
Quantifications par déformations formelles et non formelles de la boule unité de $\mathbb{C}^n$

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences

KORVERS Stéphane

Aspirant F.R.S.-FNRS

sous la supervision du Professeur Pierre Bieliavsky

JURY DE THÈSE

Prof. Wolfgang BERTRAM	Université de Lorraine
Prof. Pierre BIELIAVSKY, <i>promoteur</i>	Université catholique de Louvain
Prof. Luc HAINE, <i>secrétaire</i>	Université catholique de Louvain
Prof. André UNTERBERGER	Université de Reims Champagne-Ardenne
Prof. Michel WILLEM, <i>président</i>	Université catholique de Louvain
Prof. Ping XU	Pennsylvania State University

Quantifications par déformations
formelles et non formelles
de la boule unité de $\mathbb{C}^n$

KORVERS Stéphane

Louvain-la-Neuve, UCL

© Stéphane Korvers, 2014

Tous droits réservés

Remerciements

S'il est usuel de remercier les personnes ayant entouré et épaulé l'auteur d'un travail au terme de celui-ci, cette tâche s'avère particulièrement ardue dans le cas présent tant j'ai perdu depuis bien longtemps le compte en la matière. Sachant que cette section sera toutefois la plus lue de ma thèse, je vais quand même faire un petit effort pour rendre cet exercice plaisant.

Tout commença il y a maintenant 27 ans, lorsque je naquis dans la bien célèbre principauté de Liège. J'eus alors la chance que beaucoup d'enfants n'ont pas : celle de vivre dans un pays développé, ayant accès à de nombreuses ressources, loin de la guerre, de la famine, entouré de mes parents me prodiguant une éducation et une attention déterminante dans ma vie. Tout au long de ces années, mes parents m'ont soutenu à de très nombreux niveaux dans la vie, me laissant libre de tracer ma route comme je le souhaitais dans mes études. C'est certainement l'une des raisons pour laquelle j'ai aujourd'hui l'opportunité de faire de la recherche fondamentale, plutôt qu'un métier titré et stéréotypé parfois fortement suggéré à d'autres. Pour tout cela, et tout ce que je ne mentionne pas, mes premiers remerciements vont à mes parents pour leur patience et leur dévouement constant tout au long de ces années.

Si ce travail a pu voir le jour, c'est également en grande partie grâce à mon promoteur, le professeur Pierre Bieliavsky, qui a su être à mon écoute humainement et mathématiquement depuis plus de 5 années. Un promoteur est toujours critiqué d'une façon ou d'une autre par ses étudiants, et cette tâche, semblable à celle d'un parent sur certains points, n'est certes pas aisée à plus d'un titre. Trouver un sujet adéquat pour un étudiant, le promouvoir dans le monde de la recherche et l'épauler dans les problèmes en découlant tout en tenant compte d'aspects allant bien au-delà du monde professionnel : tel est partiellement le rôle d'un promoteur. Sachant que ce même promoteur doit assurer à la fois ses cours et un suivi administratif permanent au sein de son Université, poursuivre ses propres recherches, et gérer d'autres collaborations, il devient clair que cette fonction s'en trouve particulière-

ment compliquée. Si Pierre n'échappe pas à l'ensemble de ces considérations, il a toutefois su mener à bien son rôle de promoteur au travers de la direction de ce travail. Je souhaite aujourd'hui l'en remercier fort chaleureusement. Il m'a proposé de faire une thèse de doctorat, il m'a permis d'obtenir une bourse à ces fins, et il m'a lancé dans la recherche en me proposant un projet intéressant et dynamique, mais aussi en m'introduisant auprès de bon nombre de ses collègues via des conférences internationales diverses. Bien au delà de ses qualités impressionnantes de chercheur, entre Scalea, Białowieża et quelques restaurants chinois, Pierre a su être présent humainement en me communiquant son enthousiasme et sa motivation sans borne pour la passion qui l'anime. Je le remercie de m'avoir épaulé avec cette énergie tout au long des ces années.

Ces dernières lignes ne vont pas sans un remerciement vif vis-à-vis du Fonds de la Recherche Scientifique-FNRS m'ayant octroyé une bourse durant 4 années afin de mener à bien ma thèse de doctorat.

Je remercie les professeurs Wolfgang Bertram et Luc Haine pour avoir accepté de faire partie de mon comité d'accompagnement au cours de mon parcours doctoral, de même que pour leur présence au sein de mon jury. Les discussions que j'ai pu avoir avec eux ces dernières années furent particulièrement enrichissantes. J'ai pu puiser une grande source de motivation en ces échanges, de même qu'en leurs intérêts prononcés pour mon travail.

Les professeurs André Unterberger et Ping Xu ont accepté de se joindre au professeur Wolfgang Bertram parmi les membres externes de mon jury de thèse. À eux trois, je leur adresse mes remerciements pour avoir lu ce texte et m'avoir transmis leurs conseils, suggestions et encouragements.

Un grand merci aux professeurs Luc Haine et Michel Willem d'avoir assumé les rôles respectifs de secrétaire et de président du jury susmentionné ainsi que de m'avoir permis d'améliorer mon texte à travers des remarques à la fois constructives, pédagogiques et instructives.

La forme de ce texte n'aurait pas été celle que nous lui connaissons aujourd'hui sans l'intervention bienveillante de mon équipe de correcteurs. C'est avec gratitude que je remercie Cathy Brichard pour avoir relu une grande partie de ce manuscrit, Natacha Cappelle pour avoir terminé ce travail lorsque Cathy dut s'absenter de même que pour son examen de l'introduction, Valentin Dendoncker pour sa relecture des équations mathématiques de fin de chapitre et de l'introduction, Axel de

Goursac pour avoir partagé avec moi son expérience lors de sa lecture des sections introductives aux quantifications par déformation, et Alice Coyette pour avoir eu la gentillesse de s'attaquer à la correction orthographique de mon introduction en dernière minute malgré une heure fort tardive.

Parmi les noms suscités, nombreux sont ceux faisant partie de l'équipe de recherche en géométrie et physique mathématique. Dans ce groupe non commutatif, je souhaiterais particulièrement remercier mes collègues doctorants ou post-doctorants et amis tels que Nestor Anzola, Natacha Cappelle, Axel de Goursac, Liebrecht De Sadeleer, Valentin Dendoncker, Jérémy Haut, Alban Jago, Laurent La Fuente, Chiara Pagani, Florian Spinnler et Yannick Voglaire. Ce fut un plaisir de partager avec eux d'innombrables discussions plus ou moins scientifiques, des voyages en train ou en avion (ce choix étant déterminé par les discussions précédemment mentionnées), ou des barres de folie.

Mention spéciale à mes collègues de bureau Julien Federinov et Florian Spinnler pour les fous rires et découvertes au B028. « *Du calme, tout va bien se passer.* »

Si nous sortons de mon bureau et de ce groupe de recherche, je perds tout moyen de pouvoir citer des noms de façon semblable tant les chercheurs avec lesquels j'ai eu la chance d'interagir furent nombreux. Que toutes ces personnes dont j'ai eu la chance de croiser la route au travers d'échanges instructifs dans mon Université ou en conférences à l'étranger en soient chaleureusement remerciées. En particulier, merci à Chiara Esposito pour son intérêt pour mon travail, l'immense motivation qu'elle m'a communiquée à travers nos nombreuses discussions, ainsi que ses très gentilles invitations dans les jolies villes de Barcelone et Würzburg.

Mes sincères remerciements vont de manière plus spécifique à l'ensemble des professeurs, assistants et collègues ayant contribué à ma formation et m'ayant permis d'en arriver où je suis aujourd'hui.

Pour leur aide et leur gentillesse constante, je remercie également le personnel administratif de notre bien aimé Institut de Recherche en Mathématiques et Physiques : Carine Baras, Cathy Brichard, Martine Furnémont et Élodie Hannyoy.

La gestion administrative de l'Université à travers le service à autrui a toujours trouvé place dans mon agenda *Moleskine* de par l'importance que je lui accorde. J'ai été très heureux d'être actif durant 2 années au Corps Scientifique de notre Institut et je remercie toutes les personnes avec lesquelles j'ai pu avoir des échanges parfois difficiles mais toujours intéressants dans ce cadre.

Comme autre compétence, l'enseignement m'a toujours énormément tenu à cœur. Durant ces 4 années de thèse, j'ai eu la chance d'enseigner à des niveaux très différents allant des mathématiques générales aux cours avancés de master. À chaque fois, ce fut avec un très grand plaisir. Si j'ai énormément appris durant ces activités, c'est aussi grâce à mes étudiants, à leur enthousiasme qui, bien que parfois dissimulé, me permettait de trouver la motivation pour continuer mes recherches dans des moments difficiles.

Parmi ces étudiants, certains sont devenus des amis en cours de route. Je les salue tout particulièrement.

De même, je remercie affectueusement et sincèrement tous mes amis mafieux ou sains d'esprit ayant rendu ma vie plus chouette pendant mes études, ma thèse et, je n'en doute pas, pour encore bien des années. Cela fait très longtemps que le nombre de personnes sur lesquelles j'ai pu compter de par leur gentillesse, leur soutien et leur disponibilité n'est plus dénombrable et le papier manquerait sur Terre pour expliciter davantage ces lignes.

Enfin, c'est très tendrement que je remercie Alice pour l'amour et le soutien qu'elle m'apporte chaque jour, en particulier durant ces moments communs de fin de thèse.

Table des matières

Introduction	13
Notations & conventions	31
1 Structures géométriques	37
1.1 Notes sur les espaces symétriques	38
1.1.1 Définitions de base	38
1.1.2 Triples symétriques & algèbres de Lie involutives	39
1.1.3 Géométrie affine	43
1.2 Espaces hermitiens symétriques	45
1.2.1 Bref rappel de géométrie complexe & kählérienne	45
1.2.2 Structure de base des espaces hermitiens symétriques	47
1.2.3 Décompositions & classifications	51
1.2.4 Exemple d'espace hermitien symétrique	54
1.3 Domaines bornés symétriques	57
1.3.1 Introduction via un exemple particulier	58
1.3.2 Noyau & métrique de Bergman	61
1.3.3 Structure de la boule unité de $\mathbb{C}^n$	64

1.4	Théorie de Pyatetskii-Shapiro	69
1.4.1	Domaines bornés homogènes	69
1.4.2	Décompositions d'Iwasawa	73
1.5	Structure des j -groupes normaux	77
1.5.1	Décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1, n)$	77
1.5.2	Coordonnées d'Iwasawa	82
1.5.3	Structure du groupe d'Iwasawa de $SU(1, n)$	85
1.6	Géométrie des orbites coadjointes	88
1.6.1	Éléments de géométrie symplectique	88
1.6.2	Structure d'orbite coadjointe	91
1.6.3	Géométrie symplectique de la boule unité de $\mathbb{C}^n$	93
1.7	Vers une autre géométrie	99
1.7.1	Concept d'espace symétrique symplectique	101
1.7.2	Deux géométries symétriques symplectiques	103
1.7.3	Remarques sur les triangles géodésiques	107
2	Quantification	111
2.1	Quantification par déformation	112
2.1.1	Concept de star-produit	112
2.1.2	Résultats d'existence & équivalence de star-produits	117
2.1.3	Star-produits invariants	119
2.1.4	Introduction aux déformations non formelles	120
2.2	Objectif principal de la thèse	124
2.2.1	Conventions géométriques du chapitre	125

2.2.2	Star-produit de Moyal sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$	125
2.2.3	Existence, équivalence & reformulation	128
2.3	Vers une application moment quantique	129
2.3.1	Dérivations d'un star-produit	129
2.3.2	Introduction pratique aux moments quantiques	132
2.3.3	Invariance & application moment quantique	136
2.3.4	Exemple concret d'application moment quantique	141
2.4	Obtention d'une invariance partielle	143
2.4.1	Approche semi-formelle	144
2.4.2	De l'analyse fonctionnelle aux aspects non formels	148
2.4.3	Commentaire géométrique sur la phase de Weinstein	153
2.5	Quand l'invariance devient EDP	155
2.5.1	À la recherche d'une plus grande invariance	155
2.5.2	Quand apparaissent les équations	158
2.6	Résolution explicite	164
2.6.1	Premier contact avec les équations	165
2.6.2	Quelques commentaires sur le problème	170
2.6.3	Apparition d'une notion de radialité	172
2.6.4	Vers une réduction de la hiérarchie d'EDP	175
2.6.5	Résolution effective	181
2.7	Au-delà des équations	186
2.7.1	Lien entre les équations dans le cas $n > 1$ et $n = 1$	187
2.7.2	Des équations aux solutions	191
2.7.3	Retour sur la résolution de l'article [B+09]	195

2.8 Symétries, représentations & quantifications	201
2.8.1 Philosophie mathématique du rétract & applications	202
2.8.2 Entre deux représentations	204
2.8.3 Transport de la symétrie	213
Conclusions & perspectives	219
Appendices	223
Appendice A - Structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{su}(1, n)$	223
Appendice B - Résolution de l'équation (2.28)	227
Appendice C - Point de vue numérique sur la sous-section 2.7.2	239
Bibliographie	243
Index	251

Introduction

« *Le monde d'aujourd'hui est le reflet
de la recherche fondamentale d'hier.* »

Véronique Halloin,
Secrétaire générale du F.R.S-FNRS

Notre voyage au travers de ce texte commence au début du siècle passé, lorsqu'il fut mis en lumière au fil des années et de divers faits expérimentaux, l'inefficacité de la physique classique dans la description des phénomènes observés à l'échelle microscopique. Il fut alors nécessaire d'élaborer un nouveau modèle physique, une nouvelle conception de la réalité à cette échelle de grandeur qui fut appelée *mécanique quantique*. Celle-ci trouva notamment ses fondements dans les travaux de Bohr, Born, De Broglie, Dirac, Heisenberg, Jordan, Pauli, Planck, von Neumann, Schrödinger, Weyl et Wigner pour ne citer qu'eux. Cette théorie possède la propriété d'être intrinsèquement probabiliste ce qui modifie complètement, aujourd'hui encore, notre rapport philosophique à la réalité relativement à la physique apparente au monde macroscopique. Comme très souvent dans les interactions entre les mathématiques et la physique, cette découverte, initialement du domaine de la physique expérimentale et théorique, appela un cadre mathématique rigoureux afin de s'y épanouir. C'est précisément dans ce contexte que se situe les motivations préliminaires à notre travail.

Du point de vue de la mécanique hamiltonienne, rappelons que le cadre mathématique naturellement associé à un système mécanique classique est composé d'un espace de phase constituant l'ensemble des états du système et modélisé par

une variété symplectique (M, ω) , ou, plus généralement, une variété de Poisson $(M, \{-, -\})$. Les observables d'un tel système classique sont alors des fonctions lisses sur M et la dynamique du système est, quant à elle, définie en terme d'un hamiltonien $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ lui étant associé de telle façon que l'évolution temporelle d'une observable $t \in \mathbb{R} \mapsto f_t \in \mathcal{C}^\infty(M)$ soit donnée par l'équation

$$\frac{d}{dt} f_t = \{H, f_t\}.$$

Dans le cas de la mécanique quantique, les choses sont toutefois différentes. L'ensemble des états quantiques d'un système est donné par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tandis que les observables de ce système deviennent des opérateurs linéaires auto-adjoints sur $\mathcal{H}$. Ce modèle mathématique rend alors compte des valeurs expérimentales mesurées associées à une observable quantique comme correspondant avec les valeurs spectrales de l'opérateur auto-adjoint définissant cette observable. La dynamique quantique de l'évolution temporelle d'une observable quantique $t \in \mathbb{R} \mapsto O_t$ est, pour sa part, encodée dans l'équation

$$\frac{d}{dt} O_t = \frac{i}{\hbar} [H^q, O_t]$$

où H^q est l'hamiltonien associé système quantique, celui-ci étant un opérateur linéaire auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Malgré la simplicité apparente de ces modèles mathématiques, il est bon de remarquer qu'ils font intervenir des objets de nature complètement différentes. Alors que les observables classiques sont des éléments de l'algèbre commutative des fonctions lisses sur M , les observables quantiques appartiennent au monde non commutatif des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert. Le passage de l'un de ces modèles à l'autre reste aujourd'hui une question discutée sous de multiples facettes. En particulier, le problème de la *quantification* en général est celui de la traduction au niveau quantique de faits relatifs à un système classique. Plusieurs méthodes existent afin de s'attaquer à ce problème, certaines visant à associer aux observables classiques des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert, d'autres tentant de mettre l'accent sur l'encodage non commutatif de la composition de tels opérateurs. Toutes ont leurs avantages et leurs inconvénients et nous n'aurions probablement pas l'occasion d'écrire ce texte aujourd'hui s'il n'y avait pas matière à découvertes et discussions sur ce sujet.

Notre travail se situera plus précisément dans le domaine de la *quantification par déformation* initié par Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer au travers des articles [B+78a] et [B+78b] de 1978. « *We suggest that quantization be understood as a deformation of the structure of the algebra of classical*

observables, rather than as a radical change in the nature of the observable. » S'il y a bien quelque chose qui attire notre attention à l'ouverture du premier de ces deux articles, c'est cette phrase en italique résumant à elle seule toute la morale de la quantification par déformation. En effet, dans un contexte où, depuis 1925 et la procédure de quantification de Schrödinger, certains chercheurs en physique mathématique s'attelaient à déterminer une procédure associant, à chaque observable classique, une observable quantique de nature complètement différente, Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer proposèrent une quantification obtenue par déformation formelle associative non commutative de l'algèbre des observables classiques. Depuis ces articles fondateurs de la discipline, la quantification par déformation est devenue un champ de recherche assez vaste qui interagit avec de nombreux autres domaines en sciences mathématiques et physiques. Nous aurons l'occasion de le constater dans ce texte. En effet, bien qu'appartenant au domaine de la quantification par déformation, notre travail est aussi motivé par la considérable contribution qu'apporta André Unterberger dans les années 1980. Dans une approche non formelle transversale à la quantification par déformation et basée sur les algèbres d'opérateurs, il introduisit et développa notamment un calcul symbolique équivariant sur le plan hyperbolique et d'autres espaces hermitiens symétriques. L'article [UU84] rédigé avec Julianne Unterberger en est un très bon représentant et nous y reviendrons dans la suite.

Afin de cerner de façon plus rigoureuse la quantification par déformation, remontons la ligne du temps et partons de l'un des exemples les plus simples et les plus anciens, à savoir celui de la particule libre sur la droite réelle. L'espace de phase de ce système classique correspond alors à la variété symplectique $(\mathbb{R}^2 = \{q, p\}, \omega = dq \wedge dp)$. Dès la fin des années 1920, une quantification de ce système classique se développa via la recherche d'une application W visant à associer, à chaque fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, un opérateur auto-adjoint W_f sur un certain espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de telle façon à rendre compte d'une correspondance entre la dynamique classique et quantique au travers de la relation

$$W_{\{f_1, f_2\}} = \frac{i}{\hbar} [W_{f_1}, W_{f_2}]$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\{-, -\}$ désigne le crochet de Poisson sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ associé à la forme symplectique ω . Suite aux travaux de Weyl, l'obtention d'une telle *application* dite de *quantification* s'avéra alors possible sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions mesurables de carré sommable sur l'espace de configuration du système relativement à la mesure de Lebesgue. En employant une

formulation plus moderne qu'à l'époque, pour chaque observable $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ pour laquelle cela fait sens, cette application est donnée par

$$W_f : u \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto W_f(u)$$

où $W_f(u) : q_0 \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{ip}{\hbar}(q_0 - q)} f\left(\frac{q_0 + q}{2}, p\right) u(q) dp dq.$

Il se trouve que, pour deux fonctions de Schwartz f_1 et f_2 définie sur $\mathbb{R}^2$, la composition des deux opérateurs W_{f_1} et W_{f_2} correspond à l'image par l'application de quantification W d'une nouvelle fonction de Schwartz $f_1 *_\hbar^W f_2$ donnée par

$$(f_1 *_\hbar^W f_2)(q_0, p_0) := \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i}{\hbar}(q_0 p - p_0 q + q p' - p q' + q' p_0 - p' q_0)\right] f_1(q, p) f_2(q', p') dp dq dp' dq'$$

pour tout $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$. Cette formule définit ainsi de façon explicite un nouveau produit associatif mais non commutatif sur le sous-espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ rendant compte de la composition des opérateurs obtenus après quantification au niveau de l'espace des observables classiques. Par ailleurs, cette expression $f_1 *_\hbar^W f_2$ peut être développée asymptotiquement en série relativement à $\hbar$ de telle façon à nous livrer

$$f_1 *_\nu^0 f_2 := f_1 f_2 + \nu \{f_1, f_2\} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\nu^k}{k!} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq 2 \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq 2}} \omega^{i_1 j_1} \dots \omega^{i_k j_k} \partial_{i_1 \dots i_k}(f_1) \partial_{j_1 \dots j_k}(f_2)$$

où $2i\nu := \hbar$, $\omega^{11} = \omega^{22} = 0$ et $\omega^{12} = -\omega^{21} = 1$. Cette formule possède plusieurs propriétés notables :

- (i) tout comme sa forme intégrale, elle encode l'opération de composition des opérateurs issus de la quantification par W ;
- (ii) elle peut s'étendre à toutes fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans le contexte des séries formelles en ν pour lesquelles aucune notion de convergence n'est requise ;
- (iii) elle rend compte d'une déformation du produit commutatif des fonctions lisse sur $\mathbb{R}^2$ dans la direction du crochet de Poisson $\{-, -\}$ dans le sens où

$$f_1 *_\nu f_2 \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} f_1 f_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\nu} (f_1 *_\nu f_2 - f_2 *_\nu f_1) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \{f_1, f_2\}$$

pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Cette dernière propriété est importante dans le contexte des motivations physiques sous-jacentes à ces observations. En effet, la taille d'un système physique semblant déterminer s'il doit être étudié d'un point de vue classique ou quantique, nous avons l'intuition que, si la taille d'un système quantique croît, par exemple lorsque le nombre de particules du système augmente, le comportement mécanique de celui-ci doit évoluer vers un comportement macroscopique classique. Cette notion se retrouve d'une certaine façon dans le paramètre $\hbar$ associé à la constante de Planck physique comme indicateur de l'échelle à laquelle le système quantifié est étudié. Ainsi, au plus $\hbar$ est petit, au plus le comportement d'un système quantique est classique. Ce fait est souvent appelé la *limite classique* du système quantique.

Ces considérations confirment donc l'intérêt d'une vision de la quantification obtenue non pas en changeant radicalement la nature des objets classiques, mais en déformant la loi d'algèbre associative sur l'ensemble des observables classiques en un produit associatif non commutatif visant à rendre compte de la loi de composition des opérateurs lors d'un potentiel processus de quantification. C'est ainsi qu'en 1978, parut dans l'article [B+78a] une définition mathématique de cette notion appelée *quantification par déformation formelle* ou encore *star-produit* sur une variété symplectique (M, ω) . De façon brève, une telle quantification est définie par une application $*_\nu$ qui, à $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, associe une série formelle en ν à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ définie par

$$f_1 *_\nu f_2 := f_1 f_2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \nu^k C_k(f_1, f_2)$$

où les coefficients $C_k(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ vérifient diverses hypothèses qui conduisent au respect des propriétés de limite classique et d'associativité de l'extension du produit $*_\nu$ aux séries formelles en ν à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(M)$. Le star-produit $*_\nu^0$ ainsi exhibé plus haut est appelé *star-produit de Moyal* et sa définition se généralise sans peine à d'autres variétés symplectiques telles que l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa forme symplectique standard. Le lecteur pourra par exemple consulter la version explicite de ces définitions à la sous-section 2.1.1. Enfin, comme l'exprimèrent déjà les auteurs de l'article [B+78a] en 1978, notons que du point de vue de la quantification des systèmes classiques, il semble physiquement pertinent de chercher à conserver les symétries associées à ceux-ci au niveau quantique. En particulier, pour un système classique dont l'espace de phase correspond à la variété symplectique (M, ω) , si G est un groupe de symplectomorphismes de (M, ω) , parmi l'ensemble des star-produits sur (M, ω) , ceux rendant compte de ce groupe de symétries du système s'avère d'une importance particulière. Cette idée

est formellement traduite en demandant qu'un tel star-produit $*_\nu$ soit *G-invariant*, c'est-à-dire qu'il satisfasse l'équation

$$g^*(f_1 *_\nu f_2) = g^*(f_1) *_\nu g^*(f_2)$$

pour tout $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ et $g \in G$.

Dans ce concept de star-produit susmentionné, il est important de souligner que la série en le paramètre dit *de déformation* ν est purement formelle dans le sens où cette écriture ne sous-tend aucune notion de convergence. Il arrive toutefois que le star-produit de deux fonctions lisses sur M définisse explicitement une nouvelle fonction sur M dans un cadre fonctionnel adéquat. C'est exactement ce qui se passe dans le cas du star-produit de Moyal $*_\nu^0$ de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, celui-ci s'obtenant comme développement asymptotique relativement au paramètre de déformation $\hbar = 2i\nu$ du produit $f_1 *_\hbar^W f_2$. Dans une telle situation, nous parlerons alors de *quantification par déformation à la fois formelle et non formelle* sur (M, ω) . La définition rigoureuse de ce concept est discutée à la sous-section 2.1.4 relativement à ses origines telles que les travaux [Ri89] et [Ri93] de Rieffel. Dans ceux-ci, Rieffel exploite le cadre fonctionnel des C^* -algèbres déjà largement développé au cours du demi-siècle précédent pour formuler son approche non formelle à la *quantification par déformation* dite alors *stricte*, le grand avantage de ce cadre étant de regrouper à la fois les observables de nature classique et quantique sous un même concept. Dans l'article [Ri93], Rieffel introduisit également la notion de *formule de déformation universelle* consistant essentiellement à obtenir des quantifications de systèmes classiques représentés par des C^* -algèbres sur lesquelles agit un groupe dont est connu la théorie quantique déformée au sens strict. Cette approche fut couronnée de succès dans le cas du groupe abélien $\mathbb{R}^n$ dès 1993 et connut une avancée majeure cette année grâce à l'article [BG14] de Bieliavsky et Gayral étendant notamment le travail de Rieffel aux groupes de Lie kähleriens à courbure négative, concrétisant ainsi plus de dix années de travail. Très récemment, d'autres développements concernant le concept de quantification par déformation à la fois formelle et non formelle tels que les articles [B+09], [B+12], [BW14], [dG14] et [d+14] furent également obtenus dans le cas du plan hyperbolique, du supergroupe de Heisenberg et des variétés complexes.

Si la recherche en quantification par déformation du point de vue non formelle est aujourd'hui en plein essor, notamment via l'obtention d'exemples parfois très riches dans des contextes particuliers, la théorie concernant les star-produits en est, quant à elle, à un stade beaucoup plus avancé. Les grandes questions concernant

l'existence, la classification ou l'explicitation concrète de certains star-produits sur des variétés symplectiques, ou même des variétés de Poisson, furent pour la plupart abordées et résolues dans les années 1980 et 1990, notamment grâce aux contributions de Bertelson, Bieliavsky, Cahen, Deligne, De Wilde, Fedosov, Gutt, Kontsevich, Lecomte, Maeda, Nest, Omori, Tsygan et Yoshioka dont les documents [DL83], [O+91], [Fe94], [NT95], [De95], [Be95], [B+97], [B+98] et [Ko03] sont témoins. L'un des points culminants de ces résultats est très certainement le célèbre théorème de formalité de Kontsevich obtenu en 1997 qui certifie l'existence d'un star-produit sur toute variété de Poisson rendant l'approche de la quantification par déformation universelle relativement aux motivations physiques initiales. Nous invitons le lecteur souhaitant perfectionner ses connaissances dans ces différents résultats à parcourir les sous-sections 2.1.2 et 2.1.3 de notre travail.

