1*qp1*(y57+y58)+qp2*qp2*n2*(y73+y74)... \\ +qpp1*y10+qpp2*n2*y20+2*qp1*qp2*(y68+y69)+qp1*qp1*(y59+y60)... \\ +qp2*qp3*n3*(y75+y76)+qpp1*y10+qpp3*n3*y20$$

 F_y

$$\delta_{ru}(4,8) = +2*qp1*qp2*y25+qp1*qp1*(-y81-y82)... \\ -qp2*qp2*y20+qpp1*y5+qpp2*y2$$

$$\delta_{ru}(4,9) = 2*qp1*qp2*y26-2*qp2*qp3*y21+qp1*qp1*(-y83-y84)-qp2*qp2*y21... \\ +2*qp1*qp3*y26-qp3*qp3*y21+qpp1*y6+qpp2*y4+qpp3*y4$$

$$\delta_{ru}(4,10) = -qp1*qp1*C1-qpp1*S1$$

 L_z

$$\delta_{ru}(5,1) = qpp1$$

$$\delta_{ru}(5,2) = qp1*qp2*S22+qpp1*y85$$

$$\delta_{ru}(5,4) = -qp2*qp2*S2+qpp2*C2$$

$$\delta_{ru}(5,5) = qp1*qp2*S2233+qp1*qp3*S2233+qpp1*y87$$

$$\delta_{ru}(5,7) = -2*qp2*qp3*S23-qp2*qp2*S23-qp3*qp3*S23+qpp2*C23+qpp3*C23$$

$$\delta_{ru}(5,9) = +2*qp1*qp2*d33*S223-2*qp1*qp3*d33*(-y94+y95)+2*qpp1*d33*y89$$

$$\begin{aligned}\delta_{rk}(5,1) = & qpp1*n1 + 2*qp1*qp2*(-y90-y91) + qp2*qp2*n2*(-y96-y97) + qpp1*y86... \\ & + qpp2*n2*C2 + 2*qp1*qp2*(-y92-y93) + qp2*qp3*n3*(-y98-y99)... \\ & + qpp1*y86 + qpp3*n3*C2\end{aligned}$$

F_z

$$\delta_{ru}(6,8) = -qp2*qp2*C2 - qpp2*S2$$

$$\delta_{ru}(6,9) = -2*qp2*qp3*C23 - qp2*qp2*C23 - qp3*qp3*C23 - qpp2*S23 - qpp3*S23$$