Notre thèse s'inscrit pour sa part pleinement dans ce contexte actuel qu'est la recherche en quantification par déformation à la fois formelle et non formelle. Nous allons maintenant introduire plus spécifiquement le cadre notre contribution dans ce domaine. Depuis plus de 20 ans et notamment l'article [We94a] de Weinstein, il semble clair qu'un environnement géométrique naturel pour l'étude de quantifications par déformations invariantes à la fois formelles et non formelles mêle géométrie symplectique et symétries. La définition d'un tel environnement fut formalisée en 1995, dans la thèse de Bieliavsky [Bi95], via l'introduction des *espaces symétriques symplectiques*. Un tel espace est défini comme étant une variété symplectique (M, ω) telle qu'en tout point $x \in M$, il existe un symplectomorphisme involutif $s_x : M \rightarrow M$ appelé *symétrie au point x* dont x est un point fixe isolé et tel que, pour tout $y \in M$, la relation $s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x(y)}$ soit satisfaite. Dans ce cas, si le groupe de Lie généré par les compositions d'un nombre pair de symétries est résoluble (resp. semi-simple), l'*espace symétrique symplectique* est dit *résoluble* (resp. *semi-simple*). Semblablement à des résultats bien connus du point de vue de la théorie de Lie comme celui du théorème de Levi-Malcev, tout espace symétrique symplectique simplement connexe peut se décomposer en terme d'espaces symétriques symplectiques résolubles et semi-simples, ce fait inscrivant donc comme fondamentale l'étude de la quantification de ces deux classes d'espaces symétriques symplectiques. Alors que plusieurs développements tels que [BM01], [Bi02], [Bi08], [Vo11] ou encore [BG14] ont vu le jour ces dernières années dans le cas résoluble, c'est dans l'univers de la quantification par déformation invariante à la fois formelle et non formelle des espaces symétriques symplectiques semi-simples que se situe très exactement notre travail.

Le point de départ de cette thèse réside dans l'article [B+09] au sein duquel Bie-liavsky, Detournay et Spindel décrivent explicitement l'espace de toutes les quantifications par déformations à la fois formelles et non formelles sur le disque de Poincaré qui soient invariantes sous l'action du *groupe des automorphismes* de cet espace, c'est-à-dire invariantes sous l'action de tous les difféomorphismes biholomorphes du disque dans lui-même. Le succès de l'approche des auteurs consiste à se ramener au problème de l'évolution d'un opérateur différentiel hyperbolique d'ordre 2 émergeant d'un processus de *contraction de courbure* du disque de Poincaré, c'est-à-dire d'un processus changeant la géométrie affine de l'espace via l'annulation de certaines composantes du tenseur de courbure de Riemann. Dans ce cas, il se fait que l'espace contracté obtenu est un espace symétrique symplectique résoluble sur lequel les quantifications par déformations invariantes sont bien connues via les travaux [BM01] et [Bi08]. Le succès de l'article [B+09] vient alors du fait que certaines solutions à l'équation aux dérivées partielles associée à ce problème d'évolution définissent des opérateurs de convolutions entrelaçant la théorie de quantification par déformation au niveau contracté avec celle du disque de Poincaré. Notre objectif primaire dans cette thèse est purement et simplement de généraliser cette approche au cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ pour $n > 1$, celle-ci constituant notamment un espace symétrique symplectique semi-simple.

Objectif. *Pour chaque naturel $n > 1$, le but premier de notre thèse est de décrire explicitement l'ensemble de toutes les quantifications par déformations à la fois formelles et non formelles sur la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$ qui soient invariantes sous l'action de tout le groupe des automorphismes de cet espace, ce dernier étant constitué de l'ensemble des difféomorphismes biholomorphes de $\mathbb{D}$ dans lui-même.*

Si la question de l'obtention d'une telle quantification par déformation sur $\mathbb{D}$ peut être vue comme étant *a priori* issue d'une simple volonté de généralisation du travail réalisé dans l'article [B+09], il en va en réalité d'un intérêt bien plus vaste. Afin de comprendre celui-ci mais aussi de mieux cerner les ingrédients fondamentaux entrant en jeu dans notre travail sur la quantification de la boule unité complexe à proprement parler, nous avons choisi de développer un premier chapitre présentant dans des sections relativement indépendantes les différentes structures géométriques sous-jacentes à cet espace. Si ce chapitre est bien entendu indispensable à notre travail, le choix de le rendre particulièrement imposant est avant tout personnel et associé à nos convictions concernant l'importance fondamentale des interactions de la géométrie avec de nombreuses disciplines en sciences mathématiques, comptant très certainement notre domaine de recherche dans ses rangs.

Au fil des sections, la structure de notre premier chapitre vise à amener le lecteur à voir successivement la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sous de très nombreux angles apportant chacun son lot d'informations sur cet espace.

- (i) **DOMAINE BORNÉ SYMÉTRIQUE.** Notre premier contact avec la boule unité $\mathbb{D}$ se fait à la section 1.3 sous le nom de *domaine borné symétrique* consistant en des ouverts connexes bornés de $\mathbb{C}^n$ admettant des symétries biholomorphes semblables à celles définies plus haut dans le cas des espaces symétriques symplectiques. Nous montrons que le groupe des automorphismes de ce domaine correspond au groupe de Lie $G = SU(1, n)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$ et que celui-ci agit transitivement sur $\mathbb{D}$. Nous développons également la notion de *métrique de Bergman* sur de tels domaines bornés symétriques menant à la définition d'une structure kählérienne sur $\mathbb{D}$.
- (ii) **ESPACE HERMITIEN SYMÉTRIQUE.** En amont de la section susmentionnée, la théorie de base des *espaces symétriques* et *hermitiens symétriques* est développée. Ces derniers sont des variétés kählériennes admettant des symétries en chaque point compatibles non seulement avec la structure symplectique de l'espace mais également avec la structure riemannienne et complexe. À la sous-section 1.2.4, la boule unité $\mathbb{D}$ est introduite comme espace G -homogène ayant pour groupe d'isotropie $K = S(U(1) \times U(n))$. Une attention particulière est apportée à la définition de la structure symétrique de l'espace via un automorphisme involutif de G intégrant une involution de Cartan sur $\mathfrak{g}$.
- (iii) **GROUPE D'IWASAWA DE $SU(1, n)$.** Lors de la sous-section 1.4.2 et de la section 1.5 le concept de *décomposition d'Iwasawa* est respectivement introduit et appliqué au cas du groupe de Lie G . En pratique nous obtenons une décomposition du groupe G en tant que variété comme correspondant à ANK où $A = \exp(\mathbb{R}H)$ est un groupe de Lie abélien de dimension 1, et N un groupe de Lie nilpotent de dimension $2n - 1$ dont l'algèbre de Lie admet la structure d'un groupe de Heisenberg de centre $\mathbb{R}E$ basé sur l'espace vectoriel réel V de dimension $2(n - 1)$. Le groupe d'Iwasawa de G est alors le groupe de Lie simplement connexe et résoluble $\mathbb{S} := AN$. Il possède la propriété d'agir simplement transitivement sur $\mathbb{D}$. En particulier, le transport de la structure de variété kählérienne de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{S}$ fait de ce dernier un groupe de Lie kählérien à courbure négative dont la forme symplectique est un multiple réel $k > 0$ de $\omega^{\mathbb{S}} \in \Omega^2(\mathbb{S})$.

- (iv) *j*-GROUPE NORMAL ÉLÉMENTAIRE. Au travers des sections 1.4 et 1.5, nous montrons à partir de la théorie de Pyatetskii-Shapiro que, pour tout ouvert connexe borné D de $\mathbb{C}^n$ admettant une action transitive de son groupe des automorphismes $\text{Aut}(D)$, il existe un sous-groupe de Lie résoluble $S \subset \text{Aut}(D)$ appelé *j-groupe normal* et agissant simplement transitivement sur D . De plus, un tel groupe S se décompose en une succession de produits semi-directs de *j-groupes normaux* dits *élémentaires* consistant en des groupes d'Iwasawa de $SU(1, n')$ pour $n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme annoncé précédemment, ces résultats montrent donc l'intérêt que représente une maîtrise de la théorie de quantification par déformation du domaine $\mathbb{D}$ dans un espoir beaucoup plus vaste qui est de pouvoir quantifier de façon invariante et non formelle l'ensemble des domaines bornés symétriques, étant donné que le groupe des automorphismes d'un tel domaine agit toujours transitivement sur celui-ci.
- (v) VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE. Dans la section 1.6, nous étudions la structure symplectique du domaine $\mathbb{D}$ en passant par une représentation de celle-ci comme orbite coadjointe du groupe G . Ceci nous permet de déduire une carte de Darboux globale sur $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ dont l'inverse est l'application

$$\varphi^{-1} : (a, v, z) \in \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{2n} \mapsto \exp(aH) \exp(v + zE).$$

Les coordonnées (a, v, z) sont alors appelées *coordonnées d'Iwasawa* sur $\mathbb{S}$. En outre, l'action du groupe G sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$ s'avère être *hamiltonienne* dans le sens où, il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\lambda^{\mathbb{S}} : (\mathfrak{g}, [-, -]) \rightarrow (\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S}), \{-, -\}) : X \mapsto \lambda_X^{\mathbb{S}}$$

tel que $i_{X^*}(k\omega^{\mathbb{S}}) = -d\lambda_X^{\mathbb{S}}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, où X^* désigne l'action infinitésimale du sous-groupe à un paramètre associé à $-X$ sur $\mathbb{S}$.

- (vi) ESPACE SYMÉTRIQUE SYMPLECTIQUE. Finalement, la section 1.7 voit l'apparition des espaces symétriques symplectiques tels que définis précédemment. Nous réalisons que $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$ constitue un espace symétrique symplectique semi-simple mais qu'il existe une nouvelle structure d'espace symétrique symplectique résoluble sur $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ correspondant à une contraction de courbure de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. L'impact géométrique de ce fait est également abordé.

L'ensemble de ces considérations géométriques jouent un rôle important dans le second chapitre comprenant l'essentiel de nos recherches en quantification par

déformation. Tout au long de celui-ci, nous essayons d'exposer une approche relativement semblable à celle de l'article [B+09]. Toutefois, toute la difficulté de cette généralisation vient de la différence structurelle importante entre le cas $n = 1$ et $n > 1$ se traduisant au niveau de l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}$ par l'apparition de la coordonnée $v \in V$ pour $n > 1$. Ceci complique considérablement nos calculs comme le lecteur pourra sans peine s'en rendre lui-même compte dès la section 2.3 mais surtout à partir de la section 2.6.

Expliquons maintenant les principaux points clés de notre démarche. Cette dernière repose essentiellement sur une approche du point de vue des quantifications par déformations formelles. En effet, la détermination explicite de tous les star-produits G -invariants sur $\mathbb{D}$ nous mène nécessairement à celle de toutes les quantifications par déformations invariantes à la fois formelles et non formelles sur $\mathbb{D}$. Nous partons donc du principe que nous soignerons le point de vue du cadre fonctionnel adéquat à la définition d'une théorie quantique non formelle *a posteriori*.

La motivation de notre approche se situe dans les lignes suivantes. Nous remarquons que sur l'espace symplectique $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ nous avons deux structures géométriques différentes étant reliées l'une à l'autre par une contraction de courbure. Comme pour le cas $n = 1$, sur l'espace contracté, les travaux [BM01] et [Bi08] livre l'ensemble des quantifications par déformations formelles et non formelles qui sont invariantes sous un groupe de symétries résoluble contenant $\mathbb{S}$. Une telle quantification encodée par un star-produit particulier $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ est décrite explicitement et discutée du point de vue de la géométrie de l'espace à la section 2.4. Par ailleurs, nous montrons à la section 2.5 que la théorie de classification des star-produits $\mathbb{S}$ -invariants nous livre pour chaque star-produit G -invariant $\sharp_{\nu}$ sur $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$, l'existence d'un opérateur de convolution formel inversible U commutant avec les translations à gauche sur $\mathbb{S}$ et entrelaçant $\sharp_{\nu}$ et $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ selon la formule $U(- *_{\nu} -) = U(-) \sharp_{\nu} U(-)$. Après plusieurs développements faisant notamment appel à la théorie de Lie sous-jacente au groupe G , nous arrivons à exploiter cette information afin d'obtenir le premier théorème fondamental dans notre thèse, à savoir, le théorème 2.5.10. Celui-ci peut notamment se formuler comme suit.

Théorème A. *Dans le contexte susmentionné, le noyau de convolution v_{ν} de l'inverse d'un tel opérateur U satisfait nécessairement une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles pour laquelle chaque équation est théoriquement explicite et définie à partir d'un élément $X \in \mathfrak{g}$. De plus, cette construction livre tous les star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$.*

Toutefois, afin de pouvoir expliciter davantage cette hiérarchie d'équations aux dérivées partielles, un travail préliminaire portant sur les développements relatifs au star-produit $*_\nu$ en lui-même s'avère nécessaire. Nous décrivons maintenant brièvement ce travail mené de la section 2.2 à la section 2.5.

- (i) Tout d'abord, nous réalisons à la sous-section 2.2.2 que la carte de Darboux dont nous avons mentionné l'existence lors de l'étude géométrique de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ nous permet de définir un analogue $*_\nu^0$ du star-produit de Moyal sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$.
- (ii) Nous montrons ensuite à la sous-section 2.2.3 que tous les *star-produits* sur $\mathbb{S}$ sont *équivalents* dans le sens où, pour tout star-produit $*_\nu$ et $*'_\nu$ sur $\mathbb{S}$, il existe T une série formelle en ν à coefficients dans les opérateurs différentiels sur $\mathbb{S}$ qui soit formellement inversible sur l'ensemble des séries formelles en ν à coefficients dans les fonctions lisses sur $\mathbb{S}$ et telle que T entrelace $*_\nu$ et $*'_\nu$ par la formule

$$T(- *_\nu -) = T(-) *_'_\nu T(-).$$

- (iii) Lors de la sous-section 2.4.1, dans l'esprit de l'article [BM01], nous explicitons un tel opérateur T entrelaçant les star-produits $*_\nu^0$ et $*_\nu^{\mathbb{S}}$. Celui-ci est de la forme d'un changement de variables entrelacé par une transformée de Fourier partielle en la variable z et son inverse. Nous discutons alors le cadre fonctionnel adéquat à l'obtention d'une forme non formelle de cette quantification par déformation $\mathbb{S}$ -invariante à la sous-section 2.4.2. Ceci nous mène au théorème 2.4.7 explicitant une telle quantification par déformation. Nous montrons que celle-ci fait intervenir explicitement la géométrie de l'espace symétrique symplectique résoluble associé à $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ et nous discutons des possibilités d'extensions de tels résultats du point de vue des documents [We94a], [Bi02], [B+09] et [Vo11].
- (iv) Afin d'explicitier les équations aux dérivées partielles dont il est question plus haut, nous développons au cours des sections 2.3 et 2.5 des outils théoriques portant sur la notion d'*application moment quantique* dans un esprit partiellement basé sur l'article [Xu98] de Xu. Expliquons brièvement cette importante partie de notre travail. Lors de la section 2.3, nous montrons qu'un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$ induit nécessairement via une équivalence T avec $*_\nu^0$ l'existence d'une application linéaire λ_ν définie sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans les séries formelles en ν à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ dont le terme d'ordre 0 en ν correspond avec $\lambda^{\mathbb{S}}$ et qui satisfasse

$$(1) \quad \frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu(X), -]_{*_\nu^0} = T^{-1} \circ X^* \circ T,$$

$$(2) \quad \lambda_\nu([X, Y]) = \frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu(X), \lambda_\nu(Y)]_{*_\nu^0},$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, le crochet $[-, -]_{*_\nu^0}$ désignant le commutateur relativement au star-produit $*_\nu^0$. Dès lors, partant d'une application explicite λ_ν^0 définie semblablement mais indépendamment de la donnée d'un opérateur T , nous montrons que la recherche de tous les opérateurs d'équivalence T satisfaisant la condition (1) livrent une certaine classe C de star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$. Il est important de souligner que cette application λ_ν^0 peut être choisie comme correspondant à l'application $\lambda^\mathbb{S}$ si et seulement si $n = 1$. Ici se situe donc une première difficulté du cas $n > 1$ tant par l'obtention explicite que par la manipulation de l'application λ_ν^0 dans la suite.

- (v) À partir de l'expression du star-produit $*_\nu^\mathbb{S}$, l'application de la démarche susmentionnée à l'opérateur U dans la section 2.5 nous permet alors d'obtenir une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles explicite dont les solutions livrent l'ensemble de tous les entrelacements entre le star-produit $*_\nu^\mathbb{S}$ et l'ensemble des éléments de la classe C . Nous montrons également qu'à redéfinition du paramètre de déformation près cette classe de star-produits permet d'obtenir tous les star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$.

Ces équations étant explicitement obtenues, il suffit de les résoudre pour obtenir une description explicite de l'ensemble de tous les star-produits G -invariants sur le domaine $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, ceci étendant alors les résultats de l'article [B+09]. Seulement voilà, dire qu'il suffit de résoudre ces équations c'est une chose, le faire une autre. Le cas $n = 1$ nous livrait une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 raisonnable, mais dans le cas $n > 1$, c'est une famille d'équations beaucoup plus compliquées qui apparaît. Ceci s'explique principalement par deux raisons. D'une part, l'augmentation de la dimension de la boule unité $\mathbb{D}$ mène à l'apparition de cette variable supplémentaire $v \in V$. D'autre part, l'augmentation de la dimension du groupe G oblige la résolution d'un nombre plus important d'équations vu que celles-ci sont définies à partir des éléments de l'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$. Nous obtenons donc plus d'équations faisant intervenir plus de variables. Nous donnons à la sous-section 2.6.1 l'exemple le plus complexe d'une telle équation et analysons celle-ci en remarquant qu'elle fait intervenir des opérateurs directement issus de la structure géométrique de l'espace étudié.

Au-delà du fait que les calculs menant à ces équations ne sont pas triviaux, la façon de résoudre celles-ci l'est encore moins. Cette résolution est exposée tout au long de la section 2.6 et nous en décrivons maintenant l'esprit général. À la section 1.5, nous développons une *décomposition de $\mathfrak{g}$* dite *en sous-espaces de racine restreinte* possédant plusieurs propriétés importantes décrites à la proposition 1.4.8. En particulier, c'est cette décomposition qui permet de définir la décomposition d'Iwasawa de G mentionné plus haut. Il s'ensuit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut se voir comme la somme directe de sous-espaces $\{\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g} : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ tels que $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ si $|\alpha| > 2$ et $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\alpha'}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\alpha'}$ pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}$ correspond exactement à $\mathbb{R}H \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ en tant qu'espace vectoriel. Ce sont précisément ces propriétés issues de la structure du groupe des automorphismes de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ qui va guider notre résolution. En effet, par $\mathbb{S}$ -invariance des deux star-produits entrelacés par U , nous vérifions sans peine que les équations associées à l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}$ sont triviales. Comme $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ forme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, il est donc naturel d'essayer d'étendre d'abord la propriété d'invariance via la résolution des équations correspondant à cette sous-algèbre de Lie. Il se fait que l'ensemble de ces équations mènent exactement à une radialité en la variable $v \in V$ du noyau v_ν relativement au produit scalaire issu de la restriction de la structure riemannienne de $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$ au point de base Id . Cette étape est fondamentale. Elle réduit le nombre de variables du problème de $2n$ à 3 ce qui est un progrès absolument conséquent. Ceci nous permet dès lors de simplifier la forme des équations associées aux deux derniers sous-espaces de racine restreinte $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_{-2}$. À un tel point que nous montrons à la sous-section 2.6.4 que la résolution des équations associées à la partie $\mathfrak{g}_{-1}$ peut se ramener relativement à un entrelacement par la transformée de Fourier partielle en z et son inverse en deux seules équations aux dérivées partielles d'ordre 2 et 3 respectivement. À coups de changements de variables et de transformées de Fourier, l'équation d'ordre le moins élevé est alors résolue en toute généralité et sa solution est injectée dans l'équation d'ordre 3. Ceci nous permet d'en déduire explicitement toutes les solutions aux équations relatives au sous-espace $\mathfrak{g}_{-1}$. Lorsque nous nous attaquons pour finir à l'immense équation définie via l'unique générateur de $\mathfrak{g}_{-2}$, nous réalisons avec surprise que toutes les solutions obtenues précédemment satisfont à cette dernière équation. Un peu de réflexion nous permet alors de montrer que ce dernier fait était prévisible théoriquement à partir de la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte. Le lecteur pourra trouver cette très jolie preuve à la sous-section 2.6.2. Le théorème 2.6.14 est alors obtenu. Celui peut se formuler comme suit.

Théorème B. *À redéfinition du paramètre de déformation ν près, pour tout star-produit G -invariant $\sharp_\nu$ sur $\mathbb{S}$, il existe un opérateur linéaire inversible U commutant avec les translations à gauche sur $\mathbb{S}$ et entretenant $\sharp_\nu$ et $*_\nu^{\mathbb{S}}$ dont l'inverse est un opérateur de convolution possédant un noyau de la forme*

$$\begin{aligned} v_\nu(a, r, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, \nu^2 \operatorname{sign}(\xi) e^{-2a + i\xi z} \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \, (\sqrt{\gamma^2 + 1})^{n-3} \\ &\quad g \left[-4 \nu^2 \operatorname{sign}(\xi) e^{-2a} \left(\frac{1}{\gamma^2 + 1} - \cosh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right) \right] \\ &\quad \exp \left[-\frac{\operatorname{arccotan}(\gamma)}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} \left(\frac{e^{-2a}}{\gamma^2 + 1} + \cosh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) r^2 \right) \right] \end{aligned}$$

où r est la composante radiale de $v \in V$ et $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})[[\nu]]$ une série formelle en ν à coefficients dans les distributions sur $\mathbb{R}$ arbitraire.

Comme le laissent entrevoir les lignes précédentes, les star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ seront donc exclusivement associés aux distributions $v_\nu(a, r, z)$ de cette forme qui définissent un opérateur de convolution inversible. Nous insistons extrêmement fort sur le fait qu'au cours de cette résolution, la géométrie développée dans le premier chapitre est d'une façon ou d'une autre quasiment tout le temps présente. Elle nous guide dans notre démarche et intervient régulièrement dans les expressions explicites de ces équations via l'apparition de la structure riemannienne, symplectique et complexe du domaine $\mathbb{D}$. La structure du groupe des automorphismes de ce dernier nous permet en outre d'obtenir des informations d'une beauté analytique certaine. Elle nous mène à la détermination de solutions à une équation aux dérivées partielles tout bonnement horrible via la résolution d'autres équations plus simples.

Dans la section 2.7, nous choisissons de nous étendre sur une question naturelle qui est le lien entre les résultats de l'article [B+09] du cas $n = 1$ et ceux que nous avons obtenus. Ainsi, nous introduisons des concepts de *limite pour n tendant vers 1* d'équations aux dérivées partielles et de solutions. Nous montrons que ce concept est consistant pour retrouver l'unique équation du cas $n = 1$ à partir de celle du cas $n > 1$. L'examen de ces aspects au niveau des solutions s'avère, quant à lui, moins aisé. Nous montrons qu'il existe un ensemble de solutions $\mathcal{Sol}^-$ à l'équation associées au générateur du sous-espace $\mathfrak{g}_{-2}$ qui ne satisfont pas toutes les équations de la hiérarchie du cas $n > 1$. Une forme particulièrement simple d'une telle solution est par ailleurs exhibée. Quelques calculs nous amènent alors à la formulation d'une conjecture affirmant de façon assez surprenante que les

limites des solutions de Sol^- sont les seules à redonner des solutions à l'équation de l'article [B+09] dans le cas $n = 1$.

Enfin, toujours dans un esprit de lien avec l'article [B+09], dans la sous-section 2.7.3, nous répondons partiellement à une question adressée dans cet article concernant l'interprétation à donner à une métrique lorentzienne définie de telle façon à ce que la partie d'ordre 2 de l'opérateur de d'Alembert lui étant associée corresponde exactement à la partie d'ordre 2 de l'opérateur associée à l'équation du cas $n = 1$. Nous présentons une preuve du fait que la résolution mystérieuse de cette équation réalisée dans l'article [B+09] peut en partie se déduire de l'étude de la géométrie sous-jacente à cette métrique. Les développements de cette sous-section peuvent se réinterpréter indépendamment de tout contexte associé à la quantification comme une merveilleuse interaction de la géométrie dans le domaine de l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Ceci n'est bien sûr pas la fin de l'histoire. Car si nous avons caractérisé explicitement l'espace des star-produits G -invariants sur $\mathbb{D}$, il reste la question de l'étude d'un cadre fonctionnel adéquat à la formulation explicite de l'ensemble des quantifications par déformations formelles et non formelles qui leur sont associée. À ce titre, notons l'importance que revêt la démarche explicitée à la section 2.4 afin d'obtenir une quantification par déformation à la fois formelle et non formelle $\mathbb{S}$ -invariante sur $\mathbb{S}$. En effet, dans cette section, nous expliquons avec recul un travail mené par le passé et conclut à ce jour après plusieurs années de travail. Ceci permet de mieux nous rendre compte de la place actuelle de notre thèse dans une démarche parallèle sur un plus long terme, de ce que nous avons accompli et de ce qu'il nous reste à faire.

Dans la toute dernière section, c'est avec un autre recul philosophique que nous initons la suite de notre projet. En effet, dans le travail précédemment décrit, nous avons utilisé le groupe commun de symétries $\mathbb{S}$ entre le star-produit $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et un star-produit G -invariant recherché afin d'en déduire un opérateur U entreliant ces star-produits tout en conservant leurs symétries communes. En utilisant une philosophie semblable Bieliavsky arriva récemment à exploiter directement les résultats de l'article [BG14] afin de retrouver une solution à l'équation apparaissant dans le cas $n = 1$ sans résoudre explicitement celle-ci. Cette méthode propose l'avantage d'espérer transporter le cadre fonctionnel développé dans l'article [BG14] pour définir, dans notre cas, des quantifications par déformations non formelles associées aux star-produits obtenus. L'idée de la démarche utilisée est notamment expo-

sée dans la sous-section 2.8.1. Celle-ci repose sur l'idée initiale que la géométrie affine des espaces est déterminée par les symétries. La transformation du star-produit $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ en un star-produit G -invariant peut donc être rattachée à l'idée d'une transformation changeant la symétrie de l'espace. En exploitant le cadre mathématique du document [BG14], nous nous retrouvons à représenter les symétries des espaces symétriques symplectiques respectivement semi-simple et résoluble définis plus haut par des opérateurs unitaires sur des espaces de Hilbert. Ces derniers sont notamment des espaces de représentations unitaires de groupes de Lie associées aux structures symétriques sur $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$. Dans ce texte, nous exploitons ces idées afin de montrer que les restrictions de ces représentations au groupe de symétries communes $\mathbb{S}$ sont équivalentes et nous engageons un transport de symétries via cette équivalence exhibée explicitement. À ces fins, nous faisons appel à de nouveaux outils dans ce travail tels que la théorie des fonctions spéciales, la théorie des transformations intégrales ou encore le célèbre théorème des résidus. Le résultat obtenu après de longs calculs est un opérateur involutif unitaire sur un espace de Hilbert analogue à $L^2(\mathbb{R}^n)$ relativement à la mesure de Lebesgue. À travers la décomposition des fonctions de l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans la base des fonctions d'Hermite relativement aux $n - 1$ dernières variables, cet opérateur peut moralement se voir comme un entrelacement entre $-\text{Id}^*$ sur les $n - 1$ dernières variables et une transformée de Hankel sur la première variable. Dans le cas $n = 1$, des calculs apparentés avaient déjà été réalisés par André et Julianne Unterberger dans l'article [UU84]. À travers cet élégant résultat et cette nouvelle vision du problème, l'opportunité d'un recoupement avec cet article et l'achèvement de notre projet s'annoncent prometteurs pour la suite.

Notations & conventions

Comme dans de nombreux travaux, cette thèse n'expose pas les mathématiques dans leur intégralité. Bien que le matériel avancé indispensable à la compréhension d'une sous-section soit régulièrement exposé dans celle-ci, il semble néanmoins utile de reprendre ici quelques notations et conventions de mathématiques générales utilisées au travers du texte.

Algèbre & mathématiques élémentaires

- *vecteur* : par défaut, de type colonne.
- *jème composante d'un vecteur* v : v_j ou $(v)_j$.
- *produit scalaire euclidien ou apparenté* : $(-|-)$.
- *nombre imaginaire unité* : $i \in \mathbb{C}$.
- *partie réelle (resp. partie imaginaire) d'un nombre complexe* z : $\operatorname{Re}(z)$ (resp. $\operatorname{Im}(z)$).
- *module du nombre complexe* z : $|z|$.
- *symbole de Kronecker* : $\delta_{i,j}$.
- *minimum (resp. maximum) de* $x, y \in \mathbb{R}$: $\min\{x, y\}$ (resp. $\max\{x, y\}$).
- *signe d'un nombre réel* x : $\operatorname{sign}(x)$ prenant la valeur $+1$ (resp. -1) si $x \geq 0$ (resp. si $x < 0$).
- *factoriel d'un nombre naturel* n : $n!$.
- *matrice identité d'ordre* $n \in \mathbb{N}$: Id_n .
- *élément d'une matrice* X *situé à la* i *ème ligne et* j *ème colonne* : X_{ij} .
- *position d'un élément d'une matrice donnée explicitement* : couple d'entiers (ligne, colonne) pointant l'élément.

- *matrice transposée d'une matrice* $X : X^t$.
- *matrice conjuguée d'une matrice complexe* $X : \overline{X}$.
- *déterminant d'une matrice* $X : \det(X)$.
- *trace d'une matrice* $X : \text{Tr}(X)$.
- *dimension* : $\dim$.
- *espace vectoriel réel engendré par les vecteurs* $\{v_j\}_j : \left\langle \{v_j\}_j \right\rangle_{\mathbb{R}}$.
- *groupe des endomorphismes d'un espace vectoriel* $V : \text{End}(V)$.
- *espace vectoriel dual à un espace vectoriel* $V : V^*$.
- *évaluation de* $\varphi \in V^*$ *sur* $v \in V$ *pour* V *un espace vectoriel* : $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$.
- *somme directe (resp. produit tensoriel) de deux espaces vectoriels* V *et* W : $V \oplus W$ (resp. $V \otimes W$).
- *composante en* V *d'un vecteur* $v \in V \oplus W$ *où* V *et* W *sont deux espaces vectoriels* : $[v]_V$.
- *somme cyclique sur des indice* $i_1, \dots, i_p$: symbole sommatoire indicé par $\bigcirc \{i_1, \dots, i_p\}$.
- *nombre d'éléments d'un ensemble fini* $E : |E|$.
- *multi-indice* : par défaut, vecteur de nombres naturels $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$.
- *longueur du multi-indice* $I = (i_1, \dots, i_p) : |I| = p$.
- *multi-vecteur* : si $\{v_j\}_j$ désigne un ensemble de vecteurs dans un espace vectoriel, ou un système de coordonnées quelconque, $v_I = (v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ pour $I = (i_1, \dots, i_p)$ un multi-indice.

Analyse, fonctions spéciales & opérateurs fonctionnels

- *ensemble image d'une fonction* $f : \text{im}(f)$.
- *restriction d'une fonction* f *à un sous-ensemble* E *de son domaine* : $f|_E$.
- *mesure de Lebesgue* : dL sur $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, ou plus simplement dx sur $\mathbb{R} = \{x\}$.
- *mesure de Liouville sur une variété symplectique* (M, ω) *de dimension* $2n$: $d\mu^\omega$ issue de la forme volume $\frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n fois).
- *espace de Lebesgue* L^p *sur l'espace mesurable* $(E, d\mu)$: $L^p(E, d\mu)$, par défaut, les fonctions sont à valeurs complexes.
- *ensemble des fonctions localement Lebesgue-intégrable sur l'espace mesurable* $(E, d\mu)$ *à valeurs complexes* : $L^1_{\text{loc}}(E, d\mu)$.

- ensemble des fonctions lisses à support compact sur un espace $E \simeq \mathbb{R}^n$: $\mathcal{D}(E)$.
- ensemble des fonctions de Schwartz sur un espace $E \simeq \mathbb{R}^n$: $\mathcal{S}(E)$.
- ensemble des distributions (resp. distributions tempérées) sur un espace $E \simeq \mathbb{R}^n$: $\mathcal{D}'(E)$ (resp. $\mathcal{S}'(E)$).
- transformée de Fourier (resp. transformée de Fourier inverse) : $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}$), partielle dans notre cas.
- opération de multiplication d'une fonction f par une fonction α : $m_\alpha(f)$.
- fonction ou opérateur identité sur un espace E : Id ou Id_E .
- logarithme népérien : $\ln$.
- fonctions trigonométriques sinus, cosinus, tangente et cotangente : $\sin$, $\cos$, $\tan$ et $\cotan$ respectivement.
- fonctions sinus hyperboliques et cosinus hyperboliques : $\sinh$ et $\cosh$ respectivement.
- fonctions trigonométrique ou hyperboliques réciproques : la notation de la fonction avec le préfixe arc .
- fonctions de Bessel de première espèce : J_α .
- fonctions de Bessel modifiées : I_α et K_α .
- fonctions hypergéométriques confluentes de Kummer : $M(\alpha, \beta, -)$ et $U(\alpha, \beta, -)$.
- fonctions de Legendre associées : P_α^β et Q_α^β .
- n ième polynôme d'Hermite : H_n .
- n ième fonction d'Hermite : φ_n .

Géométrie & topologie différentielle

- variété : par défaut, lisse.
- carte locale sur une variété M : (U, φ) avec $U \subset M$ un ouvert et $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$ homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$.
- variété simplement connexe : variété connexe par arcs et de groupe fondamental trivial.
- ensemble des fonctions lisses sur une variété M : $\mathcal{C}^\infty(M)$, par défaut, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) dans le premier chapitre (resp. second chapitre).

- *espace tangent à une variété M au point $x \in M$: $T_x(M)$.*
- *fibré tangent associé à une variété M : TM .*
- *différentielle au point x d'une application lisse f entre deux variétés : f_{*x} .*
- *push-forward par un difféomorphisme ϕ entre variétés : ϕ_* .*
- *pull-back par une application ϕ entre variétés : ϕ^* .*
- *ensemble des champs de vecteurs tangents lisses sur une variété M : $\Gamma(TM)$.*
- *base locale des champs de vecteurs sur une variété M étant donné une carte locale (U, φ) de coordonnées locales $(x_j)_j$: $\{\partial_{x_j} = (\varphi^{-1})_*(e_j)\}_j$ où $\{e_j\}_j$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$.*
- *écriture multi-indice de la composition des dérivations issues d'une base locale des champs de vecteurs sur une variété : dans le cadre du point précédent, si $I = (i_1, \dots, i_p)$ désigne un multi-indice, $\partial_{x_I} = \partial_{x_{i_1}} \circ \dots \circ \partial_{x_{i_p}}$.*
- *puissance d'une dérivation issue d'une base locale des champs de vecteurs sur une variété : dans le cadre du point précédent, si $I = (j, \dots, j) \in \mathbb{N}^p$, $\partial_{x_j}^p = \partial_{x_I}$.*
- *ensemble des k -formes différentielles sur une variété M : $\Omega^k(M)$.*
- *différentielle extérieure d'une forme différentielle ω sur une variété : $d\omega$.*
- *forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur une orbite coadjointe $\mathcal{O}$: $\omega^{\mathcal{O}}$.*
- *produit intérieur d'une forme différentielle ω par un champ de vecteurs X : $i_X(\omega)$.*
- *jème groupe de cohomologie de De Rham d'une variété M : $H_{dR}^j(M) = H_{dR}^j(M, \mathbb{R})$.*
- *crochet de Poisson : $\{-, -\}$.*
- *groupe des isométries d'une variété (pseudo-)riemannienne (M, g) : $\text{Iso}(M, g)$.*
- *groupe des transformations affines d'une variété affine (M, ∇) : $\text{Aff}(M, \nabla)$.*
- *groupe des automorphismes d'une variété M munie d'une structure quelconque : $\text{Aut}(M, -)$.*
- *groupe des transvections d'un espace symétrique (M, s) : $G(M, s)$.*
- *noyau de Bergman d'un domaine borné D : K_D .*
- *métrique de Bergman sur un domaine borné : β^B .*

Théorie des groupes & théorie de Lie

- *loi de groupe* : par défaut, notée multiplicativement.
- *neutre d'un groupe* : e dans un cadre abstrait, Id dans un sous-groupe de matrices inversibles.
- *translation à gauche (resp. à droite) par un élément g sur un groupe* : L_g (resp. R_g).
- *composante connexe au neutre d'un groupe de Lie G* : G_0 .
- *algèbre de Lie d'un groupe de Lie* : désignée par la (ou les) lettre(s) gothique(s) qui correspondent à l'appellation du groupe.
- *crochet de Lie* : $[-, -]$.
- *espace engendré par les crochets de Lie d'éléments de deux sous-ensembles $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ d'une même algèbre de Lie* : $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2\}$.
- *application exponentielle* : $\exp$.
- *produit direct (resp. produit semi-direct)* : $\times$ (resp. $\ltimes$).
- *centre d'un groupe de Lie G (resp. centre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$)* : $Z(\mathfrak{g})$ (resp. $Z(G)$).
- *forme de Killing d'une algèbre de Lie* : β^K .
- *action adjointe d'un élément g d'un groupe de Lie* : Ad_g .
- *action adjointe d'un élément X d'une algèbre de Lie* : ad_X .
- *action coadjointe d'un élément g d'un groupe de Lie* : Ad_g^b .
- *action d'un groupe de Lie G sur un espace homogène G/H* : $v : G \times G/H \rightarrow G/H : (g, g'H) \mapsto (gg')H$.
- *stabilisateur d'un point x sous l'action d'un groupe G* : G_x .
- *points d'un groupe de Lie G fixés par un automorphisme σ de G* : G^σ .
- *champ de vecteurs fondamental associé à un élément X d'une algèbre de Lie* : X^* .

Quantification par déformation

- *paramètre de déformation* : ν (resp. $\hbar$) dans un cadre formel (resp. non formel), en pratique, ν est un multiple réel du nombre imaginaire unité.
- *ensemble des séries formelles en ν à coefficients dans un ensemble E* : $E[[\nu]]$.
- *star-produit de Moyal* : $*_\nu^0$.

- *commutateur relativement à un star-produit* $*_\nu : [-, -]_{*_\nu}$.
- *ensemble des opérateurs linéaires inversibles définissant une équivalence de star-produits avec un star-produit $*_\nu$ fixé* : $\text{Op}(*_\nu)$.
- *star-produit défini par une équivalence $T \in \text{Op}(*_\nu)$ avec un star-produit $*_\nu$ donné* : $T(*_\nu) = T(T^{-1}(-) *_\nu T^{-1}(-))$.
- *ensemble des dérivations d'un star-produit $*_\nu$* : $\text{Der}(*_\nu)$.
- *ensemble des applications moment quantique relativement à un star-produit $*_\nu$* : $\text{MQ}(*_\nu)$.
- *produit issu de la quantification par déformation non formelle de Weyl* : $*_{\hbar}^W$.

Chapitre 1

Structures géométriques

« *Pour bâtir haut, il faut creuser profond* ». Ce proverbe mongol résume à lui seul l'importance et la place du présent chapitre dans notre travail. En effet, si ce texte devrait en priorité éclairer le cœur de nos recherches, l'étude de l'environnement géométrique dans lequel celles-ci se déroulent ne doit pas pour autant s'en trouver négligé. Et dans notre cas, comme exposé dans notre introduction, la compréhension de cet environnement s'avèrera aussi cruciale qu'une étude de sol l'est avant de construire un immeuble afin d'atteindre des objectifs raisonnables en mathématiques de la quantification.

Dans cette première partie, nous nous attaquons donc aux structures géométriques sous-jacentes à l'espace que nous allons quantifier, à savoir, la boule unité de $\mathbb{C}^n$ pour un naturel $n > 0$. Au travers de ce texte, mêlant regards théoriques généraux et études pratiques spécifiques, nous allons ouvrir successivement des portes donnant sur cet espace qui révélerons progressivement à la fois sa richesse et son importance dans un contexte plus général tant d'un point de vue géométrique qu'au niveau de la quantification par déformation de certaines variétés.

Les prérequis non basiques indispensables à la compréhension de ce chapitre seront les éléments standards de théorie de Lie et de géométrie différentielle, notamment complexe, riemannienne et symplectique, consultables dans toutes les bonnes références comme [He01], [KN96a] et [KN96b].

1.1 Notes sur les espaces symétriques

Dans cette première section du chapitre, nous proposons au lecteur de revenir sur la notion d'espace symétrique que nous avons déjà eu l'occasion d'étudier dans le cadre de notre mémoire de fin d'étude [Ko10]. Nous présenterons ici une vue très sommaire de quelques faits basiques associés à cette notion dont nous ferons usage par la suite. Le lecteur pourra notamment trouver les preuves complètes de ces faits et de nombreux renseignements complémentaires en consultant les références [Lo69a], [He01], [KN96b] et [Bi95] sur lesquelles est partiellement basé le document [Ko10].

1.1.1 Définitions de base

Rapellons tout d'abord la définition d'espace symétrique introduite par Ottmar Loos [Lo69a, ch.2], définition mettant en avant une loi de composition sur une variété lisse.

Définition 1.1.1. Un *espace symétrique* est une variété lisse connexe M munie d'une application lisse

$$s : M \times M \rightarrow M : (x, y) \mapsto s_x(y)$$

vérifiant, pour tout $x, y \in M$, les propriétés suivantes :

- (i) l'application $s_x : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme involutif ;
- (ii) le point x est un point fixe isolé de s_x ;
- (iii) la conjugaison de s_y par s_x vérifie l'égalité $s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x(y)}$.

Dans ce cadre, les applications s et s_x sont respectivement appelées *structure symétrique sur M* et *symétrie au point x* . Nous dénoterons par (M, s) (ou M si aucune confusion n'est possible) un tel espace symétrique. Si un point de base $o \in M$ est fixé, le triple (M, s, o) sera appelé *espace symétrique pointé*.

Notons qu'une formulation équivalente à cette définition s'obtient en remplaçant la condition (ii) par

- (ii)' pour tout $x \in M$, $s_{x \star x} = -\text{Id}_{T_x M}$;

[Ko10, ch.4, lem.4.15]. Comme nous le constaterons, cette définition n'est pas l'unique moyen d'introduire le concept d'espace symétrique. Parmi de nombreuses sources, les références [Be00, ch.1] et [Vo11, ch.1] explicitent clairement ce point.

Soulignons également en guise d'exemple que tout groupe de Lie connexe G peut-être muni d'une structure symétrique via l'application

$$s : G \times G \rightarrow G : (g, g') \mapsto g(g')^{-1}g. \quad (1.1)$$

Toutefois, la réciproque de cette assertion n'est pas vraie. En effet, la n -sphère euclidienne $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ n'est en général pas un groupe de Lie pour un nombre naturel n arbitraire, mais elle peut être munie de la structure d'espace symétrique définie au point $(x, y) \in S^n \times S^n$ par $s_x(y) := 2(x|y)x - y$ où $(-|-)$ dénote le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.1.2. Soient (M, s) , (M', s') deux espaces symétriques. Une application lisse $\phi : M \rightarrow M'$ est appelée

- (a) *morphisme d'espaces symétriques* si $\phi \circ s_x = s'_{\phi(x)} \circ \phi$ pour tout $x \in M$;
- (b) *isomorphisme d'espaces symétriques* si ϕ est à la fois un morphisme d'espaces symétriques et un difféomorphisme entre M et M' ;
- (c) *automorphisme d'espace symétrique* si ϕ est un isomorphisme d'espaces symétriques entre (M, s) et $(M', s') = (M, s)$.

Nous noterons $\text{Aut}(M, s)$ l'ensemble des automorphismes de (M, s) .

1.1.2 Triples symétriques & algèbres de Lie involutives

Nous allons maintenant introduire un concept qui va s'avérer équivalent à celui d'espace symétrique et qui nous sera particulièrement utile par la suite. Considérons (M, s, o) un espace symétrique pointé.

Proposition 1.1.3. [Lo69a, ch.2, thm.2.8 & thm.3.1] *Le groupe des automorphismes d'un espace symétrique (M, s) est groupe de Lie de dimension finie agissant différenciablement et transitivement sur M .*

La variété M étant connexe, nous tirons de cette proposition, que la composante connexe au neutre du groupe de Lie $\text{Aut}(M, s)$ est un groupe de Lie agissant différenciablement et transitivement sur M ; [He01, ch.2, thm.3.2 & prop.4.3]. Notons G celui-ci. Dès lors, le stabilisateur du point de base $G_o := \{g \in G : g(o) = o\}$ est un sous-groupe fermé de G et l'espace homogène G/G_o est difféomorphe à M par l'application $G/G_o \rightarrow M : gG_o \mapsto g(o)$; [He01, ch.2, thm.3.2 & prop.4.3]. Définissons

$$\sigma : \text{Aut}(M, s) \rightarrow \text{Aut}(M, s) : g \mapsto s_o \circ g \circ s_o. \quad (1.2)$$

Il est aisé de vérifier que la restriction de σ à G définit un automorphisme involutif de G . Celui-ci satisfait les inclusions $G_o \subseteq G^\sigma$ et $(G^\sigma)_0 \subseteq G_o$ où G^σ désigne le sous-groupe fermé de G constitué des éléments de G fixés par σ et $(G^\sigma)_0$ sa composante connexe au neutre. En effet, d'une part, si $g \in G_o$, alors

$$\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o = s_o \circ s_{g(o)} \circ g$$

car $g \in \text{Aut}(M, s)$, et donc $g \in G^\sigma$ étant donné que $g(o) = o$ et $s_o^2 = \text{Id}_M$. D'autre part, si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (G^\sigma)_0 : t \mapsto \gamma(t)$ est un sous-groupe à un paramètre de G^σ , alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s_o(\gamma(t)(o)) = \sigma(\gamma(t))(o) = \gamma(t)(o),$$

ce qui nous livre $\gamma(t)(o) = o$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ car o est un point fixe isolé de s_o . Ceci motive la définition et la proposition qui suivent.

Définition 1.1.4. Un triple (G, H, σ) est dit *symétrique* si

- (i) G est un groupe de Lie connexe;
- (ii) $\sigma : G \rightarrow G$ est un automorphisme involutif de G ;
- (iii) $H \subset G$ est un sous-groupe fermé de G satisfaisant

$$(G^\sigma)_0 \subseteq H \subseteq G^\sigma := \{g \in G : \sigma(g) = g\} \subseteq G,$$

avec $(G^\sigma)_0$ désignant la composante connexe au neutre de G^σ .

Dans ce cas, le quotient G/H est un espace homogène sur lequel G agit par l'action

$$G \times G/H \rightarrow G/H : (g, g'H) \mapsto gg'H.$$

Dans la suite, sauf mention explicite, nous supposons toujours un tel espace homogène G/H muni de cette action.

Proposition 1.1.5. Soient (M, s, o) un espace symétrique pointé, G la composante connexe au neutre du groupe des automorphismes cet espace symétrique, G_o le stabilisateur de o sous l'action de G , et σ l'automorphisme de G défini en (1.2).

- (a) Le triple (G, G_o, σ) est symétrique.
- (b) À tout triple symétrique (G, H, σ) , nous pouvons associer une structure symétrique sur l'espace homogène G/H via l'application

$$s^{G/H} : G/H \times G/H \rightarrow G/H : (gH, g'H) \mapsto g\sigma(g^{-1}g')H. \quad (1.3)$$

L'action G sur G/H est alors une action par automorphismes de l'espace symétrique $(G/H, s^{G/H})$.

(c) L'espace homogène G/G_o muni de l'application s^{G/G_o} forme un espace symétrique isomorphe à (M, s) .

Une vérification directe à partir des définitions livre la preuve de cette proposition ; [Ko10, ch.4, thm.4.25, lem.4.28 & lem.4.29]. Il est important de remarquer que les considérations précédentes ne décrivent pas une association univoque entre espaces symétriques pointés et triples symétriques. Toutefois, ce résultat constitue une porte ouverte vers un résultat plus fort.

Définition 1.1.6. Une *algèbre de Lie involutive* est définie comme étant un couple $(\mathfrak{g}, \sigma)$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension finie et $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ un automorphisme involutif. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet alors la décomposition en sous-espaces propres $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$ avec $\mathfrak{g}^\pm := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = \pm X\}$. Dans le cas où $[\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-] = \mathfrak{g}^+$, si l'action adjointe de $\mathfrak{g}^+$ sur $\mathfrak{g}^-$ est fidèle, alors $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est appelée *algèbre de Lie involutive de transvections*.

Un *homomorphisme* (resp. *isomorphisme*) d'algèbres de Lie involutives entre deux algèbres de Lie involutives $(\mathfrak{g}, \sigma)$ et $(\mathfrak{g}', \sigma')$ est un homomorphisme (resp. isomorphisme) d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ satisfaisant $\phi \circ \sigma = \sigma' \circ \phi$. Notons que si deux algèbres de Lie involutives sont isomorphes et si l'une des deux est de transvections, alors l'autre est également de transvections ; [Ko10, ch.5, lem.5.1.2].

Nous remarquons alors aisément qu'à un triple symétrique (G, H, σ) , nous pouvons associer une algèbre de Lie involutive en considérant $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G et $\sigma^\mathfrak{g} := \sigma_{*e}$ la différentielle de σ au neutre du groupe G . Dans ce cas, en utilisant les notations de la définition précédente, $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{h}$ et nous avons les inclusions

$$[\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^+] \subset \mathfrak{g}^+, \quad [\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-] \subset \mathfrak{g}^+, \quad [\mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-] = \mathfrak{g}^- \quad \text{et} \quad \text{Ad}_H(\mathfrak{g}^-) \subset \mathfrak{g}^-.$$

En effet, les trois premières inclusions découlent directement du fait que $\sigma^\mathfrak{g}$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ et la dernière relation suit des égalités

$$\sigma(\text{Ad}_h(X)) = \text{Ad}_{\sigma(h)}(\sigma^\mathfrak{g}(X)) = -\text{Ad}_h(X)$$

valables pour tout $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}^-$.

Si cette version algébrique ne suffit toutefois pas à encoder sans ambiguïté la structure géométrique d'un espace symétrique à isomorphisme près, son raffinement en algèbre de Lie involutive de transvections se rapproche bien de cet objectif, comme nous allons en donner ici une esquisse.

Commençons tout d'abord par définir un groupe jouant un rôle fondamental dans l'étude des espaces symétriques.

Définition 1.1.7. Le *groupe des transvections* d'un espace symétrique (M, s) est défini comme étant le sous-groupe connexe de $\text{Aut}(M, s)$ généré par les compositions d'un nombre pair de symétries s_x pour $x \in M$. Il est noté $G(M, s)$.

La connexité des espaces symétriques nous permet d'affirmer que le groupe des transvections d'un espace symétrique (M, s) est le plus petit sous-groupe de Lie de $\text{Aut}(M, s)$ stable sous l'automorphisme (1.2) qui agit différenciablement et transitivement sur M ; [Lo69a, ch.2, thm.3.1]. Il coïncide avec la composante connexe au neutre de $\text{Aut}(M, s)$ lorsqu'il est semi-simple ; [Lo69a, ch.4, prop.1.4]. De plus, en combinant le résultat [Lo69a, ch.2, cor. thm.3.1] avec une généralisation triviale de la preuve du lemme [Ko10, ch.4, lem.4.38], nous en tirons que le groupe $G(M, s)$ vérifie la propriété suivante.

Lemme 1.1.8. Soient (M, s, o) un espace symétrique pointé et G un sous-groupe de Lie du groupe $\text{Aut}(M, s)$ qui soit stable sous l'automorphisme σ défini en (1.2). Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\sigma^\mathfrak{g} := \sigma_{*e}|_{\mathfrak{g}}$ la différentielle de σ au neutre de G . En utilisant les notations de la définition 1.1.6 relativement à l'algèbre de Lie involutive $(\mathfrak{g}, \sigma^\mathfrak{g})$, définissons l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{G} := [\mathfrak{g}^-, \mathfrak{g}^-] \oplus \mathfrak{g}^-.$$

Alors, le couple $(\mathfrak{G}, \sigma^\mathfrak{G}|_{\mathfrak{G}})$ constitue une algèbre de Lie involutive de transvections telle que le sous-groupe de Lie connexe de $G \subset \text{Aut}(M, s)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ soit le groupe des transvections de l'espace symétrique (M, s) .

Considérons maintenant (M, s, o) un espace symétrique pointé. Des arguments semblables à ceux menant à la proposition 1.1.5 nous permettent d'associer à notre espace symétrique un triple symétrique

$$(G(M, s), (G(M, s))_o, \sigma) \tag{1.4}$$

où $(G(M, s))_o$ est le fixateur de o sous l'action de $G(M, s)$ et σ la restriction à $G(M, s)$ de l'automorphisme défini en (1.2) ; [Ko10, ch.4, prop.4.39]. Le lemme 1.1.8 nous indique que l'algèbre de Lie involutive de transvections associée à (M, s, o) vient alors de la réalisation infinitésimale de ce triple ; [Lo69a, ch.2, thm.3.1]. Réciproquement, les trois théorèmes de Lie nous permettent d'intégrer une algèbre de Lie involutive (de transvections ou non) $(\mathfrak{g}, \sigma^\mathfrak{g})$ en un triple symétrique (G, G^σ, σ) où G est un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

et σ un automorphisme involutif de G dont les points fixes forment le sous-groupe G^σ et tel que la différentielle de σ au neutre de G corresponde à $\sigma^\natural$. Ces quelques lignes nous laissent donc soupçonner le résultat qui suit ; [Vo11, ch.1, thm.1.4.13], une preuve explicite de celui-ci apparaissant dans un contexte particulier à la référence [Bi95, ch.1, prop.1.23].

Théorème 1.1.9. *L'ensemble des classes d'isomorphismes d'espaces symétriques simplement connexes pointés est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie involutives de transvections.*

L'intérêt de ce résultat réside bien entendu dans le fait qu'il fournit, pour chaque espace symétrique pointé, une version algébrique qui lui est équivalente et univoque à isomorphisme près, la notion d'algèbres involutives étant plus aisée à manier dans certains cas, notamment dans un objectif de classification des espaces symétriques ; [Ko10, ch.5].

1.1.3 Géométrie affine

Au-delà de ces dernières considérations, nous pouvons également nous intéresser à la géométrie sous-jacente à la structure symétrique d'un espace symétrique.

Au préalable, afin de fixer clairement le vocabulaire utilisé, spécifions que le terme de *variété affine* sera ici utilisé pour désigner une variété lisse munie d'une connexion affine (également appelée dérivée covariante)

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y.$$

Un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ sera, quant à lui, appelé *transformation affine* si $\phi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{(\phi_* X)}(\phi_* Y)$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$. L'ensemble des transformations affines d'une variété affine sera noté $\text{Aff}(M, \nabla)$.

Partant maintenant d'une variété affine (M, ∇) , une question légitime peut être de s'interroger sur la possibilité de définir une structure symétrique sur M à partir des *symétries géodésiques* définies localement en coordonnées normales par $-\text{Id}$. Lorsque, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $V_x \subset M$ de x sur lequel les symétries géodésiques locales $s_x : V_x \rightarrow V_x$ sont bien définies et préservent localement la connexion affine ∇ , la *variété affine* est dite *localement symétrique*. Dans le cas où, pour tout $x \in M$, cette symétrie s_x s'étend en une transformation affine globale de M , nous parlerons de *variété affine symétrique*.

Théorème 1.1.10. [KN96b, ch.11, thm.1.1 & 1.2] *Soit (M, ∇) une variété affine.*

- (a) *La variété M est affine localement symétrique si et seulement si la connexion ∇ est sans torsion et de tenseur de courbure parallèle.*
- (b) *Si la variété M est affine localement symétrique, simplement connexe, et si la connexion ∇ complète, alors M est une variété affine symétrique.*

Citons à titre informatif que cette approche est celle utilisée comme porte d'entrée à l'introduction des espaces symétriques dans les références [He01, ch.4] et [KN96b, ch.11]. Nous référons donc à celles-ci pour davantage de précisions sur les preuves et aspects géométriques utilisés dans la précédente formulation.

Ce dernier résultat n'est pas à sens unique comme nous l'indique le théorème suivant. Partant cette fois d'un espace symétrique (M, s) , il est possible de lui associer une unique connexion affine pour laquelle les symétries seront des transformations affines.

Théorème 1.1.11. *Sur un espace symétrique (M, s) , il existe une unique connexion affine ∇ telle que $s_x \in \text{Aff}(M, \nabla)$ pour tout $x \in M$. Celle-ci admet l'expression*

$$(\nabla_X Y)_x = \frac{1}{2} [X, Y + s_{x\star} Y]_x \quad (1.5)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$.

Le fond de ce théorème est standard ; [Lo69a, ch.2, prop.2.5 & cor.1]. Une vérification explicite montre que la forme de la connexion affine mentionnée correspond bien avec (1.5) ; [Ko10, ch.4, thm.4.17].

Définition 1.1.12. La connexion affine sur un espace symétrique (M, s) définie au théorème 1.1.11 est appelée *connexion de Loos* de (M, s) .

Comme nous l'indique la proposition suivante, un espace symétrique (M, s) muni de la connexion affine décrite en (1.5) devient alors une variété affine symétrique, la symétrie s_x n'étant autre que la symétrie géodésique autour du point x , et ce quel que soit $x \in M$.

Proposition 1.1.13. [KN96b, ch.11, thm.3.2] *Soit (M, s) un espace symétrique muni de sa connexion de Loos ∇ .*

- (a) *La connexion ∇ est complète, sans torsion et de tenseur de courbure parallèle.*

(b) Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M : t \mapsto \gamma(t)$ est une géodésique maximale sur (M, ∇) , alors $s_{\gamma(t)}(\gamma(t+s)) = \gamma(t-s)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

Dans le cadre de la proposition précédente, notons enfin que les géodésiques sur (M, ∇) passant par un point de M sont déterminées par l'action des sous-groupes à un paramètre du groupe $\text{Aut}(M, s)$ sur ce point ; [Ko10, ch.4, lem.4.31], [He01, ch.4, ex.A.1].

1.2 Espaces hermitiens symétriques

Nous allons maintenant introduire une classe particulière d'espaces symétriques sur laquelle nous travaillerons par la suite. Il s'agit de variétés complexes possédant à la fois une structure symétrique, riemannienne et symplectique, toutes ces structures étant compatibles entre elles. Semblablement au travail réalisé dans la première section de ce chapitre, nous étudierons certains aspects géométriques et algébriques associés à ces espaces symétriques en nous dirigeant vers des considérations relatives à la classification de ceux-ci. Enfin, nous terminerons cette section en détaillant un exemple relatif aux considérations théoriques abordées ; un exemple fondamental dont l'importance se révélera tout au long de ce chapitre. Au-delà de quelques rappels terminologiques, nous supposons le lecteur globalement familier avec les bases usuelles de géométrie riemannienne et complexe. Le matériel présenté ici étant relativement standard, nous renvoyons aux références [He01], [KN96a], [KN96b], [Lo69b] et [CP80] le lecteur souhaitant approfondir les résultats de base et les preuves associées à ceux-ci mentionnés dans cette section.

1.2.1 Bref rappel de géométrie complexe & kählerienne

Afin de fixer les notions et notations avec lesquelles nous travaillerons par la suite, nous commencerons cette section par un bref rappel de base sur les structures complexes et presque complexes sur une variété lisse. Nous nous référons à [He01, ch.8] et [KN96b, ch.9] pour toute consultation relative aux preuves des résultats abordés.

Définition 1.2.1. Soit M une variété lisse.

(a) Une *structure presque complexe* sur M est la donnée d'une application

$\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire $J : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ telle que $J^2 = -\text{Id}_{\Gamma(TM)}$.

- (b) Une *structure complexe* sur M est la donnée d'une structure presque complexe J telle que

$$[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY]$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Considérons M une *variété complexe* de dimension n , c'est-à-dire une variété sur laquelle il existe atlas $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tel que :

- (i) pour chaque $\alpha \in I$, l'application φ_α soit un homéomorphisme entre l'ouvert $U_\alpha \subset M$ et un ouvert de $\mathbb{C}^n$;
- (ii) les fonctions de transition entre les différents systèmes de coordonnées locales soient holomorphes.

L'atlas $\mathcal{A}$ induit alors sur M une structure de variété lisse orientable de dimension $2n$; [He01, ch.8, §1 & §2]. Soit $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Pour tout $x \in U$, notons $\varphi(x) := (z_1(x), \dots, z_n(x)) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées locales du point x dans la carte (U, φ) . Pour tout $1 \leq j \leq n$ et $x \in U$, posons $z_j(x) = p_j(x) + iq_j(x)$ avec $p_j(x), q_j(x) \in \mathbb{R}$. Nous pouvons associer à (U, φ) la carte locale (U, ψ) relative à la structure de variété lisse de dimension $2n$ sur M induite par $\mathcal{A}$ et définie en chaque point $x \in U$ par $\psi(x) := (p_1(x), q_1(x), \dots, p_n(x), q_n(x)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Définissons alors un endomorphisme J_x de $T_x(M)$ par

$$J_x((\partial_{p_j})_x) = (\partial_{q_j})_x \quad \text{et} \quad J_x((\partial_{q_j})_x) = -(\partial_{p_j})_x. \quad (1.6)$$

Les conditions de Cauchy-Riemann livrent l'indépendance de la définition de J_x par rapport au choix d'une autre carte locale $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ telle que $x \in U_\alpha$; [He01, ch.8, lem.1.1]. Dès lors, nous pouvons constater que l'application $J : x \mapsto J_x$ définit ainsi une structure complexe sur M . De façon réciproque, il est possible de montrer qu'une structure complexe J sur une variété lisse induit sur cette dernière une structure de variété complexe à laquelle J est associée par (1.6) ; [KN96b, ch.9, thm.2.5].

Ces considérations nous amèneront donc dans la suite à désigner une variété complexe par un couple (M, J) où M est une variété lisse et J une structure complexe sur M . Une application lisse ϕ entre deux variétés complexes (M, J) et (M', J') sera alors holomorphe si et seulement si $\phi_* \circ J = J' \circ \phi_*$; [KN96b, ch.9, prop.2.3]. Un difféomorphisme biholomorphe entre deux variétés complexes (M, J) et (M', J') sera appelé *isomorphisme de variétés complexes*. Dans le cas

d'un isomorphisme entre une variété complexe et elle-même, nous parlerons alors d'*automorphisme de la variété complexe*.

Définition 1.2.2. Soit (M, J) une variété complexe.

- (a) Une *structure hermitienne* sur M est la donnée d'une métrique riemannienne g sur M telle que $g(X, Y) = g(JX, JY)$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.
- (b) Soit g une structure hermitienne sur M . Alors, nous pouvons définir une 2-forme différentielle non dégénérée ω sur M par

$$\omega(X, Y) := g(JX, Y) \quad (1.7)$$

pour $X, Y \in \Gamma(TM)$. La métrique riemannienne g est alors appelée *structure kählérienne* sur M si la 2-forme ω est fermée. Dans ce cas, la variété M est dite *kählérienne*.

Dans ce cadre, si ∇ désigne la dérivée covariante de Levi-Civita sur M associée à la structure hermitienne g , notons que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) g est une structure kählérienne, c'est-à-dire $d\omega = 0$;
- (ii) $\nabla_X \omega = 0$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$;
- (iii) $\nabla_X J = 0$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$;

[He01, ch.8, ex.A.1]. Une variété kählérienne est donc une variété lisse possédant à la fois une structure complexe, riemannienne et symplectique, toutes trois compatibles entre elles. Dans la suite, nous désignerons une telle variété kählérienne par le triple (M, J, g) . L'ensemble de ses isométries biholomorphes sera appelé *groupe des automorphismes de (M, J, g)* et noté $\text{Aut}(M, J, g)$.

1.2.2 Structure de base des espaces hermitiens symétriques

Semblablement à l'approche exposée dans la sous-section 1.1.3 abordant la compatibilité d'une structure symétrique et d'une connexion affine sur une variété lisse connexe, nous pouvons nous interroger sur les propriétés relatives à la combinaison des concepts de variété kählérienne et d'espace symétrique.

Définition 1.2.3. Un *espace hermitien symétrique* est une variété kählérienne connexe (M, J, g) munie d'une structure symétrique s telle que $s_x \in \text{Aut}(M, J, g)$ pour tout $x \in M$.

Dans la suite, nous noterons $\text{Iso}(M, g)$ l'ensemble des isométries de la variété riemannienne (M, g) . Si (M, J, g) désigne un espace hermitien symétrique de structure symétrique s , rappelons que $\text{Iso}(M, g)$ se munit d'une structure de groupe de Lie agissant différenciablement sur M ; [He01, ch.4, lem.3.2]. Ce groupe contient toutes les symétries de l'espace symétrique, donc, en particulier, il contient le groupe des transvections $G(M, s)$. Il s'ensuit la transitivité de l'action de $\text{Iso}(M, g)$ sur M ; [Lo69a, ch.2, thm.3.1]. En outre, $\text{Aut}(M, J, g)$ est un sous-groupe fermé de $\text{Iso}(M, g)$ qui contient également toutes les symétries de (M, s) par définition même d'un espace hermitien symétrique. Dès lors, ces constatations couplées au résultat [He01, ch.4, thm.2.5] nous permettent de déduire la proposition suivante.

Proposition 1.2.4. *Soit (M, J, g) un espace hermitien symétrique.*

- (a) *Le groupe des automorphismes de (M, J, g) est un groupe de Lie de dimension finie qui agit holomorphiquement, isométriquement et transitivement sur (M, J, g) .*
- (b) *Le fixateur d'un point arbitraire de M sous l'action du groupe $\text{Aut}(M, J, g)$ est compact.*

Dans le cadre décrit ci-dessus, si ∇ désigne la dérivée covariante de Levi-Civita associée à g , il s'ensuit alors des inclusions

$$\text{Aut}(M, J, g) \subset \text{Iso}(M, g) \subset \text{Aff}(M, \nabla) \quad (1.8)$$

et du théorème 1.1.11 que la connexion de Loos de (M, s) n'est autre que ∇ . De plus, une vérification explicite montre que l'ensemble des automorphismes de (M, s) correspond à celui des transformations affines de (M, ∇) ; [Ko10, ch.4, prop.4.27]. Nous pouvons dès lors tirer de ces assertions l'inclusion

$$\text{Aut}(M, J, g) \subset \text{Aut}(M, s). \quad (1.9)$$

Notons également que si la composante connexe au neutre du groupe $\text{Aut}(M, J, g)$ est semi-simple alors elle correspond à la composante connexe au neutre du groupe $\text{Iso}(M, g)$ et réciproquement; [He01, ch.8, lem.4.3].

Considérons maintenant un espace hermitien symétrique (M, J, g) de structure symétrique s muni d'un point de base $o \in M$. Notons G la composante connexe au neutre du groupe $\text{Aut}(M, J, g)$. Nous tirons des résultats 1.2.4 et [He01, ch.2, thm.3.2 & prop.4.3] que G agit différenciablement et transitivement sur M en préservant la structure complexe et la structure kählerienne sur M . Soient $K := G_o$

le stabilisateur du point o sous l'action de G et $\sigma : G \rightarrow G$ l'automorphisme de G défini à partir de la conjugaison par la symétrie s_o . Un raisonnement semblable à celui nous amenant à la proposition 1.1.5 nous garantit que le triple (G, K, σ) est symétrique. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\sigma^\mathfrak{g}$ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ issu de la différentielle de σ au neutre de G . Alors, $(\mathfrak{g}, \sigma^\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie involutive et $\mathfrak{g}$ admet la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma^\mathfrak{g}(X) = -X\}$. Rappelons que, dans ce cas, $\text{Ad}_K(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. De plus, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ est isomorphe à l'espace tangent $T_o(M)$ par l'application

$$\mathfrak{m} \rightarrow T_o(M) : X \mapsto X_o^* := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tX)(o) ; \quad (1.10)$$

[He01, ch.4, thm.3.3]. Nous pouvons par conséquent définir $J_0 \in \text{End}(\mathfrak{m})$ et $g_0 \in \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^*$ comme étant la lecture de J_o et g_o respectivement à travers cet isomorphisme. Nous obtenons alors

$$(J_0 X)_o^* := J_o X_o^* \quad \text{et} \quad g_0(X, Y) := g_o(X_o^*, Y_o^*) \quad (1.11)$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{m}$. Comme g est hermitienne, nous avons $(J_0)^* g_0 = g_0$.

Avant de poursuivre notre développement, notons le remarquable résultat suivant.

Proposition 1.2.5. [KN96b, ch.11, thm.9.6] *Dans le cadre décrit ci-dessus, si G est semi-simple, il existe un élément Z_0 dans le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ tel que $J_0 = \text{ad}_{Z_0}|_{\mathfrak{m}}$.*

En reprenant maintenant les considérations exprimées précédemment, de la G -invariance de la structure complexe J , nous tirons l'égalité $k_{*o} \circ J_o = J_o \circ k_{*o}$ pour tout $k \in K$. Dès lors, comme $k_{*o}(X_o^*) = (\text{Ad}_k X)_o^*$ pour tout $k \in K$ et $X \in \mathfrak{m}$, nous en déduisons l'identité

$$(J_0(\text{Ad}_k X))_o^* = (\text{Ad}_k(J_0 X))_o^*$$

pour tout $k \in K$ et $X \in \mathfrak{m}$. L'endomorphisme J_0 est donc Ad_K -invariant. De façon semblable, comme la structure kählerienne g est invariante sous l'action de G , nous avons

$$g_0(X, Y) = (k^* g)_o(X_o^*, Y_o^*) = g_o(k_{*o}(X_o^*), k_{*o}(Y_o^*)) = g_0(\text{Ad}_k X, \text{Ad}_k Y)$$

pour tout $k \in K$ et $X, Y \in \mathfrak{m}$. D'où g_0 est également Ad_K -invariant. Comme le formule de manière précise la proposition suivante, il se trouve que ces conditions de Ad_K -invariance de J_0 et g_0 sont en réalité suffisantes pour reconstituer entièrement J et g sur M à partir de J_o et g_o par G -invariance.

Proposition 1.2.6. [KN96b, ch.11, prop.9.3] *Considérons (G, H, σ) un triple symétrique, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement les algèbres de Lie des groupes de Lie G et H , et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe de sous-espaces avec $\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma_{*e}(X) = -X\} \subset \mathfrak{g}$. Supposons l'existence :*

- (i) *d'un endomorphisme $J_0 : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ qui soit Ad_H -invariant et qui satisfasse $(J_0)^2 = -\text{Id}_{\mathfrak{m}}$;*
- (ii) *d'une application bilinéaire symétrique définie positive $\beta_0 \in \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^*$ qui soit Ad_H -invariante et satisfasse $(J_0)^* \beta_0 = \beta_0$.*

Alors, l'espace homogène $M := G/H$ se munit d'une structure d'espace hermitien symétrique pour laquelle les structures complexe et kählerienne sont G -invariantes et correspondent respectivement avec J_0 et β_0 au point $o := eH \in G/H$ via (1.11).

Dans le contexte de la proposition précédente, si J et β désignent respectivement la structures complexe et la structure kählerienne sur $M = G/H$, l'invariance de celles-ci sous l'action de G par

$$v : G \times G/H \rightarrow G/H : (g, g'H) \mapsto v_g(g'H) := gg'H$$

nous indique alors que

$$J_{gH} = (v_g)_{*o} \circ J_o \circ (v_{g^{-1}})_{*gH} \quad \text{et} \quad \beta_{gH} = \left((v_{g^{-1}})_{*gH} \right)^* \beta_o \quad (1.12)$$

pour tout $g \in G$. Les tenseurs J_o et β_o sont définis à partir de J_0 et β_0 respectivement via (1.11) où

$$X_o^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v_{\exp(-tX)}(eH)$$

pour tout $X \in \mathfrak{m}$. Cette dernière expression coïncide, bien entendu, exactement avec celle définie en (1.10) étant donné que v correspond à une action de G par automorphismes de la variété kählerienne $(G/H, J, \beta)$. Soulignons que c'est l'invariance de J_0 et β_0 sous l'action adjointe de H qui garantit que les structures J et β sont ainsi bien définies en (1.12). Quant à l'égalité $(J_0)^* \beta_0 = \beta_0$, elle nous garantit que la structure riemannienne β obtenue sera bien hermitienne. Enfin, la structure symétrique sur G/H est, quant à elle, donnée par l'involution σ via (1.3) tout comme dans la proposition 1.1.5.

1.2.3 Décompositions & classifications

Avant de nous attaquer aux grandes lignes des résultats majeurs associés à la classification des espaces hermitiens symétriques, attardons-nous quelques instants sur une parenthèse historique en amont de l'introduction de ces espaces symétriques. Entre les concepts d'espace symétrique et d'espace hermitien symétrique, nous avons naturellement celui d'espace dit *riemannien symétrique*, c'est-à-dire une variété riemannienne munie d'une structure symétrique pour laquelle les symétries sont des isométries. La structure des espaces riemanniens symétriques fut complètement élucidée par le mathématicien Élie Cartan dans les années 1920, en particulier dans les célèbres articles [Ca26] et [Ca27]. Il put ainsi établir une classification complète de ces variétés en ramenant celle-ci à la classification de toutes les algèbres de Lie réelles simples, problème qu'il avait résolu en 1914 à travers la référence [Ca14]. Comme pour les espaces symétriques avec le théorème 1.1.9, l'idée de ce lien réside essentiellement via un encodage algébrique des espaces riemanniens symétriques au travers des algèbres de Lie involutives. Considérant un espace symétrique pointé (M, s, o) qui soit riemannien pour la structure riemannienne g , nous pouvons lui associer le triple symétrique (G, K, σ) où G est la composante connexe au neutre du groupe $\text{Iso}(M, g)$, $K := G_o$ le stabilisateur du point o sous l'action de G , et σ l'automorphisme de G défini en (1.2); [He01, ch.4, thm.3.3]. Dans le cas présent, K étant un sous-groupe compact de G , le sous-groupe formé par l'image de K sous l'action adjointe de G est compact. Un *triple symétrique* possédant cette dernière propriété est dit *riemannien* et à tout tel triple, il est possible d'associer un espace riemannien symétrique; [He01, ch.4, prop.3.4]. Les *algèbres de Lie involutives* dites *orthogonales* constituent la version infinitésimale des triples symétriques riemanniens et les questions relatives à la classification des espaces riemanniens symétriques peuvent alors se traduire dans ce cadre algébrique, d'où l'origine des conclusions de Cartan. Si nous ne détaillerons pas ici davantage ces considérations, ceci n'étant pas présentement notre objectif, il est important de souligner que les résultats de cette sous-section dont il est donné au lecteur une vue sommaire dans le cadre des espaces hermitiens symétriques trouvent en partie leur source dans les travaux de Cartan sur les espaces riemanniens symétriques.

Avant d'explicitier ces résultats, rappelons quelques faits sur la structure des algèbres de Lie réelles semi-simples. Ceux-ci sont complètement standards et nous renvoyons aux références [Kn02, ch.6], [Kn01, ch.1] et [He01, ch.3 & ch.6] pour davantage d'informations. Si G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simple,

nous noterons dans la suite la *forme de Killing* de $\mathfrak{g}$ par

$$\beta^K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \beta^K(X, Y) := \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y).$$

Rappelons qu'il s'agit alors d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée (car $\mathfrak{g}$ est semi-simple) sur $\mathfrak{g}$ qui est Ad_G -invariante.

Définition 1.2.7. Nous appellerons *involution de Cartan* d'une algèbre de Lie réelle semi-simple $\mathfrak{g}$ un automorphisme involutif $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tel que la forme bilinéaire symétrique

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto -\beta^K(X, \sigma(Y))$$

soit définie positive. La décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres relativement à une involution de Cartan σ est, quant à elle, appelée *décomposition de Cartan* de $\mathfrak{g}$. Nous noterons celle-ci $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ avec

$$\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\}.$$

La forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est alors définie négative (resp. positive) sur $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) et les sous-espaces $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ sont orthogonaux relativement à β^K .

Notons qu'il existe toujours une telle involution de Cartan sur une algèbre de Lie réelle semi-simple $\mathfrak{g}$ et que deux telles involutions de Cartan sont nécessairement conjuguées entre elles via un automorphisme interne de $\mathfrak{g}$; [Kn02, ch.6, cor.6.18 & cor.6.19]. De plus, si G est un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple et qui admet la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, alors, d'une part, le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est un sous-groupe fermé de G , et, d'autre part, ce dernier est un sous-groupe compact maximal de G si et seulement si le centre de G est fini; [He01, ch.6, thm.1.1].

Nous sommes maintenant capable d'introduire les concepts d'espaces hermitiens symétriques de type compact et de type non compact.

Définition 1.2.8. Soit (M, J, g) un espace hermitien symétrique de structure symétrique s . Soient G la composante connexe au neutre du groupe $\text{Aut}(M, J, g)$, $K := G_o$ le stabilisateur d'un point $o \in M$ fixé sous l'action de G , et σ l'automorphisme de G défini par la conjugaison par la symétrie s_o . Supposons le groupe G semi-simple et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors, cette dernière se décompose en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma_{*\text{Id}}(X) = -X\}$.

- (a) Si $\mathfrak{g}$ est compacte, alors l'espace hermitien symétrique (M, J, g) est dit *de type compact*.
- (b) Si $\mathfrak{g}$ est non compacte et si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, alors l'espace hermitien symétrique (M, J, g) est dit *de type non compact*.

Il est possible de montrer que tout espace hermitien symétrique de type compact (resp. non compact) est simplement connexe et de courbure sectionnelle est partout positive (resp. négative); [He01, ch.5, thm.3.1 & ch.8, thm.4.6]. En outre, chaque espace hermitien symétrique simplement connexe (M, J, g) peut s'écrire comme le produit direct

$$M = \mathbb{C}^n \times M_+ \times M_- \quad (1.13)$$

pour un certain naturel n , où M_+ et M_- sont des espaces hermitiens symétriques respectivement de type compact et non compact; [He01, ch.8, prop.4.4].

Définition 1.2.9. Un espace hermitien symétrique simplement connexe sera dit *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme le produit direct de deux espaces hermitiens symétriques de dimensions inférieures.

Au vu de la décomposition (1.13) et sachant que M_+ et M_- s'écrivent comme un produit direct d'espaces hermitiens symétriques irréductibles, nous constatons que l'étude des espaces hermitiens symétriques irréductibles de type compact et de type non compact devient un point crucial en vue d'une compréhension et d'une possible classification de l'ensemble des espaces hermitiens symétriques. Cette étude peut notamment se faire via une classification au niveau des algèbres de Lie involutives orthogonales, semblablement à ce qui est évoqué dans l'introduction à cette sous-section dans le cas des espaces riemanniens symétriques; [He01, ch.8, §5]. Nous obtenons alors l'important résultat suivant.

Théorème 1.2.10. [He01, ch.8, §5 & §6] *Les variétés munies d'une structure d'espace hermitien symétrique irréductible de type compact (resp. non compact) sont les variétés homogènes du type G/K où :*

- (i) G est un groupe de Lie compact (resp. non compact) connexe simple de centre trivial;
- (ii) K est un sous-groupe propre connexe maximal de G (resp. un sous-groupe compact maximal de G) dont le centre est isomorphe au cercle S^1 .

Sur une telle variété G/K , toutes les structures riemanniennes G -invariantes coïncident à un facteur constant près.

L'étude et la classification des espaces riemanniens symétriques, combinées à ce dernier théorème, nous permettent d'obtenir une liste exhaustive des espaces hermitiens symétriques irréductibles. Le lecteur pourra consulter celle-ci à la référence [He01, ch.10, § 6.3].

1.2.4 Exemple d'espace hermitien symétrique

Il est maintenant temps de nous tourner vers un exemple concret relatif aux éléments présentés dans cette section. Nous réaliserons par la suite que le choix de cet exemple particulier n'est pas anodin. La présente étude s'appuiera en partie sur les références [He01, ch.10] et [Kn01, ch.1] dans lesquelles le lecteur pourra retrouver certains aspects de base de théorie de Lie non détaillés ci-dessous.

Fixons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et considérons le groupe

$$G := SU(1, n) = \{g \in GL(1 + n, \mathbb{C}) : \det(g) = 1 \text{ et } \bar{g}^t I_{1,n} g = I_{1,n}\}$$

où $\bar{g}^t$ est la matrice conjuguée transposée de g et $I_{1,n}$ la matrice définie par

$$I_{1,n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\text{Id}_n \end{pmatrix}.$$

Nous noterons un élément $g \in G$ par

$$g = \begin{pmatrix} a & b^t \\ c & D \end{pmatrix}$$

où a est un nombre complexe, b^t la matrice transposée d'un vecteur $b \in \mathbb{C}^n$, c un vecteur dans $\mathbb{C}^n$ et D une matrice complexe d'ordre n . Dans ces notations, l'inverse de g s'écrit

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c}^t \\ -\bar{b} & \bar{D}^t \end{pmatrix}$$

et la relation $\bar{g}^t I_{1,n} g = I_{1,n}$ revient à

$$\begin{cases} |a|^2 - \bar{c}^t c &= 1 \\ a\bar{b} - \bar{D}^t c &= 0 \\ \bar{D}^t D - \bar{b}b^t &= \text{Id}_n \end{cases} \quad (1.14)$$

Le groupe G tel que défini est un groupe de Lie connexe et simple de dimension $n(n+2)$. Son algèbre de Lie sera notée $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, n)$. Elle est constituée des

matrices de la forme

$$X = \begin{pmatrix} a_0 i & b_0^t \\ \overline{b_0} & D_0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où a_0 est un nombre réel, $b_0 = ((b_0)_1, \dots, (b_0)_n)$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et D_0 une matrice complexe d'ordre n qui soit anti-hermitienne et telle que $\text{Tr}(D_0) + a_0 i = 0$. Le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ est bien entendu défini à partir du commutateur de ces matrices.

L'automorphisme involutif

$$\sigma^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : X \mapsto -\overline{X}^t$$

définit une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ pour laquelle la décomposition de Cartan sous-jacente est $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) désigne l'ensemble des matrices anti-hermitiennes (resp. hermitiennes) de $\mathfrak{g}$. Un élément $X \in \mathfrak{k}$ (resp. $X \in \mathfrak{p}$) sous la forme (1.15) sera par conséquent tel que $b_0 = 0$ (resp. $a_0 = 0$ et $D_0 = 0$). Le sous-groupe

$$K := S(U(1) \times U(n)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G : a \in U(1) \text{ et } D \in U(n) \right\} \simeq U(n)$$

est alors un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Il est connexe et de dimension n^2 .

Nous allons maintenant utiliser la proposition 1.2.6 afin de montrer que l'espace homogène G/K peut se munir d'une structure d'espace hermitien symétrique. Nous pouvons constater sans peine que l'application

$$\sigma : G \rightarrow G : g \mapsto (\bar{g}^t)^{-1} \quad (1.16)$$

définit un automorphisme de G intégrant l'involution de Cartan $\sigma^{\mathfrak{g}}$ au niveau du groupe. Il s'ensuit que le triple (G, K, σ) est symétrique et la proposition 1.1.5 nous garantit que l'application

$$s^{G/K} : G/K \times G/K \rightarrow G/K : (gK, g'K) \mapsto g \sigma(g^{-1}g') K$$

confère à l'espace homogène G/K une structure d'espace symétrique sur lequel G agit par automorphismes via l'action

$$v : G \times G/K \rightarrow G/K : (g, g'K) \mapsto v_g(g'K) := gg'K.$$

La structure riemannienne sur G/K viendra, quant à elle, de la forme de Killing β^K de $\mathfrak{g}$. En effet, vu que β^K est Ad_G -invariante et comme $\text{Ad}_K(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$, la restriction de celle-ci à $\mathfrak{p}$ livre une forme bilinéaire symétrique définie positive Ad_K -invariante

$$\beta_0 : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow (X, Y) \mapsto \beta^K(X, Y). \quad (1.17)$$

Notons que l'invariance de β_0 sous l'action adjointe de K se traduit infinitésimalement par la relation

$$\beta_0([Z, X], Y) + \beta_0(X, [Z, Y]) = 0 \quad (1.18)$$

pour tout $Z \in \mathfrak{k}$ et $X, Y \in \mathfrak{p}$.

Il nous faut maintenant exhiber un endomorphisme Ad_K -invariant de $\mathfrak{p}$ induisant une structure complexe sur G/K . À ces fins, la proposition 1.2.5 nous indique qu'une étude du centre de $\mathfrak{k}$ peut s'avérer particulièrement utile dans le cas présent. Il est aisé de vérifier que le centre du sous-groupe compact maximal K s'identifie au groupe unitaire $U(1) \simeq S^1$ et que son algèbre de Lie coïncide avec le centre de $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire

$$Z(\mathfrak{k}) = \mathbb{R}Z_0 \quad \text{où} \quad Z_0 := \frac{n}{n+1} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & \frac{i}{n} \text{Id}_n \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Le choix de cet élément de base $Z_0 \in \mathfrak{k}$ se justifie de par le fait qu'il est le seul élément du centre de $\mathfrak{k}$, à un signe près, à satisfaire la propriété $\text{ad}_{Z_0}^2|_{\mathfrak{p}} = -\text{Id}_{\mathfrak{p}}$. Plus précisément, pour tout $b_0 \in \mathbb{C}^n$, nous avons

$$\left[Z_0, \begin{pmatrix} 0 & b_0^t \\ \overline{b_0} & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -(ib_0)^t \\ -i\overline{b_0} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}. \quad (1.20)$$

Posons $J_0 := \text{ad}_{Z_0}|_{\mathfrak{p}}$. Étant donné que K est connexe et que $Z_0 \in Z(\mathfrak{k})$, nous en déduisons $\text{Ad}_k(Z_0) = Z_0$ pour tout $k \in K$, et donc l'endomorphisme J_0 est Ad_K -invariant. De plus, nous pouvons tirer de (1.18) les égalités

$$\beta_0([Z_0, X], [Z_0, Y]) = -\beta_0(X, [Z_0, [Z_0, Y]]) = -\beta_0(X, -Y)$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{p}$. Il en découle que J_0 est isométrique relativement à β_0 .

Dès lors, J_0 et β_0 vérifient bien toutes les hypothèses de la proposition 1.2.6. Semblablement à (1.12), le transport sous l'action de G des tenseurs obtenus au point de base $\text{Id}K \in G/K$ par (1.11) définit alors sur G/K une structure d'espace hermitien symétrique pour laquelle G est un groupe d'automorphismes. Le théorème

1.2.10 nous permet de constater que celui-ci constitue en fait un exemple d'espace hermitien symétrique irréductible de type non compact de dimension $2n$. Dans la suite, nous noterons J et β les structures complexe et kählerienne ainsi obtenues sur G/K à partir de J_0 et β_0 .

Remarque 1.2.11.

- (a) N'importe quel multiple de β_0 par un nombre réel strictement positif satisfait également les hypothèses de la proposition 1.2.6. Le théorème 1.2.10 nous garantit que l'ensemble de ces formes bilinéaires symétriques induit toutes les structures riemanniennes G -invariantes sur G/K .
- (b) Il est aisé de vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$ que

$$\mathrm{Ad}_{\exp(tZ_0)}(X) = \begin{cases} X & \text{si } X \in \mathfrak{k} \\ \cos(t) X + \sin(t) J_0 X & \text{si } X \in \mathfrak{p} \end{cases}.$$

Dès lors, l'involution de Cartan $\sigma^{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$ correspond exactement à l'application $\mathrm{Ad}_{\exp(\pi Z_0)}$. De même, l'automorphisme $\sigma : G \rightarrow G$ n'est autre que la conjugaison par l'élément $\exp(\pi Z_0)$ du centre de K . Ces derniers faits dépassent bien entendu le cadre de cet exemple pour s'inscrire dans celui de la théorie des espaces hermitiens symétriques de type non compact.

- (c) Il suit de ce qui précède les égalités

$$s_{gK}^{G/K}(g'K) = g \exp(\pi Z_0) g^{-1} g'K = v_{\exp(\pi \mathrm{Ad}_g(Z_0))}(g'K)$$

pour tout $g, g' \in G$. D'où la symétrie $s_{gK}^{G/K} : G/K \rightarrow G/K$ est bien un automorphisme de notre espace hermitien symétrique qui coïncide avec l'action de l'élément $\exp(\pi \mathrm{Ad}_g(Z_0)) \in G$ sur G/K . En particulier, la symétrie au point de base $\mathrm{Id}K \in G/K$ est un automorphisme de $(G/K, J, \beta)$ appartenant au centre de K , comme attendu au regard de la référence [Lo69b, ch.8, thm.1.2].

1.3 Domaines bornés symétriques

Dans cette section du chapitre, à la fois centrale de nom et d'importance, nous allons progressivement basculer vers une autre réalité. En effet, nous aborderons au travers des théorèmes 1.3.2 et 1.3.7 un lien fort entre l'ensemble des espaces hermitiens symétriques de type non compact et celui des ouverts connexes bornés

de $\mathbb{C}^n$ admettant une structure symétrique pour laquelle les symétries sont biholomorphes. Nous approcherons d'abord ce résultat en prolongeant l'exemple de la section précédente, puis nous introduirons les outils théoriques nécessaires à la compréhension du cas général. Dans cet objectif, les références [He01] et [Kr13] nous seront de première utilité. Enfin, nous reviendrons une nouvelle fois sur l'exemple de la section précédente afin de poursuivre l'étude de la structure associée à celui-ci.

1.3.1 Introduction via un exemple particulier

Commençons cette section en reprenant l'exemple exposé à la sous-section 1.2.4. Pour rappel, nous travaillons avec l'espace homogène G/K où G désignait le groupe de Lie $SU(1, n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, et K le sous-groupe compact maximal $S(U(1) \times U(n)) \subset G$. L'étude de cette variété homogène nous avait permis de montrer qu'elle admet une structure d'espace hermitien symétrique de type non compact. Dans la suite, nous reprendrons exactement les notations utilisées précédemment dans ce cadre.

Considérons maintenant la *boule unité* de $\mathbb{C}^n$ définie par

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}^n : \bar{z}^t z < 1\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Clairement, $\mathbb{D}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et admet donc une structure de variété complexe, notamment via la carte globale $(U = \mathbb{D}, \varphi = \text{Id}_{\mathbb{D}})$. Notons $J^{\mathbb{D}}$ la structure complexe sur $\mathbb{D}$ associée à cette structure de variété complexe par (1.6) et définissons l'application

$$\tau : G \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : \left(g = \begin{pmatrix} a & b^t \\ c & D \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \tau_g(z) := \frac{c + Dz}{a + b^t z}. \quad (1.21)$$

Fixons

$$g = \begin{pmatrix} a & b^t \\ c & D \end{pmatrix} \in G.$$

L'application τ_g est une fonction rationnelle en chacune des composantes de z . Elle est donc holomorphe sur $\mathbb{D} \setminus \{z \in \mathbb{D} : a + b^t z = 0\}$. Or, en utilisant les relations (1.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\overline{a + b^t z} \right)^t (a + b^t z) &= |a|^2 + \bar{a} b^t z + \bar{z}^t \bar{b} a + \bar{z}^t \bar{b} b^t z \\ &= 1 + \bar{c}^t c + \bar{c}^t D z + \bar{z}^t \bar{D}^t c + \bar{z}^t (\bar{D}^t D - \text{Id}_n) z \\ &= 1 - \bar{z}^t z + \left(\overline{c + Dz} \right)^t (c + Dz). \end{aligned}$$

La somme des carrés des modules des composantes de $c + Dz \in \mathbb{C}^n$ étant toujours positive et $1 - \bar{z}^t z$ étant strictement positif pour $z \in \mathbb{D}$, il s'ensuit que $a + b^t z$ ne s'annule jamais pour $z \in \mathbb{D}$. L'application τ_g est donc bien définie et holomorphe sur son domaine $\mathbb{D}$. Par ailleurs, nous tirons de ces constatations

$$1 - \overline{\tau_g(z)}^t \tau_g(z) = \frac{1 - \bar{z}^t z}{|a + b^t z|^2} > 0$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. D'où, $\text{im}(\tau_g) \subset \mathbb{D}$. Il est de plus aisé de vérifier que l'application $\tau_g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est bijective et admet l'application $\tau_{g^{-1}}$ pour inverse. L'élément $g \in G$ étant arbitraire dans notre raisonnement, il s'ensuit que $\tau_{g^{-1}}$ est également une application holomorphe sur $\mathbb{D}$, ceci faisant de τ_g un automorphisme de la variété complexe $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}})$.

Le lecteur vérifiera sans peine que l'application τ satisfait les égalités $\tau_{\text{Id}} = \text{Id}_{\mathbb{D}}$ et $\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 g_2}$ pour tout $g_1, g_2 \in G$. Dès lors, l'expression (1.21) définit une action de G sur $\mathbb{D}$ par automorphismes de $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}})$.

Fixons le point $o := 0 \in \mathbb{D}$. Quelques calculs élémentaires à partir des relations (1.14) montrent alors que

$$\{\tau_g(o) : g \in G\} = \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \{g \in G : \tau_g(o) = o\} = K.$$

Par conséquent, l'action τ est transitive et l'espace homogène G/K est difféomorphe à $\mathbb{D}$ par l'application

$$\phi : G/K \rightarrow \mathbb{D} : gK \mapsto \tau_g(o).$$

Notons que cette dernière est G -équivariante, c'est-à-dire qu'elle entrelace les actions de G sur G/K et $\mathbb{D}$ respectivement. Semblablement à l'expression (1.10), l'application

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} 0 & b_0^t \\ \bar{b}_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} &\longmapsto X_o^* = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tau_{\exp(-sX)}(o) \in T_o(\mathbb{D}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } b_0 = 0 \\ - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{\tanh\left(s \sqrt{\bar{b}_0^t b_0}\right)}{\sqrt{\bar{b}_0^t b_0}} \bar{b}_0 & \text{si } b_0 \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.22)$$

définit alors un isomorphisme entre $\mathfrak{p}$ et $T_o(\mathbb{D})$. Comme la structure complexe $J^{\mathbb{D}}$ est invariante sous l'action de G , elle est encodée au sein de la lecture de $J_o^{\mathbb{D}}$ à travers cet isomorphisme. Notons $J_o^{\mathbb{D}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{p}$ ainsi obtenu. Pour rappel, comme explicité en (1.11), nous avons alors $(J_o^{\mathbb{D}} X)_o^* = J_o^{\mathbb{D}} X_o^*$ pour

tout $X \in \mathfrak{p}$. Un rapide calcul à partir de l'expression (1.22) et une comparaison du résultat avec (1.20) nous livre alors l'égalité

$$J_0^{\mathbb{D}} = J_0 = \text{ad}_{Z_0}|_{\mathfrak{p}}$$

où $Z_0 \in Z(\mathfrak{k})$ est défini en (1.19), J_0 étant l'endomorphisme de $\mathfrak{p}$ encodant la structure complexe J que nous avons défini sur G/K . Par conséquent, le difféomorphisme ϕ étant G -équivariant, le transport de la structure complexe de G/K sur $\mathbb{D}$ par ϕ coïncide avec $J^{\mathbb{D}}$, c'est-à-dire

$$\phi_* \circ J \circ \phi_*^{-1} = J^{\mathbb{D}}.$$

L'application ϕ est donc biholomorphe.

La structure symétrique $s^{G/K}$ de G/K peut alors également être transportée par ϕ sur $\mathbb{D}$. Ceci définit sur $\mathbb{D}$ une structure symétrique

$$s^{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : (x, y) \mapsto s_x^{\mathbb{D}}(y) := \phi \left(s_{\phi^{-1}(x)}^{G/K} (\phi^{-1}(y)) \right)$$

telle que $s_x^{\mathbb{D}}$ soit un automorphisme de $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}})$ pour tout $x \in \mathbb{D}$.

Nous venons donc de montrer que notre espace hermitien symétrique de type non compact G/K pouvait être complètement réalisé, à la fois en tant que variété complexe et en tant qu'espace symétrique, comme l'ouvert $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ muni de la structure symétrique $s^{\mathbb{D}}$ pour laquelle les symétries sont biholomorphes. Ce fait n'est en réalité pas isolé et s'étend à tous les espaces hermitiens symétriques de type non compact.

Définition 1.3.1. Un *domaine borné* est un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un *domaine borné* est dit *symétrique* s'il est muni d'une structure symétrique pour laquelle les symétries sont biholomorphes.

Semblablement aux définitions données à la sous-section 1.2.1, un difféomorphisme biholomorphe d'un domaine borné D dans lui-même sera appelé *automorphisme du domaine borné* D . Nous noterons par $\text{Aut}(D)$ l'ensemble des automorphismes d'un domaine borné D .

Théorème 1.3.2. [He01, ch.8, thm.7.1] *Tout espace hermitien symétrique de type non compact est isomorphe, à la fois en tant que variété complexe et en tant qu'espace symétrique, à un domaine borné symétrique.*

Signalons au passage que ce théorème fut initialement établi par Élie Cartan dans le document [Ca35] par examination au cas par cas en utilisant la classification des

espaces hermitiens symétriques dont nous avons brièvement discutés à la section 1.2.3. La première preuve *a priori* de ce résultat fut donnée par Harish-Chandra. Celle-ci est reproduite par Sigurdur Helgason dans la référence [He01, ch.8, § 7].

1.3.2 Noyau & métrique de Bergman

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet de cette section. En particulier, nous allons compléter le résultat fourni par le théorème 1.3.2 et voir que tout domaine borné symétrique se munit d'une structure d'espace hermitien symétrique de type non compact. Afin d'approcher cette conclusion, esquissons tout d'abord les bases relatives au concept de fonction noyau d'un domaine borné. Celui-ci fut introduit par Stefan Bergman dans son article [Be22], et ensuite approfondi dans les documents [Be47] et [Be48] du même auteur. Outre ces références, le texte de cette sous-section sera notamment basé sur [Kr13, ch.1], [He01, ch.8] et [Lo69b, ch.8].

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Notons dL la mesure de Lebesgue sur $D \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et définissons un sous-ensemble de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur D par

$$\mathcal{H}(D) := \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe} : \int_D |f(z)|^2 dL(z) < \infty \right\}.$$

Si nous munissons cet espace de fonctions du produit scalaire hermitien

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_{\mathcal{H}(D)} : \mathcal{H}(D) \times \mathcal{H}(D) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f_1, f_2) &\mapsto \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}(D)} := \int_D f_1(z) \overline{f_2(z)} dL(z), \end{aligned}$$

alors celui-ci constitue un espace de Hilbert séparable; [Kr13, ch.1, lem.1.1.2]. Pour chaque $z \in D$, l'application qui à $f \in \mathcal{H}(D)$ associe $f(z) \in \mathbb{C}$ est alors une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{H}(D)$; [Kr13, ch.1, lem.1.1.3]. D'où, par le théorème de Fréchet-Riesz, pour chaque $z \in D$, il existe une unique fonction $K_z \in \mathcal{H}(D)$ satisfaisant

$$\langle f, K_z \rangle_{\mathcal{H}(D)} = f(z)$$

pour tout $f \in \mathcal{H}(D)$; [Wi07, ch.5, thm.19.1].

Définition 1.3.3. Dans le cadre ci-dessus, la fonction

$$K_D : D \times D \rightarrow \mathbb{C} : (z, \zeta) \mapsto K_D(z, \zeta) := \overline{K_z(\zeta)}$$

est appelée *noyau de Bergman* de D .

Soulignons que le noyau de Bergman de D vérifie donc, par définition même, l'égalité

$$f(z) = \int_D K_D(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) dL(\zeta)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(D)$. Dans son article [Be47] de 1947, Bergman introduisit sa fonction noyau sous une autre approche en utilisant des fonctions orthogonales de $\mathcal{H}(D)$. En effet, si $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(D)$ désigne une base orthonormale de $\mathcal{H}(D)$, la série

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(z) \overline{f_j(\zeta)}, \quad \text{avec } z, \zeta \in D, \quad (1.23)$$

converge uniformément vers $K_D(z, \bar{\zeta})$ sur tout sous-ensemble compact du produit $D \times D$; [He01, ch.8, thm.3.3]. L'expression (1.23) ne dépend donc pas de la base orthonormale de $\mathcal{H}(D)$ choisie. De plus, nous remarquons aisément à partir de cette même expression que $K_D(z, \bar{z}) > 0$ pour tout $z \in D$; [Kr13, ch.1, prop.1.1.15].

Le noyau de Bergman est une donnée intrinsèque à chaque domaine borné. Il possède d'importantes propriétés faisant de lui un outil de choix dans les études analytiques et géométriques relatives aux domaines bornés; [Be47], [Be48], [Kr13]. Toutefois, le calcul explicite du noyau de Bergman d'un domaine borné arbitraire peut très vite se présenter comme étant une tâche ardue, voire hors de portée. La référence [Kr13, ch.1] fournira au lecteur quelques méthodes pouvant mener à l'obtention du noyau de Bergman dans certains cas, et notamment, dans le cas de la boule unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$.

Lemme 1.3.4. [Kr13, ch.1, thm.1.1.24] *Soient n un nombre naturel non nul et $\mathbb{D}$ le domaine borné de $\mathbb{C}^n$ défini par $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}^n : \bar{z}^t z < 1\}$. Le noyau de Bergman de $\mathbb{D}$ est donné au point $(z, \zeta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par*

$$K_{\mathbb{D}}(z, \zeta) = \frac{n!}{\pi^n} \left(\frac{1}{1 - z^t \zeta} \right)^{n+1}.$$

Dans notre cadre d'étude, le noyau de Bergman d'un domaine borné D nous sera particulièrement utile. En effet, il va nous permettre de définir une structure kählerienne sur D qui lui est associé. Au préalable, rappelons très brièvement quelques notations de géométrie complexe que nous utiliserons dans la suite; [He01, ch.8, §2]. Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous désignerons par z un point de D et par $(z_1 = p_1 + iq_1, \dots, z_n = p_n + iq_n) \in \mathbb{C}^n$ les

composantes de z , avec $p_j, q_j \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Un *champ de tenseurs complexes* sur D sera alors considéré comme un élément du complexifié de l'ensemble des champs de tenseurs (réels) sur D . En particulier, pour $1 \leq j \leq n$, nous pouvons définir les champs de vecteurs complexes

$$\partial_{z_j} := \frac{1}{2} (\partial_{p_j} - i\partial_{q_j}) \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{z}_j} := \frac{1}{2} (\partial_{p_j} + i\partial_{q_j})$$

ainsi que les 1-formes différentielles complexes

$$dz_j := dp_j + idq_j \quad \text{et} \quad d\bar{z}_j := dp_j - idq_j.$$

Ces tenseurs satisfont alors aux relations de dualité $dz_i (\partial_{z_j}) = d\bar{z}_i (\partial_{\bar{z}_j}) = \delta_{i,j}$ et $dz_i (\partial_{\bar{z}_j}) = d\bar{z}_i (\partial_{z_j}) = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Comme le noyau de Bergman K_D de D satisfait $K_D(z, \bar{z}) > 0$ pour tout $z \in D$, nous pouvons définir sur D le champ de tenseurs complexe

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\partial_{z_i} \partial_{\bar{z}_j} \ln (K_D(z, \bar{z}))] dz_i \otimes d\bar{z}_j. \quad (1.24)$$

La restriction de la partie réelle de celui-ci aux champs de vecteurs sur D définit alors une structure kählerienne sur D que nous noterons β^B ; [He01, ch.8, prop.3.4].

Définition 1.3.5. La structure kählerienne β^B induite sur un domaine borné D par la partie réelle du champ de tenseurs complexe (1.24) est appelée *métrique de Bergman* sur D .

La métrique de Bergman sur D possède l'importante propriété qui suit.

Proposition 1.3.6. [He01, ch.8, prop.3.5] *Soit D un domaine borné muni de sa métrique de Bergman β^B . Alors, nous avons l'inclusion $\text{Aut}(D) \subset \text{Iso}(D, \beta^B)$.*

En particulier, l'ensemble des automorphismes de D est un sous-groupe fermé de $\text{Iso}(D, \beta^B)$ agissant holomorphiquement et isométriquement sur D . Si J^D désigne la structure complexe sur D associée à sa structure d'ouvert de $\mathbb{C}^n$, le triple (D, J^D, β^B) définit bien évidemment une variété kählerienne et nous avons alors l'égalité

$$\text{Aut}(D) = \text{Aut}(D, J^D, \beta^B).$$

Notons enfin qu'il suit directement de ces constatations que tout domaine borné symétrique admet une structure d'espace hermitien symétrique. Cependant, nous pouvons améliorer ce corollaire comme suit.

Théorème 1.3.7. [He01, ch.8, thm.7.1] *Tout domaine borné symétrique muni de sa métrique de Bergman est un espace hermitien symétrique de type non compact.*

Cet important résultat couplé au théorème (1.3.2) nous permet de caractériser l'ensemble des espaces hermitiens symétriques de type non compact comme étant, à isomorphisme près, en correspondance avec l'ensemble des domaines bornés symétriques. Notons qu'une conséquence directe de ce fait est qu'un domaine borné symétrique est nécessairement simplement connexe.

1.3.3 Structure de la boule unité de $\mathbb{C}^n$

Terminons cette section en revenant quelques instants sur l'exemple de domaine borné symétrique que nous avons explicité au cours de la sous-section 1.3.1. Pour rappel, en reprenant les notations des sous-sections 1.2.4 et 1.3.1, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, si $G = SU(1, n)$ et $K = S(U(1) \times U(n)) \subset G$, nous avons constaté que la boule unité de $\mathbb{C}^n$, notée $\mathbb{D}$, pouvait être munie d'une structure de domaine borné symétrique réalisant l'espace hermitien symétrique de type non compact $(G/K, J, \beta)$ à la fois en tant que variété complexe et en tant qu'espace symétrique.

Nous n'avons alors pas étudié le transfert de la structure kählérienne β de G/K à $\mathbb{D}$ par le difféomorphisme $\phi : G/K \rightarrow \mathbb{D} : gK \mapsto \tau_g(o)$ où τ est l'action de G sur $\mathbb{D}$ définie en (1.21). Nous sommes maintenant en mesure d'affirmer que cette structure riemannienne $(\phi^{-1})^* \beta$ coïncide nécessairement, à un multiple près, avec la métrique de Bergman β^B sur $\mathbb{D}$. En effet, ceci découle simplement du premier point de la remarque 1.2.11 et du fait que $\phi^* \beta^B$ définit une structure kählérienne G -invariante sur $(G/K, J)$ par la proposition 1.3.6. Nous noterons $c > 0$ le réel positif satisfaisant

$$\phi^* \beta^B = c\beta.$$

Par ailleurs, comme nous l'avons vu précédemment, le calcul du champ de tenseurs complexe (1.24) suffit afin de déterminer la métrique de Bergman de $\mathbb{D}$. Dans le cas de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, en utilisant les notations de la sous-section précédente, un calcul élémentaire à partir de l'expression explicite noyau de Bergman $K_{\mathbb{D}}$ de $\mathbb{D}$ fournie au lemme 1.3.4 nous permet de montrer que ce champ de tenseurs complexe correspond à

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{n+1}{(1 - \bar{z}^t z)^2} [(1 - \bar{z}^t z) \delta_{i,j} + \bar{z}_i z_j] \right] dz_i \otimes d\bar{z}_j.$$

De plus, comme nous l'avons vu à la section précédente, la métrique de Bergman β^B étant G -invariante, elle est complètement encodée par le tenseur $\beta_0^B \in \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*$ obtenu via (1.11) par sa lecture à travers l'isomorphisme $\mathfrak{p} \simeq T_o(\mathbb{D})$ décrit en (1.22). Rappelons que le point $o \in \mathbb{D}$ désigne ici l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Dans le cas présent, nous pouvons sans peine calculer ce tenseur β_0^B . Soient

$$X := \begin{pmatrix} 0 & b_0^t \\ \overline{b_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & (b'_0)^t \\ \overline{b'_0} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}. \quad (1.25)$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$, nous avons

$$dz_j(X_o^*) = \sum_{k=1}^n dz_j \left[\operatorname{Re}(-\overline{b_0}) (\partial_{z_k} + \partial_{\overline{z_k}}) + \operatorname{Im}(-\overline{b_0}) (i(\partial_{z_k} - \partial_{\overline{z_k}})) \right] = (-\overline{b_0})_j$$

et de façon semblable $d\overline{z}_j(Y_o^*) = (-b'_0)_j$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \beta_0^B(X, Y) &= \beta_o^B(X_o^*, Y_o^*) = \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{j=1}^n (n+1) dz_j \otimes d\overline{z}_j \right) (X_o^*, Y_o^*) \right) \\ &= (n+1) \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \left((-\overline{b_0})_j (-b'_0)_j \right) \\ &= (n+1) \sum_{j=1}^n \left[\operatorname{Re}((b_0)_j) \operatorname{Re}((b'_0)_j) + \operatorname{Im}((b_0)_j) \operatorname{Im}((b'_0)_j) \right]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Au vu de l'expression (1.17) et étant donné que $\phi^* \beta^B$ correspond avec $c\beta$, le tenseur β_0^B est alors un multiple $c > 0$ de la forme de Killing β^K de $\mathfrak{g}$ restreinte à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier dans notre cas l'égalité

$$c = \frac{1}{4}.$$

Ceci peut se faire en calculant $\beta^K(X, X) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_X^2)$ dans le cas où $X \neq 0$ est choisi de façon à faciliter les calculs, par exemple, avec $b_0^t := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$, et en comparant le résultat avec $\beta_0^B(X, X)$ qui prendrait alors la valeur $n+1$.

Remarque 1.3.8. Dans le cas $n = 1$, pour tout $z = z_1 = p_1 + iq_1 \in \mathbb{D}$ avec $p := p_1, q := q_1 \in \mathbb{R}$, nous avons les égalités

$$\beta_z^B(\partial_p, \partial_p) = \operatorname{Re} \left(\left(\frac{2}{(1-|z|^2)^2} \right) dz (\partial_z + \partial_{\overline{z}}) d\overline{z} (\partial_z + \partial_{\overline{z}}) \right) = \frac{2}{(1-|z|^2)^2};$$

$$\beta_z^B(\partial_p, \partial_q) = \operatorname{Re} \left(i \left(\frac{2}{(1-|z|^2)^2} \right) dz (\partial_z + \partial_{\overline{z}}) d\overline{z} (\partial_z - \partial_{\overline{z}}) \right) = 0;$$

$$\beta_z^B(\partial_q, \partial_q) = \operatorname{Re} \left(i^2 \left(\frac{2}{(1-|z|^2)^2} \right) dz (\partial_z - \partial_{\overline{z}}) d\overline{z} (\partial_z - \partial_{\overline{z}}) \right) = \frac{2}{(1-|z|^2)^2}.$$

D'où, la variété riemannienne $(\mathbb{D}, \beta^B)$ correspond au célèbre disque de Poincaré.

Les expressions du noyau et de la métrique de Bergman sur $\mathbb{D}$ nous permettent maintenant d'envisager la définition d'une forme volume et d'une mesure invariante sur $\mathbb{D}$ pour l'action de G par τ . En effet, pour tout $z \in \mathbb{D}$, nous avons

$$K_{\mathbb{D}}(z, \bar{z}) = c' \sqrt{\det(\beta_z^B)}$$

où $c' > 0$ est une constante; [He01, ch.8, prop.3.6]. Dès lors, des arguments classiques de géométrie riemanniennes nous livrent sur $\mathbb{D}$ la forme volume associée à la métrique de Bergman

$$\frac{1}{c'} \left(\frac{i}{2}\right)^n K_{\mathbb{D}}(z, \bar{z}) \bigwedge_{j=1}^n (dz_j \wedge d\bar{z}_j) ;$$

[He01, ch.8, prop.2.5]. De là s'ensuit l'introduction d'une mesure sur $\mathbb{D}$.

Proposition 1.3.9. *Sur la boule unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, définissons la mesure*

$$d\mu(z) := K_{\mathbb{D}}(z, \bar{z}) dL(z) = \left(\frac{1}{1 - \bar{z}^t z}\right)^{n+1} \left(\frac{n!}{\pi^n} dL(z)\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

(a) [Wi07, ch.2, thm.8.9] *La mesure de Lebesgue de $\mathbb{D}$ vaut $\frac{\pi^n}{n!}$.*

(b) [Ru08, ch.2, thm.2.2.6] *La mesure $d\mu$ est G -invariante, c'est-à-dire*

$$\int_{\mathbb{D}} f(\tau_g(z)) d\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z) d\mu(z)$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mu)$ et $g \in G$.

Sans entrer dans les détails analytiques de la preuve de ces résultats, précisons que ces derniers reposent essentiellement sur une application du bien connu théorème du changement de variable.

Enfin, clôturons cette analyse de la structure de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ en synthétisant et en perfectionnant les connaissances que nous avons acquises précédemment au travers de deux lemmes. Les notations utilisées dans les énoncés de ceux-ci sont celles développées dans cette section et dans la sous-section 1.2.4.

Lemme 1.3.10.

(a) *Avec $G = SU(1, n)$ et $K \simeq U(n)$, le triple $(G/K, J, \frac{1}{4}\beta)$ muni de la structure symétrique $s^{G/K}$ est un espace hermitien symétrique de type non compact.*

(b) La variété complexe $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}})$ (resp. la variété kählérienne $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}}, \beta^B)$) définie à partir de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ et munie de la structure symétrique $s^{\mathbb{D}}$ est un domaine borné symétrique (resp. un espace hermitien symétrique de type non compact).

(c) L'application $\phi : G/K \rightarrow \mathbb{D} : gK \mapsto \tau_g(o)$ définit

- (i) un isomorphisme d'espaces symétriques entre $(G/K, s^{G/K})$ et $(\mathbb{D}, s^{\mathbb{D}})$;
- (ii) un isomorphisme de variétés complexes entre $(G/K, J)$ et $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}})$;
- (iii) une isométrie entre les variétés riemanniennes $(G/K, \frac{1}{4}\beta)$ et $(\mathbb{D}, \beta^B)$;
- (iv) un symplectomorphisme entre les variétés symplectiques $(G/K, \omega)$ et $(\mathbb{D}, \omega^{\mathbb{D}})$, où $\omega \in \Omega^2(G/K)$ et $\omega^{\mathbb{D}} \in \Omega^2(\mathbb{D})$ sont respectivement les structures symplectiques sur G/K et $\mathbb{D}$ telles que définies en (1.7) à partir des structures complexes et kählériennes.

De plus, elle est G -équivariante relativement aux actions ν et τ du groupe G sur G/K et $\mathbb{D}$ respectivement.

(d) Le groupe des automorphismes de $\mathbb{D}$ correspond à $SU(1, n)$ via l'action τ .

À l'exception du point (d), toutes ces assertions découlent plus ou moins directement des observations pratiques réalisées dans cette sous-section ainsi que dans les sous-sections 1.2.4 et 1.3.1. Esquissons la preuve du point (d), celles-ci s'inspirant en partie de la référence [HS71, thm.1].

Démonstration. Considérons

$$f \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \quad \text{et} \quad r := \sqrt{\left(f(o)\right)^t f(o)} < 1.$$

L'action du groupe $U(n)$ sur la sphère unité de $\mathbb{C}^n$ étant transitive, il existe $k \in K$ tel que

$$\tau_k(f(o)) = (-r, 0, \dots, 0)^t =: o' \in \mathbb{D}.$$

De plus, pour $\theta \in \mathbb{R}$, si D' désigne la matrice $\sqrt{1-r^2} e^{i\theta} \text{Id}_{n-1}$, nous avons

$$g_\theta := \sqrt{\frac{1}{1-r^2}} \begin{pmatrix} e^{-in\theta} & re^{-in\theta} & 0 & \dots & 0 \\ re^{i\theta} & e^{i\theta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & D' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \in G \quad \text{et} \quad \tau_{g_\theta}(o') = o.$$

Il s'ensuit donc que $\tau_{g_\theta} \circ \tau_k \circ f$ est un automorphisme de la boule unité $\mathbb{D}$ fixant l'origine o de $\mathbb{C}^n$. Le célèbre lemme de Schwarz (généralisé au cas à plusieurs dimensions) nous permet alors d'en tirer que l'automorphisme $\tau_{g_\theta} \circ \tau_k \circ f$ est une transformation unitaire de $\mathbb{D}$; [Ru08, ch.8, §8.1 & thm.8.1.4]. Dès lors, si $U \in U(n)$ est la représentation matricielle de cet automorphisme unitaire, et si $\Theta(\theta) \in \mathbb{R}$ est tel que $\det(U) = e^{i\Theta(\theta)}$, alors

$$k' := \begin{pmatrix} e^{-i\Theta(\theta)} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \in K \quad \text{et} \quad \tau_{g_\theta} \circ \tau_k \circ f = e^{-i\Theta(\theta)} \tau_{k'}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En particulier, comme $e^{i\Theta(\theta)} \tau_{g_\theta} = \tau_{g_{\theta + \frac{\Theta(\theta)}{n+1}}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f = \tau_{k^{-1}} \circ \tau_{g_{\theta_0}^{-1}} \circ \tau_{k'},$$

ce qui montre bien la surjectivité de l'application $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{D}) : g \mapsto \tau_g$. ■

Remarque 1.3.11. Dans le cadre du lemme précédent, nous avons les égalités

$$G = \text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Aut}(\mathbb{D}, J^\mathbb{D}, \beta^B) = \text{Aut}\left(G/K, J, \frac{1}{4}\beta\right).$$

De plus, une vérification rapide nous permet d'obtenir $\mathfrak{k} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Du lemme 1.1.8 et de l'inclusion (1.9), il s'ensuit alors les relations

$$G = G(\mathbb{D}, s^\mathbb{D}) = G\left(G/K, s^{G/K}\right).$$

Mettons également en évidence le résultat annexe suivant relatif au transport sur $\mathfrak{p}$ des structures de variétés kähleriennes de G/K et $\mathbb{D}$. À nouveau, celui-ci suit des observations faites précédemment.

Lemme 1.3.12. *La structure complexe J (resp. $J^\mathbb{D}$), la structure riemannienne $\frac{1}{4}\beta$ (resp. β^B) et la structure symplectique ω (resp. $\omega^\mathbb{D}$) sont entièrement déterminées par invariance sous l'action de G sur G/K (resp. $\mathbb{D}$) à partir de leurs valeurs au point de base $\text{Id}K \in G/K$ (resp. $o \in \mathbb{D}$). Si nous considérons les isomorphismes*

$$T_{\text{Id}K}(G/K) \simeq \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad T_o(\mathbb{D}) \simeq \mathfrak{p}$$

définis par (1.10) respectivement à partir des actions par automorphismes v et τ sur les variétés kähleriennes $(G/K, J, \frac{1}{4}\beta)$ et $(\mathbb{D}, J^\mathbb{D}, \beta^B)$, alors :

- (i) les entrelacements respectifs de $J_{\text{Id}K}$ et $J_o^\mathbb{D}$ par ces isomorphismes correspondent avec

$$J_0 := \text{ad}_{Z_0}|_{\mathfrak{p}}$$

où $Z_0 \in Z(\mathfrak{k})$ est défini en (1.19);

(ii) les entrelacements respectifs de $\frac{1}{4}\beta_{\text{Id}K}$ et β_o^B par ces isomorphismes correspondent avec

$$\beta_o^B = \frac{1}{4} \beta^K|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*$$

tel qu'explicité en (1.26);

(iii) les entrelacements respectifs de $\omega_{\text{Id}K}$ et $\omega_o^{\mathbb{D}}$ par ces isomorphismes correspondent avec $\omega_0 \in \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*$ défini pour tout $X, Y \in \mathfrak{p}$ par

$$\omega_0(X, Y) := \beta_o^B(J_0X, Y).$$

Remarquons que le dernier point est direct à partir des définitions de ω et $\omega^{\mathbb{D}}$. Nous pouvons par ailleurs expliciter davantage le tenseur ω_0 . Si $X, Y \in \mathfrak{p}$ sont tels que définis en (1.25) avec $X_o^*, Y_o^* \in T_o(\mathbb{D})$ obtenus explicitement via (1.22), alors nous déduisons sans peine des expressions (1.20) et (1.26) les égalités

$$\begin{aligned} \omega_0(X, Y) &= \omega_o^{\mathbb{D}}(X_o^*, Y_o^*) = \beta_o^B((J_0X)_o^*, Y_o^*) = \beta_o^B(J_0X, Y) \quad (1.27) \\ &= (n+1) \sum_{j=1}^n \left[\text{Im} \left((b_0)_j \right) \text{Re} \left((b'_0)_j \right) - \text{Re} \left((b_0)_j \right) \text{Im} \left((b'_0)_j \right) \right]. \end{aligned}$$

1.4 Théorie de Pyatetskii-Shapiro

Nous allons nous éloigner un instant du concept d'espace symétrique présent depuis le début du chapitre pour consacrer cette section essentiellement théorique à une introduction à la théorie de Pyatetskii-Shapiro. Il s'agira ici de travailler sur la structure des groupes d'automorphismes d'un certain type de domaines bornés d'un point de vue principalement algébrique. Nous aborderons ce sujet sur deux axes. Dans un premier temps, nous mentionnerons les grandes lignes de l'approche de Pyatetskii-Shapiro et de ses collaborateurs, celle-ci étant basée sur les références [Py69] et [G+67]. Dans un second temps, nous recouperons ces aspects avec le théorème de décomposition d'Iwasawa.

1.4.1 Domaines bornés homogènes

Lors de la section précédente, nous avons appris que le groupe des automorphismes d'un domaine borné D était un sous-groupe fermé du groupe des isométries de D relativement à sa métrique de Bergman. Dans le cas où D est un domaine

borné symétrique, la proposition 1.2.4 nous indique alors que l'action du groupe $\text{Aut}(D)$ sur D est transitive. Ceci nous inspire la définition suivante.

Définition 1.4.1. Un *domaine borné* D est dit *homogène* lorsque le groupe des automorphismes de D agit transitivement sur D .

Bien entendu, nous en concluons directement que tout domaine borné symétrique est un domaine borné homogène. Si une preuve directe de ce fait fut donnée par Henri Cartan, c'est Élie Cartan qui remarqua que la métrique de Bergman du domaine borné pouvait être utilisée afin d'arriver à de telles conclusions ; [Ca35, ch.2, § 1]. Dans l'article [Ca35], Élie Cartan adressa également la question de savoir si tout domaine borné homogène était symétrique. Sans pouvoir y répondre en toute généralité, il montra que c'était bien le cas dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}^3$. Toutefois, la question resta ouverte pendant de nombreuses années jusqu'à ce que les travaux de Pyatetskii-Shapiro sur les groupes d'automorphismes et la structure des domaines bornés homogènes y répondent par la négative de façon explicite dans $\mathbb{C}^4$ et $\mathbb{C}^5$; [Py59], [Py69]. Dans cette section, si nous n'entrerons malheureusement pas dans les détails relatifs à cette construction, nous allons néanmoins aborder brièvement certains résultats importants obtenus par Pyatetskii-Shapiro et ses collaborateurs. Pour ce faire, nous nous référerons à l'article [G+67] ainsi qu'à l'ouvrage [Py69]. Ce dernier n'étant pas toujours exempt de toute difficulté de compréhension (ceci étant probablement dû à la traduction du russe à l'anglais), mentionnons également la présence des références [B+14, ch.2] et [Sp14] dans lesquelles les auteurs reprennent et utilisent certaines notions explicitées dans [Py69].

Dans un objectif d'étude des domaines bornés homogènes, Pyatetskii-Shapiro accorda une grande place dans son travail à une formulation infinitésimale de ces objets. À ces fins, il développa la théorie d'objets algébriques appelés *j-algèbres*, chacune de ces *j-algèbre* consistant d'une certaine façon en la donnée d'une algèbre de Lie réelle munie de structures additionnelles. La définition de ces objets fut choisie de telle manière que :

- (i) l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie agissant transitivement par automorphismes sur un domaine borné homogène admette une structure de *j-algèbre* ;
- (ii) étant donnée une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une structure de *j-algèbre*, il existe un domaine borné D et un groupe de Lie agissant transitivement par automorphismes sur D et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$.

Notons toutefois que la correspondance entre la donnée d'un domaine borné ho-

homogène et celle d'une j -algèbre n'est pas univoque. Ceci motive l'intérêt de l'introduction d'une classe particulière de j -algèbres sur laquelle nous nous étendrons davantage. En effet, Pyatetskii-Shapiro et ses collaborateurs, Gindikin et Vinberg, montrèrent, pour chaque domaine borné homogène D , l'existence d'un groupe de Lie connexe, résoluble, factorisable sur le corps des réels, agissant simplement et transitivement sur D par automorphismes ; [Py69, app.], [G+67, ch.1, prop.7 & ch.2, prop.3]. La j -algèbre associée à D définie à partir de l'algèbre de Lie d'un tel groupe est alors dite *normale*. Elle encode la donnée du domaine borné D à isomorphisme près ; [G+67, ch.2, § 4], [Py69, ch.2].

Nous allons maintenant définir et étudier plus précisément la notion de j -algèbre normale dont nous commençons tout doucement à percevoir l'importance dans l'étude des domaines bornés homogènes.

Définition 1.4.2. Une j -algèbre normale est un triple $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$ composé :

- (i) d'une algèbre de Lie réelle résoluble $\mathfrak{g}$ telle que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'opérateur linéaire $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ne possède que des valeurs propres réelles ;
- (ii) d'un endomorphisme $j : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ satisfaisant

$$j^2 = -\text{Id}_{\mathfrak{g}} \quad \text{et} \quad [jX, jY] = [X, Y] + j[jX, Y] + j[X, jY]$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$;

- (iii) d'une forme linéaire $[\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}] \in \mathfrak{g}^*$ telle que

$$\alpha([jX, X]) > 0 \quad \text{et} \quad \alpha([jY, jZ]) = \alpha([Y, Z])$$

pour tout $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ et $Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie (resp. un idéal) de $\mathfrak{g}$ stable sous j , alors le triple $(\mathfrak{h}, j|_{\mathfrak{h}}, \alpha|_{\mathfrak{h}})$ est également une j -algèbre normale appelée *j -sous-algèbre* (resp. *j -idéal*) de $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$.

Dans le cadre de cette définition et semblablement à l'exposé réalisé lors de la sous-section 1.2.2, si G est un groupe de Lie connexe résoluble d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agissant simplement et transitivement par automorphismes sur un domaine borné homogène D , alors l'endomorphisme j provient de la structure complexe sur D et le cobord de Chevalley-Eilenberg de la forme linéaire α est, quant à lui, associé à la forme symplectique définie en (1.7) à partir de la structure de variété kählerienne de D ; [G+67, ch.2]. La première condition correspond pour sa part à la traduction infinitésimale du fait que G soit résoluble et factorisable sur $\mathbb{R}$. Elle induit en outre l'existence d'un idéal unidimensionnel de $\mathfrak{g}$; [Py69, ch.2, § 3], [Sp14, ch.2, lem.8].

Définition 1.4.3. Une j -algèbre normale $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$ est dite *élémentaire* s'il existe :

- (i) un élément $E \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{z} := \mathbb{R}E$ soit un idéal unidimensionnel de $\mathfrak{g}$;
- (ii) un sous-espace vectoriel réel $V \subset \mathfrak{g}$ de dimension $2d \in \mathbb{N}$ qui soit muni d'une forme symplectique $\Omega \in V^* \otimes V^*$;

tels que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit de la forme

$$\mathfrak{g} = j\mathfrak{z} \ltimes (V \oplus \mathfrak{z}),$$

avec pour structure d'algèbre de Lie

$$[v, E] = 0, \quad [v, v'] = \Omega(v, v') E \quad \text{et} \quad [jE, v + zE] = v + 2zE$$

pour tout $v, v' \in V$ et $z \in \mathbb{R}$.

Comme nous l'indique le lemme suivant, les j -algèbres normales élémentaires jouent un rôle prépondérant dans l'étude de la structure des j -algèbres normales ; [G+67, ch.3, § 2], [Py69, ch.2, § 3].

Lemme 1.4.4. [Py69, ch.2, lem.1] *Soit $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$ une j -algèbre normale. Alors, il existe $\mathfrak{z}$ un idéal unidimensionnel de $\mathfrak{g}$ et V un sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}$ tels que le sous-espace vectoriel*

$$\mathfrak{s} := j\mathfrak{z} \oplus V \oplus \mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$$

admette une structure de j -idéal de $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$ faisant de $(\mathfrak{s}, j|_{\mathfrak{s}}, \alpha|_{\mathfrak{s}})$ une j -algèbre normale élémentaire. De plus, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet alors la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \ltimes \mathfrak{s}$$

où $(\mathfrak{g}', j|_{\mathfrak{g}'}, \alpha|_{\mathfrak{g}'})$ est une j -sous-algèbre de $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$ telle que

$$[\mathfrak{g}', \mathfrak{z}] = 0, \quad [\mathfrak{g}', j\mathfrak{z}] = 0 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}', V] \subset V. \quad (1.28)$$

Remarque 1.4.5. Dans le cadre de ce lemme, si nous utilisons les notations de la définition 1.4.3 pour décrire la structure de la j -algèbre normale élémentaire $\mathfrak{s}$, pour tout $X \in \mathfrak{g}'$ et $v, v' \in V$, nous avons alors

$$\begin{aligned} 0 &= [X, \Omega(v, v') E] = [X, [v, v']] \\ &= [[X, v], v'] + [v, [X, v']] \\ &= [\Omega([X, v], v') + \Omega(v, [X, v'])] E. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $X \in \mathfrak{g}'$, nous avons la relation $\text{ad}_X \in \mathfrak{sp}(V, \Omega)$.

Une application récursive de cet important lemme nous indique que pour toute j -algèbre normale $(\mathfrak{g}, j, \alpha)$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une décomposition de la forme

$$\mathfrak{g} = (\dots (\mathfrak{s}_N \ltimes \mathfrak{s}_{N-1}) \ltimes \dots \ltimes \mathfrak{s}_2) \ltimes \mathfrak{s}_1 \quad (1.29)$$

pour un certain naturel N , celle-ci étant telle que $(\mathfrak{s}_i, j|_{\mathfrak{s}_i}, \alpha|_{\mathfrak{s}_i})$ soit une j -algèbre normale élémentaire pour tout $1 \leq i \leq N$. De plus, dans ces notations, pour tout $i_1, i_2 \in \{1, \dots, N\}$, il suit des relations (1.28) l'inclusion

$$[\mathfrak{s}_{i_1}, \mathfrak{s}_{i_2}] \subset \mathfrak{s}_{\min\{i_1, i_2\}}.$$

Ces considérations nous amènent à voir toute j -algèbre normale comme étant, d'une certaine façon, une construction dont les briques sont des j -algèbres normales élémentaires et le ciment une succession de produits semi-directs. Nous pouvons également intégrer ce fait au niveau des groupes de Lie correspondant.

Définition 1.4.6. Un j -groupe normal (resp. j -groupe normal élémentaire) est un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie admet une structure de j -algèbre normale (resp. j -algèbre normale élémentaire).

Il suit dès lors de ces définitions et du lemme 1.4.4 que tout j -groupe normal peut se décomposer en un produit semi-direct d'un j -groupe normal et d'un j -groupe normal élémentaire. Par conséquent, semblablement à l'expression (1.29), tout j -groupe normal s'obtient comme une succession de produits semi-directs de j -groupes normaux élémentaires.

1.4.2 Décompositions d'Iwasawa

La sous-section précédente nous a permis de réaliser l'importance des j -groupes normaux élémentaires dans l'étude des domaines bornés homogènes. Il est donc légitime de s'interroger sur la détermination et l'étude de tels groupes de Lie. Afin d'avancer dans cette direction, commençons par rappeler brièvement quelques faits théoriques de base sur les algèbres de Lie réelles semi-simples. Le lecteur souhaitant consulter les preuves des résultats présentés ci-dessous pourra notamment se référer aux ouvrages [He01, ch.6, § 3], [Kn02, ch.6, § 4 & § 5] et [Kn01, ch.5, § 2].

Fixons G un groupe de Lie connexe semi-simple dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. Considérons $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ ainsi que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan lui étant associée avec $\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$ et

$\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\}$. Dans ce cas, pour tout $X \in \mathfrak{p}$, l'opérateur linéaire $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est symétrique relativement à la forme bilinéaire symétrique définie positive qui à $(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ associe $-\beta^K(X, \sigma(Y))$, où β^K désigne forme de Killing de $\mathfrak{g}$; [He01, ch.6, lem.1.2]. Notons K le sous-groupe connexe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et fixons $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ et maximale pour cette propriété. Remarquons que deux telles sous-algèbres de Lie abéliennes maximales contenues dans $\mathfrak{p}$ sont nécessairement l'image l'une de l'autre par l'action adjointe d'un élément de K ; [Kn02, ch.6, thm.6.51]. Par ailleurs, l'ensemble des opérateurs linéaires $\text{ad}_H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ pour $H \in \mathfrak{a}$ commutant entre eux, ils sont donc simultanément diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Ceci amène à considérer la définition suivante.

Définition 1.4.7. Dans le contexte décrit ci-dessus, pour chaque forme linéaire $[\lambda : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}] \in \mathfrak{a}^*$, définissons

$$\mathfrak{g}_\lambda := \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \lambda(H)X \text{ pour tout } H \in \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{g}.$$

Une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ est alors appelée *racine de $\mathfrak{g}$ restreinte relativement à $\mathfrak{a}$* si le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_\lambda$ est non trivial. Dans ce cas, $\mathfrak{g}_\lambda$ est appelé *sous-espace de racine restreinte*.

Notons $\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ restreintes relativement à $\mathfrak{a}$.

Proposition 1.4.8. [He01, ch.6, §3] *Dans le cadre mentionné précédemment, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet la décomposition*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda \right). \quad (1.30)$$

De plus, les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (a) pour tout $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$, nous avons l'inclusion $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$;
- (b) pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, le sous-espace $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ correspond avec $\sigma(\mathfrak{g}_\lambda)$;
- (c) pour tout $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$ tels que $-\lambda \neq \mu$, les sous-espaces $\mathfrak{g}_\lambda$ et $\mathfrak{g}_\mu$ sont orthogonaux relativement à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$;
- (d) le sous-espace $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ admettant une décomposition en somme directe de deux sous-algèbres de Lie

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k},$$

celles-ci étant en outre orthogonales relativement à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

La décomposition (1.30) est appelée *décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte*. Notons que la proposition précédente nous indique que $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] = 0$ pour tout $\lambda, \mu \in \Sigma$ tels que $\lambda + \mu \notin \Sigma$. De plus, pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, nous avons $\lambda \in \Sigma$ si et seulement si $-\lambda \in \Sigma$.

Fixons $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\dim(\mathfrak{a})}\}$ une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}^*$. Soient

$$\lambda := \sum_{k=1}^{\dim(\mathfrak{a})} \lambda_k \varphi_k \in \Sigma$$

avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq k \leq \dim(\mathfrak{a})$. Nous dirons que la *racine restreinte* λ est *positive* s'il existe $k_0 \in \{1, \dots, \dim(\mathfrak{a})\}$ tel que $\lambda_{k_0} > 0$ et $\lambda_k = 0$ pour tout $k < k_0$. Dans ce cas, nous noterons $\lambda > 0$. Pour chaque racine restreinte $\lambda \in \Sigma$, nous avons alors $\lambda > 0$ ou $-\lambda > 0$. Posons

$$\Sigma^+ := \{\lambda \in \Sigma : \lambda > 0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} := \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda.$$

Remarquons que pour tout $\lambda, \mu \in \Sigma^+$, si $\lambda + \mu \in \Sigma$ alors $\lambda + \mu \in \Sigma^+$. Dès lors, la proposition 1.4.8 (a) nous indique que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui est nilpotente. Notons que le choix de $\mathfrak{n}$ résulte du choix de la notion de positivité sur l'ensemble des racines restreintes. Il est alors possible d'en déduire que deux sous-algèbres de Lie nilpotentes définies de façon semblable sont l'image l'une de l'autre par l'action adjointe d'un élément du sous-groupe de Lie connexe de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$; [Kn02, ch.6, cor.6.55 & lem.6.56].

Enfin, par définition même des sous-espaces de racine restreinte et des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$, nous pouvons remarquer que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ forme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ satisfaisant $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ étant nilpotente, il s'ensuit que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui est résoluble et telle que, pour tout $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, l'opérateur linéaire $\text{ad}_X : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ ne possède que des valeurs propres réelles.

De ces considérations, nous en arrivons maintenant à l'énoncé du très célèbre théorème d'Iwasawa.

Théorème 1.4.9. [Kn02, ch.6, prop.6.43 & thm.6.46] *Dans le contexte exposé dans cette sous-section, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet, en tant qu'espace vectoriel réel, la décomposition*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k}.$$

Soient A et N les sous-groupes de Lie connexes de G dont les algèbres de Lie respectives sont $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$. Alors, A , N et AN sont des sous-groupes de Lie de G simplement connexes respectivement abélien, nilpotent et résoluble. De plus, les applications

$$A \times N \rightarrow AN : (a, n) \mapsto an \quad \text{et} \quad AN \times K \rightarrow G : (an, k) \mapsto ank$$

sont des difféomorphismes globaux entre variétés lisses.

Rappelons que les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{k}$ sont définies à conjugaison par un automorphisme interne de $\mathfrak{g}$ près. Les sous-groupes A , N et K sont donc uniques à automorphisme de G près. En outre, le groupe de Lie AN est factorisable sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.10. Dans le cadre du théorème précédent, les décompositions

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{k} \quad \text{et} \quad G = ANK \simeq A \times N \times K$$

sont respectivement appelées *décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$* et *décomposition d'Iwasawa de G* . Le sous-groupe de Lie $AN \subset G$ défini dans ce cadre est, quant à lui, appelé *groupe d'Iwasawa de G* .

Remarque 1.4.11. La décomposition d'Iwasawa de G induit un difféomorphisme entre le groupe d'Iwasawa de G et l'espace homogène G/K . Celui-ci est donné par

$$\Pi : AN \rightarrow G/K : an \mapsto anK.$$

En tant qu'espace vectoriel réel, l'algèbre de Lie de AN s'identifie donc à la fois à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et à l'espace tangent $T_{eK}(G/K)$. Notons que ce dernier est également isomorphe à $\mathfrak{p}$.

Nous sommes maintenant à même de motiver l'introduction de ces notions. En effet, dans le contexte précédemment décrit, supposons que l'espace homogène G/K soit muni d'une structure de domaine borné homogène pour laquelle l'action de G sur G/K se fait par automorphismes. Il suit alors de la remarque précédente que le groupe d'Iwasawa de G est un groupe de Lie simplement connexe, résoluble, factorisable sur le corps des réels, agissant simplement et transitivement par automorphismes sur G/K . Les résultats de Gindikin, Pyatetskii-Shapiro et Vinberg exposés dans la sous-section précédente nous indiquent qu'il s'agit alors d'un j -groupe normal qui est associé de façon unique, à isomorphisme près, au domaine borné homogène G/K . En particulier, au vu de la définition 1.2.8, l'usage de la proposition 1.3.6 et du théorème 1.3.7 nous donne le lemme suivant.

Lemme 1.4.12. *Le groupe d'Iwasawa du plus grand groupe connexe d'automorphismes d'un domaine borné symétrique D est un j -groupe normal. En tant que variété lisse, ce groupe de Lie est difféomorphe à D .*

Ceci motive l'intérêt d'un examen de la structure du groupe d'Iwasawa d'un tel groupe de Lie dans l'objectif de l'étude de la structure des j -groupes normaux.

1.5 Structure des j -groupes normaux

Comme nous venons de le constater dans notre introduction à la théorie de Pyatetskii-Shapiro, la compréhension de la structure des j -groupes normaux élémentaires s'avère cruciale dans un objectif d'étude des j -groupes normaux. Nous proposons au lecteur de nous pencher maintenant sur ce sujet. Dans ce but, nous allons travailler à la réalisation du programme présenté théoriquement à la section précédente dans le cas du groupe de Lie $G := SU(1, n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. En effet, par le lemme 1.3.10, nous savons que ce groupe de Lie simple connexe correspond au groupe des automorphismes du domaine borné symétrique que constitue la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$. Il suit alors du lemme 1.4.12 que $\mathbb{D}$ est difféomorphe au groupe d'Iwasawa de G , ce dernier se munissant d'une structure de j -groupe normal. Tout l'enjeu de cette section consistera donc à étudier explicitement la structure de celui-ci et à constater qu'il s'agit précisément d'un j -groupe normal élémentaire.

1.5.1 Décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(1, n)$

Commençons par étudier la structure de l'algèbre de Lie de G , notamment en calculant sa décomposition d'Iwasawa. Nous utiliserons ici les notations des sous-sections 1.2.4 et 1.4.2. Pour rappel, l'algèbre de Lie de G est notée $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, n)$ et est constituée des matrices de la forme (1.15), c'est-à-dire

$$X = \begin{pmatrix} a_0 i & b_0^t \\ \overline{b_0} & D_0 \end{pmatrix}$$

où a_0 est un nombre réel, b_0 un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et D_0 une matrice complexe d'ordre n qui soit anti-hermitienne et telle que $\mathrm{Tr}(D_0) + a_0 i = 0$. Si $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) désigne l'ensemble des matrices anti-hermitiennes (resp. hermitiennes) de $\mathfrak{g}$, nous avons vu

que la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ était une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ et que $K := S(U(1) \times U(n)) \subset G$ était un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Nous remarquons aisément qu'une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ et maximale pour cette propriété est nécessairement unidimensionnelle. Choisissons $\mathfrak{a}$ comme étant la sous-algèbre de Lie générée sur le corps des réels par l'élément $H \in \mathfrak{p}$ obtenu sous la forme (1.15) en prenant $a_0 = 0$, $b_0^t := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ et $D_0 = 0$. Dans ce cas, toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ est complètement déterminée par la valeur $\hat{\lambda} := \lambda(H) \in \mathbb{R}$ et nous en déduisons

$$\mathfrak{g}_{\hat{\lambda}} := \mathfrak{g}_{\lambda} = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \hat{\lambda}X\}$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. De plus, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ écrit sous la forme (1.15) avec $D_0 = ((D_0)_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, nous avons

$$[H, X] = \begin{pmatrix} -2i \operatorname{Im}((b_0)_1) & D_{11} - a_0 i & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ a_0 i - D_{11} & 2i \operatorname{Im}((b_0)_1) & (b_0)_2 & \dots & (b_0)_n \\ \overline{D_{12}} & (-\overline{b_0})_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{D_{1n}} & (-\overline{b_0})_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons retirer de ceci la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte. En particulier, nous constatons que l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ restreintes relativement à $\mathfrak{a}$ est donné par

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* : \hat{\lambda} \in \{-2, -1, 1, 2\}\}.$$

Afin de faciliter la formulation et l'usage explicite des sous-espaces de racine restreinte dans la suite, introduisons naïvement une base $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n(n+2)}$ de $\mathfrak{g}$ de la façon suivante :

$$\bullet \quad e_j := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (j, j) & & 0 \\ & & 0 & \downarrow & \\ & & & i & \\ & & & & -i \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n;$$

$$\bullet \quad e_{n+k} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \uparrow & & & \\ 0 & & & (1, k+1) & & & \\ 1 & \leftarrow & (k+1, 1) & & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{et } e_{2n+k} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \uparrow & & & \\ 0 & & & (1, k+1) & & & \\ -i & \leftarrow & (k+1, 1) & & & & \\ 0 & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n;$$

$$\bullet \quad e_{3n+l} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & 1 & \leftarrow & (p+1, q+2) \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & -1 & & \ddots & & \\ \vdots & & \uparrow & & \ddots & & \\ 0 & (q+2, p+1) & & & & & 0 \end{pmatrix} =: e_{p,q}^1$$

$$\text{et } e_{3n+\frac{n(n-1)}{2}+l} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & i & \leftarrow & (p+1, q+2) \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & i & & \ddots & & \\ \vdots & & \uparrow & & \ddots & & \\ 0 & (q+2, p+1) & & & & & 0 \end{pmatrix} =: e_{p,q}^i$$

pour $1 \leq l \leq \frac{n(n-1)}{2}$ vérifiant

$$l = \left[\sum_{\alpha=1}^{p-1} (n - \alpha) \right] + (q - p + 1) \quad \text{avec } 1 \leq p \leq q \leq n - 1.$$

Notons que $H = e_{n+1}$. Si, pour tout $1 \leq l \leq n - 1$, nous définissons

$$\begin{aligned} b_l^1 &:= e_{n+l+1} + e_{1,l}^1, \quad b_l^i := e_{2n+l+1} + e_{1,l}^i, \quad J_l := e_1 + 2 \left(\sum_{j=2}^{l+1} e_j \right), \\ c_l^1 &:= e_{n+l+1} - e_{1,l}^1 \quad \text{et} \quad c_l^i := e_{2n+l+1} - e_{1,l}^i, \end{aligned}$$

nous obtenons alors :

- $\mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{R}F$ où $F := e_1 + e_{2n+1}$;
- $\mathfrak{g}_{-1} = \left\langle \{c_l^1, c_l^i\}_{1 \leq l \leq n-1} \right\rangle_{\mathbb{R}}$;
- $\mathfrak{g}_1 = \left\langle \{b_l^1, b_l^i\}_{1 \leq l \leq n-1} \right\rangle_{\mathbb{R}}$;
- $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}E$ où $E := e_1 - e_{2n+1}$;
- $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$
 $= \left\langle \{J_l\}_{1 \leq l \leq n-1} \right\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \left\langle \{e_{p,q}^1, e_{p,q}^i\}_{2 \leq p \leq q \leq n-1} \right\rangle_{\mathbb{R}}$;

Remarque 1.5.1. Dans le cas $n = 1$, ces calculs restent pertinents et nous obtenons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{m} = \{0\}$. Nous insistons fortement sur cette remarque qui restera valable régulièrement dans la suite de notre travail.

Fixons $H^* : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R} : aH \mapsto a$ comme unique élément de base de $\mathfrak{a}^*$. La notion de positivité sur Σ découlant de ce choix nous donne

$$\Sigma^+ = \left\{ \lambda \in \mathfrak{a}^* : \hat{\lambda} \in \{1, 2\} \right\} = \{H^*, 2H^*\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

Posons $V := \mathfrak{g}_1$. Par le théorème (1.4.9), la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$ s'écrit alors

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}H \oplus V \oplus \mathbb{R}E \oplus \mathfrak{k}.$$

Un calcul simple nous indique que la structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{n}$ est donnée par $[E, b_l^1] = 0 = [E, b_l^i]$, $[b_l^1, b_{l'}^1] = 0 = [b_l^i, b_{l'}^i]$ et $[b_l^1, b_{l'}^i] = -2\delta_{l,l'}E$ pour tout $l, l' \in \{1, \dots, n-1\}$. Dès lors, pour tout $v, v' \in V$ et $z \in \mathbb{R}$, nous avons

$$[v, E] = 0, \quad [v, v'] = \Omega(v, v')E \quad \text{et} \quad [H, v + zE] = v + 2zE, \quad (1.31)$$

où $\Omega \in V^* \otimes V^*$ est la forme symplectique sur V dont la représentation matricielle dans la base $b := \{b_1^1, b_2^1, \dots, b_{n-1}^1, b_1^i, b_2^i, \dots, b_{n-1}^i\}$ est donnée par

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & -2\text{Id}_{n-1} \\ 2\text{Id}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, pour $v \in V$ et $1 \leq l \leq n-1$, nous noterons v_l^1 (resp. v_l^i) la composante de v en b_l^1 (resp. b_l^i) dans sa décomposition dans la base b . Soulignons que l'espace vectoriel réel V est bien entendu isomorphe à $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ par l'application

$$v \in V \mapsto (v_1^1, v_2^1, \dots, v_{n-1}^1, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n-1}^i). \quad (1.32)$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2(n-1)}$, la forme symplectique Ω tirée en arrière par l'inverse de cet isomorphisme admet la même représentation matricielle. Nous la noterons donc également Ω .

En tant qu'espace vectoriel réel, nous savons que l'algèbre de Lie du groupe d'Iwasawa de G s'identifie à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Le calcul de la structure d'algèbre de Lie réalisé sur $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ nous donne alors le lemme suivant.

Lemme 1.5.2. *L'algèbre de Lie*

$$\mathfrak{s} := \mathbb{R}H \ltimes (V \oplus \mathbb{R}E)$$

dont la structure est décrite en (1.31) correspond avec l'algèbre de Lie du groupe d'Iwasawa de G . Dans le cas $n = 1$, l'espace vectoriel V est réduit à l'origine.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{n} = V \oplus \mathbb{R}E$ correspond donc à l'algèbre de Lie de Heisenberg sur l'espace vectoriel symplectique (V, Ω) d'extension centrale $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}E$. Soulignons que le lecteur pourra trouver l'ensemble de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ à l'appendice A.

Remarque 1.5.3.

(a) En tant qu'espace vectoriel réel, V s'identifie à $\mathbb{C}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{2(n-1)}$ au travers de l'isomorphisme

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1} \xrightarrow{\iota} \sum_{l=1}^{n-1} (\text{Re}(v_l) b_l^1 + \text{Im}(v_l) b_l^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^t \\ 0 & 0 & v^t \\ \bar{v} & -\bar{v} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans les notations de l'isomorphisme explicité ci-dessus, pour $v \in V$ et $1 \leq l \leq n-1$, le nombre réel v_l^1 (resp. v_l^i) s'identifie à $\text{Re}(v_l)$ (resp. $\text{Im}(v_l)$).

- (b) Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et l'application

$$\mathfrak{u}(n-1) \rightarrow \mathfrak{m} : X \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\text{Tr}(X)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\text{Tr}(X)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

- (c) Le générateur $Z_0 \in \mathfrak{k}$ du centre de $\mathfrak{k}$ défini en (1.19) se récrit

$$Z_0 = - \left(\left[\frac{1}{2(n+1)} \sum_{l=1}^{n-1} J_l \right] + \frac{1}{4} (E + F) \right).$$

1.5.2 Coordonnées d'Iwasawa

Nous allons maintenant utiliser le travail effectué à la sous-section précédente afin d'établir un premier contact structurel avec le groupe d'Iwasawa de G . Nous nous référons aux mêmes notations que précédemment. Soient A et N les sous-groupes de Lie connexes de G dont les algèbres de Lie respectives sont $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$. La structure de ces algèbres de Lie décrites à la sous-section précédente induit directement le résultat suivant.

Lemme 1.5.4. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} &\rightarrow AN \\ aH + v + zE &\mapsto \exp(aH) \exp(v + zE) = \exp(aH) \exp(v) \exp(zE) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme global.

Il nous est bien entendu possible de donner une forme explicite de ce difféomorphisme après quelques calculs aisés. Ainsi, en utilisant l'identification présentée à la remarque 1.5.3(a), pour $a, z \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{C}^{n-1} \simeq V$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi(aH + v + zE) &= \begin{pmatrix} \cosh(a) + \epsilon & \sinh(a) - \epsilon & e^a v^t \\ \sinh(a) + \epsilon & \cosh(a) - \epsilon & e^a v^t \\ \bar{v} & -\bar{v} & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.33) \\ \text{où } \epsilon &:= \frac{e^a}{2} (\bar{v}^t v + 2iz) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Rappelons encore que tous nos calculs restent valables dans le cas limite $n = 1$

avec $V = 0$. Dans ce cas, le difféomorphisme φ est alors donné par

$$\varphi : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow AN : aH + zE \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(a) + e^a iz & \sinh(a) - e^a iz \\ \sinh(a) + e^a iz & \cosh(a) - e^a iz \end{pmatrix}.$$

Définition 1.5.5. L'espace vectoriel réel $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ s'identifiant à $\mathbb{R}^{2n}$, l'application φ induit la carte globale inverse

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R} &\rightarrow AN \\ (a, v_1^1, \dots, v_{n-1}^1, v_1^i, \dots, v_{n-1}^i, z) &\mapsto \exp(aH) \exp\left(\sum_{l=1}^{n-1} (v_l^1 b_l^1 + v_l^i b_l^i) + zE\right). \end{aligned}$$

Par abus de notation, nous désignerons celle-ci également par φ et nous utiliserons la présentation du groupe AN consistant à identifier chacun de ses points avec les coordonnées globales $(a, v = (v_1^1, \dots, v_{n-1}^1, v_1^i, \dots, v_{n-1}^i), z) \in \mathbb{R}^{2n}$ lui correspondant. Ces coordonnées sont appelées *coordonnées d'Iwasawa* sur AN .

Remarque 1.5.6. La remarque 1.5.3 (a) nous permet d'envisager la formulation de la définition de coordonnées d'Iwasawa (a, v, z) de façon équivalente avec $a, z \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{C}^{n-1} \simeq V$.

Pour tout $a, a', z, z' \in \mathbb{R}$ et $v, v' \in V$, en utilisant quelques résultats élémentaires de théorie de Lie et, en particulier, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\exp(aH) \exp(v + zE) \exp(a'H) \exp(v' + z'E) \\ &= \exp((a + a')H) \exp(\text{Ad}_{\exp(-a'H)}(v + zE)) \exp(v' + z'E) \\ &= \exp((a + a')H) \exp\left(e^{\text{ad}(-a'H)}(v + zE)\right) \exp(v' + z'E) \\ &= \exp((a + a')H) \exp\left(e^{-a'}v\right) \exp(v') \exp\left(\left(e^{-2a'}z + z'\right)E\right) \\ &= \exp((a + a')H) \exp\left(e^{-a'}v + v' + \left(\frac{e^{-a'}}{2} \Omega(v, v') + e^{-2a'}z + z'\right)E\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, dans les coordonnées d'Iwasawa, pour tout (a, v, z) et (a', v', z') dans $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$, les lois de groupe et d'inversion sur AN s'écrivent

$$\begin{aligned} (a, v, z)(a', v', z') &= \left(a + a', e^{-a'}v + v', \frac{e^{-a'}}{2} \Omega(v, v') + e^{-2a'}z + z'\right), \\ (a, v, z)^{-1} &= (-a, -e^a v, -e^{2a}z). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Dans le cas $n = 1$, ceci nous donne

$$(a, z)(a', z') = (a + a', e^{-2a'}z + z') \quad \text{et} \quad (a, z)^{-1} = (-a, -e^{2a}z)$$

quels que soient $a, a', z, z' \in \mathbb{R}$.

Complétons l'introduction de ces coordonnées par quelques notations complémentaires qui nous accompagneront dans la suite de notre travail. Le groupe d'Iwasawa de G sera noté

$$\mathbb{S} := AN.$$

Les décompositions d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$ et de G se récrivent alors respectivement

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{k} \quad \text{et} \quad G = \mathbb{S}K \simeq \mathbb{S} \times K.$$

Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$, nous noterons

$$X = [X]_{\mathfrak{s}} + [X]_{\mathfrak{k}} \quad \text{et} \quad g = [g]_{\mathbb{S}} [g]_K \quad (1.35)$$

les décompositions respectives de X et g associée, avec $[X]_{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{s}$, $[X]_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$, $[g]_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ et $[g]_K \in K$. Signalons au passage le résultat suivant comme conséquence directe de ces décompositions.

Lemme 1.5.7. *Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons*

$$[X]_{\mathfrak{s}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\exp(tX)]_{\mathbb{S}} \quad \text{et} \quad [X]_{\mathfrak{k}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\exp(tX)]_K.$$

Couplée à la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$ livre alors un isomorphisme

$$\hat{\iota} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{s} : X = \begin{pmatrix} 0 & b_0^t \\ \bar{b}_0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto [X]_{\mathfrak{s}} = \operatorname{Re}((b_0)_1) H + v - \operatorname{Im}((b_0)_1) E.$$

$$\text{où } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (b_0)_2 & \dots & (b_0)_n \\ 0 & 0 & (b_0)_2 & \dots & (b_0)_n \\ (\bar{b}_0)_2 & (-\bar{b}_0)_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bar{b}_0)_n & (-\bar{b}_0)_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

À l'aide du lemme 1.5.7, il est aisé de remarquer que l'isomorphisme $\hat{\iota}$ vérifie, pour tout $X \in \mathfrak{p}$, l'égalité

$$\hat{\iota}(X) = -(\Pi^{-1})_{\star_{\operatorname{Id}K}} (X_{\operatorname{Id}K}^*) \quad (1.36)$$

où $\Pi : \mathbb{S} \rightarrow G/K : s \mapsto sK$ est le difféomorphisme entre $\mathbb{S}$ et G/K défini à partir de la décomposition d'Iwasawa de G , et

$$X_{\text{Id}K}^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v_{\exp(-tX)}(\text{Id}K) \in T_{\text{Id}K}(G/K).$$

1.5.3 Structure du groupe d'Iwasawa de $SU(1, n)$

Les outils développés dans les sections précédentes nous place maintenant dans une position de choix afin d'étudier plus profondément la structure du groupe d'Iwasawa de G . Reprenons les notations de la sous-section 1.3.3. Tel qu'il fut exposé aux lemmes 1.3.10 et 1.3.12, le domaine borné $\mathbb{D}$ et l'espace homogène G/K portent chacun une structure de variété kählérienne. Ces structures sont équivalentes via le difféomorphisme $\phi : G/K \rightarrow \mathbb{D} : gK \mapsto \tau_g(o)$ où $o := 0 \in \mathbb{D}$. Elles sont en outre encodées sur $\mathfrak{p}$ à travers l'endomorphisme $J_0 \in \text{End}(\mathfrak{p})$, le tenseur symétrique $\beta_0^B \in \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}^*$ et de la forme symplectique ω_0 sur $\mathfrak{p}$. Par ailleurs, l'espace homogène G/K étant difféomorphe au groupe d'Iwasawa $\mathbb{S}$, nous pouvons transporter la structure de variété kählérienne de G/K (et donc de $\mathbb{D}$) sur $\mathbb{S}$ par l'application $\Pi : \mathbb{S} \rightarrow G/K$ en définissant

- (i) la structure complexe $J^{\mathbb{S}} := \Pi_*^{-1} \circ J \circ \Pi_*$;
- (ii) la structure riemannienne $\beta^{\mathbb{S}} := \Pi^* \left(\frac{1}{4} \beta \right)$;
- (iii) la structure symplectique $\omega^{\mathbb{S}} := \Pi^*(\omega)$.

Bien entendu, les champs de tenseurs $J^{\mathbb{S}}$, $\beta^{\mathbb{S}}$ et $\omega^{\mathbb{S}}$ vérifient également l'égalité (1.7). Étant donné que l'application Π est $\mathbb{S}$ -équivariante relativement à l'action de $\mathbb{S}$ sur lui-même par translations à gauche et à l'action $\mathbb{S}$ sur G/K par v , nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 1.5.8. *Le triple $(\mathbb{S}, J^{\mathbb{S}}, \beta^{\mathbb{S}})$ désigne une variété kählérienne pour laquelle les translations à gauche sur $\mathbb{S}$ définissent une action par automorphismes de la variété kählérienne.*

Une telle variété kählérienne $(\mathbb{S}, J^{\mathbb{S}}, \beta^{\mathbb{S}})$ est appelée *groupe de Lie kählérien*. Notons que nous pouvons étendre l'action du groupe de Lie $\mathbb{S}$ sur lui-même par translations à gauche en une action de G sur $\mathbb{S}$ de telle façon à ce que le difféomorphisme Π soit G -équivariant. Nous obtenons alors l'action

$$L : G \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : (g, s) \mapsto [gs]_{\mathbb{S}} \quad (1.37)$$

qui est telle que $L_g \in \text{Aut}(\mathbb{S}, J^{\mathbb{S}}, \beta^{\mathbb{S}})$ pour tout $g \in G$.

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la traduction infinitésimale de la structure de variété kählérienne ainsi définie. En utilisant l'expression (1.36), nous pouvons sans peine vérifier les égalités suivantes :

- (i) $J_{\text{Id}}^{\mathbb{S}} = \hat{\iota} \circ J_0 \circ \hat{\iota}^{-1} \in \text{End}(\mathfrak{s})$;
- (ii) $\beta_{\text{Id}}^{\mathbb{S}} = (\hat{\iota}^{-1})^* (\beta_0^B) \in \mathfrak{s}^* \otimes \mathfrak{s}^*$;
- (iii) $\omega_{\text{Id}}^{\mathbb{S}} = (\hat{\iota}^{-1})^* (\omega_0) \in \mathfrak{s}^* \otimes \mathfrak{s}^*$.

Remarque 1.5.9.

(a) L'application $\iota : \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow V$ définie à la remarque 1.5.3 (a) satisfait à la relation

$$\iota(iv) = -J_{\text{Id}}^{\mathbb{S}}(\iota(v))$$

pour tout $v \in \mathbb{C}^{n-1}$.

(b) Pour $X, X' \in \mathfrak{s}$, nous avons $\beta_{\text{Id}}^{\mathbb{S}}(X, X') = (n+1)(X|X')$ où l'application

$$(-|-) : \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R} : (X, X') \mapsto (X|X')$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{s}$. Dans les notations de l'isomorphisme (1.32), un calcul simple à partir de l'expression (1.26) nous livre alors

$$(aH + v + zE | a'H + v' + z'E) = aa' + zz' + \sum_{l=1}^{n-1} \left[(v)_l^1 (v')_l^1 + (v)_l^i (v')_l^i \right]$$

pour tout $a, a', z, z' \in \mathbb{R}$ et $v, v' \in V$. Dans le cas $n = 1$, nous avons bien entendu $(aH + zE | a'H + z'E) = aa' + zz'$ pour tout $a, a', z, z' \in \mathbb{R}$.

(c) Si nous notons a et z respectivement les coordonnées sur $\mathfrak{s}$ selon les vecteurs de base H et E , nous déduisons alors de l'expression (1.27) l'égalité

$$\omega_{\text{Id}}^{\mathbb{S}} = \left(\frac{n+1}{2} \right) \Omega_0 \quad \text{où} \quad \Omega_0 := 2 da \wedge dz + \Omega. \quad (1.38)$$

Soulignons que cette forme symplectique Ω_0 correspond alors exactement au cobord de Chevalley-Eilenberg de la forme linéaire

$$E^* : \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R}$$

défini par $E^*(H) = E^*(v) = 0$ pour tout $v \in V$ et $E^*(E) = 1$. Précisons enfin que dans le cas $n = 1$, nous obtenons $\Omega_0 = 2 da \wedge dz$.

Comme attendu au regard de la théorie de Pyatetskii-Shapiro et du lemme 1.4.12, les différentes données explicitées plus haut induisent une structure de j -algèbre normale sur $\mathfrak{s}$. Dans les notations de la définition 1.4.2, nous avons précisément

$$j = J_{\text{Id}}^{\mathfrak{s}} \quad \text{et} \quad \alpha = \left(\frac{n+1}{2} \right) E^*.$$

De plus, $J_{\text{Id}}^{\mathfrak{s}}(E) = H$ et le lemme 1.5.2 nous indique alors que $\mathfrak{s}$ correspond exactement à une j -algèbre normale élémentaire telle que définie à la sous-section 1.4.1. Il s'ensuit le résultat suivant.

Proposition 1.5.10. *Le groupe de Lie $\mathbb{S}$ est muni d'une structure de j -groupe normal élémentaire agissant simplement et transitivement sur $\mathbb{D}$ par automorphismes via la restriction à $\mathbb{S}$ de l'action $\tau : G \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ définie en (1.21). De plus, tout j -groupe normal élémentaire est un groupe de Lie isomorphe au groupe d'Iwasawa du groupe de Lie $SU(1, n')$ pour un certain $n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Notons que la seconde assertion est une conséquence directe de la structure d'algèbre de Lie des j -algèbres normales élémentaires et du premier théorème de Lie. Celle-ci relève une nouvelle fois l'importance fondamentale de l'exemple traité depuis le début du chapitre.

Remarque 1.5.11.

- (a) Outre le fait d'être des groupes de Lie kähleriens, les j -groupes normaux élémentaires sont également des espaces hermitiens symétriques de type non compact. Dans les notations de cette section, la structure symétrique sur $\mathbb{S}$ est donnée par l'application

$$\begin{aligned} s^{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{S} \\ (s, s') &\mapsto \Pi^{-1} \left(s_{sK}^{G/K} (s'K) \right) = \Pi^{-1} (s \sigma (s^{-1} s') K) \\ &= s [\sigma (s^{-1} s')]_{\mathbb{S}} \end{aligned} \quad (1.39)$$

où σ est l'automorphisme de G défini en (1.16).

- (b) Dans l'esprit de la remarque 1.2.11 (a), il est possible de considérer sur le j -groupe normal élémentaire $\mathbb{S}$ la structure de variété kählerienne issue de la multiplication des champs de tenseurs $\beta^{\mathbb{S}}$ et $\omega^{\mathbb{S}}$ par un réel positif $k > 0$. Le lecteur généralisera sans peine le texte de la présente sous-section à ce contexte. Dans les sections suivantes, nous nous exprimerons en toute généralité avec ce paramètre de liberté supplémentaire.

1.6 Géométrie des orbites coadjointes

Au travers de cette section, nous allons ouvrir une nouvelle porte sur la structure de la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. En effet, après avoir observé cette dernière comme j -groupe normal élémentaire muni d'une structure de groupe de Lie kählerien, nous allons nous concentrer exclusivement sur sa structure symplectique. À l'aide des ouvrages [Ki04] et [CW99], nous rappellerons tout d'abord au lecteur quelques éléments théoriques bien connus de géométrie symplectique, en particulier dans le cadre des orbites coadjointes. Nous réaliserons alors $\mathbb{D}$, en tant que variété symplectique, comme orbite coadjointe de $SU(1, n)$, ce qui nous permettra d'appliquer la théorie générale à ce cadre et d'en déduire des propriétés supplémentaires fondamentales de la carte globale $(\mathbb{S}, \varphi^{-1})$ et de l'action L définis dans la section précédente.

1.6.1 Éléments de géométrie symplectique

Tout d'abord, rappelons ici quelques faits élémentaires de géométrie symplectique. Comme précédemment dans le texte, nous supposons le lecteur familier avec la notion de variété symplectique. Ces bases sont notamment reprises de façon plus détaillée aux références [Ki04, ch.1 & app.2], [CW99, ch.3 & ch.7] et [OI00, ch.6].

Considérons (M, ω) une variété symplectique de dimension $2d \in \mathbb{N}$. La 2-forme différentielle ω étant non dégénérée, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, il existe un unique champ de vecteurs $X_f \in \Gamma(TM)$ tel que

$$i_{X_f}(\omega) = -df.$$

Un tel *champ de vecteurs* X_f est dit *hamiltonien*. Soit $(U \subset M, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2d})$ une *carte de Darboux* de (M, ω) de coordonnées locales $(p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d)$, c'est-à-dire telle que

$$\omega|_U = \sum_{j=1}^d dp_j \wedge dq_j.$$

Rappelons que l'existence d'une telle carte locale vient du célèbre théorème de Darboux. Alors, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, le champ de vecteurs hamiltonien $X_f \in \Gamma(TM)$ associé vérifie

$$X_f|_U = \sum_{j=1}^d (\partial_{p_j}(f) \partial_{q_j} - \partial_{q_j}(f) \partial_{p_j}). \quad (1.40)$$

Nous pouvons alors définir l'application

$$\{-, -\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) : (f, g) \mapsto \{f, g\} := \omega(X_f, X_g).$$

Il est clair que celle-ci définit une structure de variété de Poisson M . De plus, l'application qui à $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ associe $X_f \in \Gamma(TM)$ est alors un homomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$; [CW99, ch.3, lem.3.1].

Définition 1.6.1. Dans le cadre mentionné ci-dessus, le *crochet de Poisson* $\{-, -\}$ sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ sera dit *associé à la structure symplectique* ω .

De la définition de champ de vecteurs hamiltonien, nous pouvons tirer les égalités

$$\{f, g\} = dg(X_f) = X_f(g)$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. D'où, l'expression (1.40) nous donne

$$\{f, g\}|_U = \sum_{j=1}^d (\partial_{p_j}(f) \partial_{q_j}(g) - \partial_{q_j}(f) \partial_{p_j}(g))$$

quels que soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Considérons maintenant un groupe de Lie G agissant différenciablement à gauche sur M par l'action $\varsigma : G \times M \rightarrow M : (g, x) \mapsto \varsigma_g(x)$. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G . Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'application

$$X^* : M \rightarrow TM : x \mapsto X_x^* := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varsigma_{\exp(-tX)}(x)$$

définit alors un champ de vecteurs tangents lisse sur M appelé *champ de vecteurs fondamental associé à X* . Notons que cette notion fut déjà utilisée auparavant ponctuellement dès la sous-section 1.2.2. Nous vérifions facilement que l'application

$$\mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TM) : X \mapsto X^*$$

définit un homomorphisme d'algèbres de Lie; [Ko10, ch.3, prop.3.25]. De plus, si l'action de G sur M par ς est transitive, il suit du résultat standard [He01, ch.2, thm.3.2 & prop.4.3] l'égalité

$$T_x(M) = \{X_x^* : X \in \mathfrak{g}\}$$

pour tout $x \in M$. Supposons maintenant que ς_g soit un symplectomorphisme de (M, ω) pour tout $g \in G$. Un regard hamiltonien sur les champs de vecteurs fondamentaux associés à cette action nous mène à l'introduction de la définition suivante.

Définition 1.6.2. Dans le cadre mentionné ci-dessus, l'action de G sur M est dite *hamiltonienne* s'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\lambda : (\mathfrak{g}, [-, -]) \rightarrow (\mathcal{C}^\infty(M), \{-, -\})$$

satisfaisant l'égalité

$$i_{X^*}(\omega) = -d(\lambda(X))$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Cet homomorphisme d'algèbres de Lie λ est alors appelé *application moment (duale)*. Généralement, pour $X \in \mathfrak{g}$, nous désignerons l'application $\lambda(X)$ de façon plus concise par λ_X et nous la nommerons *moment (dual) associé à X* .

Dans le contexte de cette définition, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental X^* est donc hamiltonien et vérifie la relation $X^* = X_{\lambda_X}$. Indépendamment du fait que l'action de G sur M soit hamiltonienne ou non, notons que si G est semi-simple ou si M est simplement connexe, alors les champs de vecteurs fondamentaux associés à cette action sont hamiltoniens; [Ki04, app.2, thm.4]. Enfin, signalons la propriété technique suivante qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.6.3. *Considérons (M, ω) et (M', ω') deux variétés symplectiques sur lesquelles un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit différenciablement par symplectomorphismes via les actions $\varsigma : G \times M \rightarrow M$ et $\varsigma' : G \times M' \rightarrow M'$. Supposons l'existence d'un symplectomorphisme $\phi : M \rightarrow M'$ qui soit G -équivariant relativement aux actions ς et ς' . Supposons également que l'action ς' soit hamiltonienne pour l'application moment $\lambda' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M')$. Alors, l'action ς est également hamiltonienne et l'application $\lambda := \lambda' \circ \phi$ est une application moment associée à cette action.*

Démonstration. Notons $\{-, -\}$ (resp. $\{-, -\}'$) le crochet de Poisson sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M')$) associé à la forme symplectique ω (resp. ω'). Pour $X \in \mathfrak{g}$, notons X^* (resp. $X^{\star'}$) le champ de vecteurs fondamental associé à X relativement à l'action ς (resp. ς'). En utilisant le fait que le symplectomorphisme ϕ soit G -équivariant, nous remarquons sans peine la relation $\phi_* X^* = X^{\star'}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Dès lors,

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \Gamma(TM)$, le fait que ϕ soit un symplectomorphisme, les définitions de λ et λ' et quelques considérations de géométrie élémentaires nous livrent les égalités successives

$$\begin{aligned}\omega(X^*, Y) &= \omega(\phi_*^{-1} X^{*'}, \phi_*^{-1} (\phi_* Y)) \\ &= \left[((\phi^{-1})^* \omega) (X^{*'}, \phi_* Y) \right] \circ \phi \\ &= \left[\omega' (X^{*'}, \phi_* Y) \right] \circ \phi \\ &= -d\lambda'_X (\phi_* Y) \circ \phi = -d\lambda_X (Y).\end{aligned}$$

En outre, la linéarité de l'application λ est directe et celle-ci constitue bien un homomorphisme d'algèbres de Lie car

$$\{\lambda_X, \lambda_Y\} = \omega(X^*, Y^*) = \left[\omega' (X^{*'}, Y^{*'}) \right] \circ \phi = \{\lambda'_X, \lambda'_Y\}' \circ \phi = \lambda'_{[X, Y]} \circ \phi$$

quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. La preuve est ainsi complète. $\blacksquare$

1.6.2 Structure d'orbite coadjointe

Nous allons maintenant mettre à profit les outils rappelés dans la sous-section précédente dans le cadre des orbites coadjointes, ce sujet étant en bonne partie traité à la référence [Ki04, ch.1].

Considérons G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans le présent texte, nous désignerons l'action coadjointe de G par l'application

$$\begin{aligned}\text{Ad}^b : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}^*) : g \mapsto \left[\text{Ad}_g^b : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* : \xi \mapsto \text{Ad}_g^b(\xi) \right] \\ \text{où } \text{Ad}_g^b(\xi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \langle \text{Ad}_g^b(\xi), X \rangle := \langle \xi, \text{Ad}_{g^{-1}}(X) \rangle.\end{aligned}$$

Fixons un élément $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ et considérons $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ l'orbite coadjointe de ξ_0 , c'est-à-dire l'orbite de ξ_0 sous l'action coadjointe du groupe G . Notons G_{ξ_0} le sous-groupe fermé de G défini comme étant le stabilisateur de ξ_0 sous l'action coadjointe de G . Par définition, l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ s'identifie à l'espace homogène G/G_{ξ_0} et admet donc une structure de variété lisse. L'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}$ est alors lisse et transitive. D'où, pour tout $\xi \in \mathcal{O}$, nous avons

$$T_\xi(\mathcal{O}) = \left\{ X_\xi^* = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-tX)}^b(\xi) = \xi \circ \text{ad}_X \text{ tel que } X \in \mathfrak{g} \right\}.$$

Théorème 1.6.4. [Ki04, ch.1, thm.1] *Dans le cadre décrit, l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ est munie d'une forme symplectique $\omega^{\mathcal{O}}$ définie au point $\xi \in \mathcal{O}$ par*

$$\omega_{\xi}^{\mathcal{O}}(X_{\xi}^*, Y_{\xi}^*) := \langle \xi, [X, Y] \rangle$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. De plus, pour tout $g \in G$, l'application Ad_g^b est un symplectomorphisme de $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$.

Remarquons qu'il découle de ce théorème que la dimension de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ est nécessairement paire.

Définition 1.6.5. Dans le cadre du théorème 1.6.4, la forme symplectique $\omega^{\mathcal{O}}$ est appelée *forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau* sur $\mathcal{O}$.

Intéressons-nous maintenant de plus près à la nature de l'action coadjointe de G sur ses orbites coadjointes. Le résultat suivant est standard ; [Ki04, ch.1, § 4].

Lemme 1.6.6. *Dans le contexte explicité ci-dessus, l'action coadjointe du groupe de Lie G sur la variété symplectique $(\mathcal{O}, \omega^{\mathcal{O}})$ est hamiltonienne et admet pour application moment*

$$\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{O}) : X \mapsto [\lambda_X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto \lambda_X(\xi) := \langle \xi, X \rangle].$$

Démonstration. Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathcal{O}$. La linéarité de l'application λ est claire. De plus, par les définitions de l'application λ , de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur $\mathcal{O}$ et du crochet de Lie $[-, -]$ sur $\mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned} (i_{X^*}(\omega^{\mathcal{O}}))_{\xi}(Y_{\xi}^*) &= \omega_{\xi}^{\mathcal{O}}(X^*, Y^*) = \langle \xi, [X, Y] \rangle \\ &= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \xi, \text{Ad}_{\exp(tY)}(X) \rangle \\ &= - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \lambda_X \left(\text{Ad}_{\exp(-tY)}^b(\xi) \right) = - (d\lambda_X)_{\xi}(Y_{\xi}^*). \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs fondamentaux évalués au point ξ engendrant tout l'espace tangent $T_{\xi}(\mathcal{O})$, il s'ensuit $i_{X^*}(\omega^{\mathcal{O}}) = -d\lambda_X$. Il en va bien sûr de même en remplaçant X par Y . Dès lors, l'usage des mêmes concepts que précédemment et la définition du crochet de Poisson $\{-, -\}$ associé à $\omega^{\mathcal{O}}$ nous livre

$$\lambda_{[X, Y]}(\xi) = \langle \xi, [X, Y] \rangle = \omega_{\xi}^{\mathcal{O}}(X^*, Y^*) = \{\lambda_X, \lambda_Y\}(\xi).$$

La preuve est alors complète. ■

Nous avons ici montré que toute orbite coadjointe d'un groupe de Lie connexe G était munie d'une structure de variété symplectique sur laquelle l'action coadjointe de G est transitive et hamiltonienne. Si la proposition réciproque n'est toutefois pas vérifiée, cela n'est pas loin d'être le cas. En effet, toute variété symplectique munie d'une action transitive et hamiltonienne d'un groupe de Lie connexe G constitue un revêtement d'une orbite coadjointe de G ; [Ki04, ch.1, lem.6]. Le revêtement en question s'obtient au travers de l'application moment associée à cette action.

1.6.3 Géométrie symplectique de la boule unité de $\mathbb{C}^n$

Nous allons maintenant utiliser les acquis de cette section dans le cadre qui nous importe tant depuis le début du chapitre, à savoir, celui de la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$ pour un naturel $n > 0$ fixé. Rappelons que cette variété admet une structure de domaine borné symétrique, et donc homogène. Le groupe d'Iwasawa $\mathbb{S}$ du groupe de Lie $G := SU(1, n)$ est un sous-groupe de Lie résoluble simplement connexe de G admettant, par la proposition 1.5.10, une structure de j -groupe normal élémentaire associée à $\mathbb{D}$. Il est de plus difféomorphe à l'espace homogène G/K où $K \simeq U(n)$ est un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{u}(n)$. Comme nous l'avons vu à la sous-section 1.5.3, quel que soit $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, la structure de variété kählerienne sur $G/K \simeq \mathbb{D}$ se transporte sur $\mathbb{S}$ nous livrant, entre autre, une structure symplectique $k\omega^{\mathbb{S}}$ invariante à gauche sur $\mathbb{S}$ et définie au neutre par

$$k\omega_{\text{Id}}^{\mathbb{S}} = \frac{k}{2} (n+1) \Omega_0 \quad \text{où} \quad \Omega_0 := 2da \wedge dz + \Omega,$$

les notations utilisées ici étant celles développées dans la section 1.5. De plus, cette forme symplectique est invariante sous l'action L de G sur $\mathbb{S}$ définie en (1.37).

Remarque 1.6.7. Notons $\{-, -\}$ le crochet de Poisson sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ associé à la structure symplectique $k\omega^{\mathbb{S}}$ pour un réel $k > 0$. Il est aisé de remarquer à partir des considérations de la sous-section 1.6.1 que le crochet de Poisson de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ est défini dans les coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$ par l'expression

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{1}{k(n+1)} (\partial_a(f) \partial_z(g) - \partial_z(f) \partial_a(g)) \\ &\quad + \frac{1}{k(n+1)} \left[\sum_{l=1}^{n-1} \left(\partial_{v_l^i}(f) \partial_{v_l^1}(g) - \partial_{v_l^1}(f) \partial_{v_l^i}(g) \right) \right]. \end{aligned}$$

La première étape de notre parcours ici consiste à voir $\mathbb{S} \simeq G/K \simeq \mathbb{D}$ en tant qu'orbite coadjointe de G munie (à un multiple près) de sa forme symplectique

de Kirillov-Kostant-Souriau. Préliminairement, rappelons que le centre de l'algèbre de Lie de K est complètement généré par l'élément $Z_0 \in Z(\mathfrak{k})$ défini en (1.19). Fixons $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et considérons $\mathcal{O}_{k'}^{\text{Ad}} \subset \mathfrak{g}$ l'orbite de l'élément $k'Z_0$ sous l'action adjointe de G . L'espace homogène G/K étant muni de la structure d'espace hermitien symétrique définie à sous-section 1.2.4, le résultat [BM01, ch.1, prop.1.1] nous permet d'affirmer que l'application

$$G/K \rightarrow \mathcal{O}_{k'}^{\text{Ad}} : gK \mapsto \text{Ad}_g(k'Z_0)$$

est un difféomorphisme G -équivariant relativement aux actions v et Ad . Par ailleurs, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$ étant simple, sa forme de Killing β^K est non dégénérée et nous livre un isomorphisme linéaire

$$\flat : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^* : X \mapsto [X^\flat : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} : Y \mapsto X^\flat(Y) := \beta^K(X, Y)]$$

satisfaisant $\text{Ad}_g^\flat(X^\flat) = (\text{Ad}_g(X))^\flat$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$; [Ko10, ch.5, prop.5.21]. Cet isomorphisme induit alors une identification G -équivariante entre $\mathcal{O}_{k'}^{\text{Ad}}$ et l'orbite coadjointe de $k'Z_0^\flat$. Nous noterons cette dernière $\mathcal{O}_{k'}^\flat \subset \mathfrak{g}^*$. En combinant ces résultats avec le fait que l'application $\Pi : \mathbb{S} \rightarrow G/K : s \mapsto sK$ soit également un difféomorphisme G -équivariant relativement aux actions L et v , il s'ensuit le lemme suivant.

Lemme 1.6.8. *Dans le contexte décrit ci-dessus, l'application*

$$\varphi^{\mathcal{O}_{k'}^\flat} : \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{O}_{k'}^\flat : s \mapsto \text{Ad}_s^\flat(k'Z_0^\flat)$$

définit un difféomorphisme G -équivariant relativement aux actions L et $\text{Ad}^\flat$ sur $\mathbb{S}$ et $\mathcal{O}_{k'}^\flat$ respectivement.

Par ailleurs, la composition de cette application avec l'inverse de carte global φ explicité à la définition 1.5.5 nous livre le difféomorphisme

$$\varphi^\flat : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_{k'}^\flat : (a, v, z) \mapsto \text{Ad}_{\varphi(a, v, z)}^\flat(k'Z_0^\flat).$$

Notons $\omega^{\mathcal{O}_{k'}^\flat}$ la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{k'}^\flat$ et calculons sa lecture

$$\Omega_{k'} := (\varphi^\flat)^* \omega^{\mathcal{O}_{k'}^\flat}$$

dans les coordonnées globales $(a, v = (v_1^1, \dots, v_{n-1}^1, v_1^i, \dots, v_{n-1}^i), z)$. Pour tout $a, z \in \mathbb{R}$ et $v, v_0 \in \mathbb{R}^{2(n-1)} \simeq V$, en posant $\xi := \varphi^\flat(a, v, z) \in \mathcal{O}_{k'}^\flat \subset \mathfrak{g}^*$

et en utilisant la définition 1.5.5, la structure de l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}$, l'égalité $\text{Ad}_{\exp(X)} = \exp(\text{ad}_X)$ valable pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \left(\varphi_{\star}^b \partial_a \right)_{\xi} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^b(a+t, v, z) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tH)}^b(\xi) = -H_{\xi}^{\star}; \\
\text{(ii)} \quad \left(\varphi_{\star}^b \partial_{v_0} \right)_{\xi} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^b(a, v+tv_0, z) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(aH) \exp(v+tv_0) \exp(-v) \exp(-aH)}^b(\xi) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(aH) \exp\left(tv_0 + \frac{t}{2} \Omega(v, v_0) E\right) \exp(-aH)}^b(\xi) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(\text{Ad}_{\exp(aH)}(tv_0 + \frac{t}{2} \Omega(v, v_0) E))}^b(\xi) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp\left(t\left(e^a v_0 + \frac{e^{2a}}{2} \Omega(v, v_0) E\right)\right)}^b(\xi) \\
&= - \left[e^a (v_0)_{\xi}^{\star} + \frac{e^{2a}}{2} \Omega(v, v_0) E_{\xi}^{\star} \right]; \\
\text{(iii)} \quad \left(\varphi_{\star}^b \partial_z \right)_{\xi} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^b(a, v, z+t) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(aH) \exp(tE) \exp(v+zE)}^b(k' Z_0^b) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(\text{Ad}_{\exp(aH)}(tE))}^b(\xi) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(te^{2a} E)}^b(\xi) = -e^{2a} E_{\xi}^{\star}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la définition de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau sur $\mathcal{O}_{k'}^b$, les coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$ et des outils de calculs semblables à ceux utilisés ci-dessus, pour tout $a, z \in \mathbb{R}$ et $v, v_0, v'_0 \in \mathbb{R}^{2(n-1)} \simeq V$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad (\Omega_{k'})_{(a, v, z)}(\partial_a, \partial_{v_0}) &= \left\langle \varphi^b(a, v, z), \left[H, e^a v_0 + \frac{e^{2a}}{2} \Omega(v, v_0) E \right] \right\rangle \\
&= k' \beta^K \left(Z_0, \text{Ad}_{(a, v, z)^{-1}} \left(e^a v_0 + e^{2a} \Omega(v, v_0) E \right) \right) \\
&= k' \beta^K(Z_0, v_0);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad (\Omega_{k'})_{(a,v,z)} (\partial_a, \partial_z) &= \left\langle \varphi^b(a, v, z), [H, e^{2a} E] \right\rangle \\
&= k' \beta^K \left(Z_0, \text{Ad}_{(a,v,z)}^{-1} (2 e^{2a} E) \right) \\
&= 2k' \beta^K (Z_0, E) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad (\Omega_{k'})_{(a,v,z)} (\partial_{v_0}, \partial_{v'_0}) &= \left\langle \varphi^b(a, v, z), [e^a v_0, e^a v'_0] \right\rangle \\
&= k' \beta^K \left(Z_0, \text{Ad}_{(a,v,z)}^{-1} (e^{2a} \Omega(v_0, v'_0) E) \right) \\
&= \Omega(v_0, v'_0) k' \beta^K (Z_0, E) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad (\Omega_{k'})_{(a,v,z)} (\partial_{v_0}, \partial_z) &= \left\langle \varphi^b(a, v, z), \left[e^a v_0 + \frac{e^{2a}}{2} \Omega(v, v_0) E, e^{2a} E \right] \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi^b(a, v, z), 0 \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

La décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte exposée à la sous-section 1.5.1, couplée à la remarque 1.5.3(c) et à la proposition 1.4.8(c), nous indique directement l'égalité

$$\beta^K (Z_0, v_0) = 0$$

quel que soit $v_0 \in V$. Par ailleurs, un calcul sur base de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ nous livre $\beta^K (Z_0, E) = 2(n+1) > 0$. En utilisant des notations semblables sur $\mathfrak{s}$ et $\mathbb{R}^{2n}$ tel qu'explicité à la sous-section 1.5.1, nous obtenons donc

$$\Omega_{k'} = k' \beta^K (Z_0, E) \Omega_0 = 2(n+1) k' \Omega_0.$$

Cette forme symplectique étant constante, nous en déduisons alors que le couple $(\mathcal{O}_{k'}^b, (\varphi^b)^{-1})$ définit une carte de Darboux globale sur la variété symplectique $(\mathcal{O}_{k'}^b, \omega_{k'}^{\mathcal{O}_{k'}^b})$. De plus, le lemme 1.6.8 couplé aux égalités

$$(\varphi^{-1})^* \Omega_{k'} = (\varphi^{-1})^* (\varphi^b)^* \omega_{k'}^{\mathcal{O}_{k'}^b} = (\varphi^{-1})^* \varphi^* (\varphi^{\mathcal{O}_{k'}^b})^* \omega_{k'}^{\mathcal{O}_{k'}^b} = (\varphi^{\mathcal{O}_{k'}^b})^* \omega_{k'}^{\mathcal{O}_{k'}^b},$$

nous indique que $(\varphi^{-1})^* \Omega_{k'}$ est une forme symplectique G -invariante sur $\mathbb{S}$ (relativement à l'action L). Il est aisé de remarquer que sa valeur au point $s = \text{Id}$ définit une forme symplectique sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ du groupe de Lie $\mathbb{S}$ et que celle-ci correspond à $\Omega_{k'}$.

En conséquence, comme $\omega^{\mathbb{S}}$ et $(\varphi^{\mathcal{O}_{k'}^b})^* \omega_{k'}^{\mathcal{O}_{k'}^b}$ définissent des formes symplectiques invariantes à gauche sur $\mathbb{S}$ qui coïncident à un multiple près en $s = \text{Id}$, nous

obtenons

$$\left(\varphi^{\mathcal{O}_{k'}^b}\right)^* \omega^{\mathcal{O}_{k'}^b} = 4k' \omega^{\mathbb{S}}.$$

Il s'ensuit la proposition clé de cette section.

Proposition 1.6.9. *Dans les notations de la définition 1.5.5 et de cette section, pour tout réel $k > 0$, nous avons les faits suivants.*

- (a) *La variété symplectique $(\mathbb{S}, k \omega^{\mathbb{S}})$ est symplectomorphe à l'orbite coadjointe (relativement au groupe G) de $\frac{k}{4} Z_0^b \in \mathfrak{g}^*$ munie de sa forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau.*
- (b) *Le couple $(\mathbb{S}, \varphi^{-1})$ constitue une carte de Darboux globale sur la variété symplectique $(\mathbb{S}, k \omega^{\mathbb{S}})$ et vérifie*

$$\varphi^* \omega^{\mathbb{S}} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \Omega_0.$$

Soulignons que ce résultat transparaît au travers de la référence [BM01, ch.1, prop.1.3].

L'association de ce résultat successivement avec les lemmes 1.6.8, 1.6.6 et 1.6.3 nous permet d'obtenir la proposition qui suit.

Proposition 1.6.10. *Pour tout $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, l'action*

$$L : G \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : (g, s) \mapsto [gs]_{\mathbb{S}}$$

du groupe de Lie G sur la variété symplectique $(\mathbb{S}, k \omega^{\mathbb{S}})$ est hamiltonienne et admet pour application moment

$$\lambda^{\mathbb{S}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S}) : X \mapsto \lambda_X^{\mathbb{S}}$$

définie pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $s \in \mathbb{S}$ par

$$\lambda_X^{\mathbb{S}}(s) := \left\langle \text{Ad}_s^b \left(\frac{k}{4} Z_0^b \right), X \right\rangle = \frac{k}{4} \beta^K(Z_0, \text{Ad}_{s^{-1}}(X)).$$

Cette dernière expression va nous permettre de calculer explicitement l'application moment $\lambda^{\mathbb{S}}$. Fixons un réel $k > 0$. Comme $\lambda^{\mathbb{S}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})$ est linéaire, connaître $\lambda^{\mathbb{S}}$ revient à connaître sa valeur sur les éléments d'une base de $\mathfrak{g}$. Pour ses propriétés intéressantes, nous choisissons ici d'utiliser la base de $\mathfrak{g}$ issue de sa décomposition en sous-espaces de racine restreinte. Les calculs qui suivent seront toujours effectués en utilisant les coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$ et les notations utilisées seront celles introduites à la section 1.5.

Commençons par expliciter $Z_0^b \in \mathfrak{g}^*$. Comme précédemment, d'une part en utilisant la proposition 1.4.8 (c) et les propriétés de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, et d'autre part au moyen de quelques calculs élémentaires relatifs à l'appendice A et à la décomposition de Z_0 présenté à la remarque 1.5.3 (c), pour tout $1 \leq l \leq n-1$ et $2 \leq p \leq q \leq n-1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_0^b(E) &= Z_0^b(F) = Z_0^b(J_l) = 2(n+1); \\ Z_0^b(b_l^1) &= Z_0^b(b_l^i) = Z_0^b(c_l^1) = Z_0^b(c_l^i) = 0; \\ Z_0^b(H) &= Z_0^b(e_{p,q}^1) = Z_0^b(e_{p,q}^i) = 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Par ailleurs, pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $X \in \mathfrak{g}_{\hat{\lambda}}$ avec $\hat{\lambda} \in \{-2, -1, 1, 2\}$, nous remarquons aisément que

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{(a,v,z)^{-1}}(X) &= \text{Ad}_{(0,-v,-z)(-a,0,0)}(X) = \text{Ad}_{(0,-v,-z)}(e^{\text{ad}_{-aH}}(X)) \\ &= \text{Ad}_{(0,v,z)^{-1}}(e^{-a\hat{\lambda}}X) \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda_X^{\mathbb{S}}(a, v, z) = e^{-a\hat{\lambda}} \lambda_X^{\mathbb{S}}(0, v, z) = \frac{k}{4} e^{-a\hat{\lambda}} Z_0^b(e^{\text{ad}_{-(v+zE)}}(X)).$$

Cette dernière expression, combinée avec les relations (1.41) et quelques calculs à partir de l'appendice A, nous livre alors le résultat suivant.

Lemme 1.6.11. *Dans le cadre de la proposition 1.6.10, pour tout $1 \leq l \leq n-1$ et $2 \leq p \leq q \leq n-1$, pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $v_0 \in V$, nous avons :*

- (i) $\lambda_E^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) e^{-2a};$
- (ii) $\lambda_{v_0}^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) e^{-a} \Omega(v_0, v);$
- (iii) $\lambda_H^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) 2z;$
- (iv) $\lambda_{J_l}^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) \left[(v|v) + 2 \left((v_l^1)^2 + (v_l^i)^2\right) + 1\right];$
- (v) $\lambda_{e_{p,q}^1}^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) 2 [v_{p-1}^1 v_q^i - v_{p-1}^i v_q^1];$
- (vi) $\lambda_{e_{p,q}^i}^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) (-2) [v_{p-1}^1 v_q^1 + v_{p-1}^i v_q^i];$
- (vii) $\lambda_{c_l^1}^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) (-2) e^a [v_l^i ((v|v) + 1) + 2v_l^1 z];$
- (viii) $\lambda_{c_l^i}^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) 2 e^a [v_l^1 ((v|v) + 1) - 2v_l^i z];$
- (ix) $\lambda_F^{\mathbb{S}}(a, v, z) = k \left(\frac{n+1}{2}\right) e^{2a} \left[(v|v) + 1 + 4z^2\right].$

Dans le cas $n = 1$, une adaptation directe de l'argument menant au lemme précédent nous donne

$$\lambda_E^{\mathbb{S}}(a, z) = k e^{-2a}, \quad \lambda_H^{\mathbb{S}}(a, z) = 2kz \quad \text{et} \quad \lambda_F^{\mathbb{S}}(a, z) = k e^{2a} (1 + 4z^2)$$

pour tout $(a, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^2$.

Remarque 1.6.12. À partir de ces expressions, il nous est aisé d'en déduire une forme explicite des champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathbb{S}$ relativement à l'action L . En effet, pour $X \in \mathfrak{g}$, nous déduisons de (1.40) que le champ de vecteurs $X^* = X_{\lambda_X^{\mathbb{S}}}$ correspond à

$$\frac{1}{k(n+1)} \left[\partial_a (\lambda_X^{\mathbb{S}}) \partial_z - \partial_z (\lambda_X^{\mathbb{S}}) \partial_a + \sum_{l=1}^{n-1} \left(\partial_{v_l^i} (\lambda_X^{\mathbb{S}}) \partial_{v_l^1} - \partial_{v_l^1} (\lambda_X^{\mathbb{S}}) \partial_{v_l^i} \right) \right].$$

Dans la suite, nous n'utiliserons explicitement que les expressions des champs de vecteurs fondamentaux X^* pour $X \in \mathfrak{s}$. Pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $v_0 \in V$, celles-ci sont données par :

- (i) $E_{(a,v,z)}^* = -e^{-2a} \partial_z$;
- (ii) $(v_0)_{(a,v,z)}^* = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-a} \Omega(v_0, v) \partial_z - e^{-a} \partial_{v_0}$;
- (iii) $H_{(a,v,z)}^* = -\partial_a$.

Enfin, pour $v_0 \in V$, notons que le champ de vecteurs $\partial_{v_0} \in \Gamma(T\mathbb{S})$ vérifie

$$\partial_{v_0} = \sum_{l=1}^{n-1} \left((v_0)_l^1 \partial_{v_l^1} + (v_0)_l^i \partial_{v_l^i} \right). \quad (1.42)$$

1.7 Vers une autre géométrie

Au cours des trois précédentes sections, nous avons en partie mis de côté les aspects touchant aux structures symétriques sur les espaces sur lesquels nous avons travaillé. Ces structures sont cependant bien présentes dans notre cadre et nous choisissons d'y revenir à l'occasion de la dernière section de ce chapitre.

Nous référons aux notations et résultats établis dans la section 1.5. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, nous désignons par $\mathbb{S}$ le groupe d'Iwasawa de $G := SU(1, n)$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, le triple $(\mathbb{S}, J^{\mathbb{S}}, k\beta^{\mathbb{S}})$ muni de la structure symétrique $s^{\mathbb{S}}$ est alors un espace hermitien symétrique de type non compact sur lequel G agit par automorphismes via l'action $L : G \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$. Définissons l'application $\Phi := \phi \circ \Pi$. En utilisant les coordonnées (a, v, z) pour $a, z \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{C}^{n-1} \simeq V$ décrite à la remarque 1.5.6, de même que les expressions (1.21) et (1.33), nous obtenons explicitement

$$\Phi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D} : s \simeq (a, v, z) \mapsto \tau_s(o) = \left(\frac{\frac{\sinh(a)+\epsilon}{\cosh(a)+\epsilon}}{\frac{v}{\cosh(a)+\epsilon}} \right) \quad \text{où } \epsilon := \frac{e^a}{2} (\bar{v}^t v + 2iz).$$

Pour $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, nous constatons que cette application définit à la fois :

- (i) un isomorphisme de variétés complexes entre $(\mathbb{S}, J^{\mathbb{S}})$ et $(\mathbb{D}, J^{\mathbb{D}})$;
- (ii) une isométrie entre $(\mathbb{S}, k\beta^{\mathbb{S}})$ et $(\mathbb{D}, k\beta^{\mathbb{D}})$;
- (iii) un symplectomorphisme entre $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ et $(\mathbb{D}, k\omega^{\mathbb{D}})$;
- (iv) un isomorphisme d'espaces symétriques entre $(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}})$ et $(\mathbb{D}, s^{\mathbb{D}})$;
- (v) une application G -équivariante relativement aux actions du groupe G par L et τ respectivement sur $\mathbb{S}$ et $\mathbb{D}$.

En outre, le groupe d'Iwasawa $\mathbb{S}$ étant un groupe de Lie, nous savons qu'il est muni de la structure d'espace symétrique du type groupe s^{gr} définie en (1.1). Dans les coordonnées d'Iwasawa de $\mathbb{S}$, l'expression (1.34) nous livre la forme explicite

$$s_{(a,v,z)}^{gr}(a', v', z') = \left(\begin{array}{c} 2a - a' \\ v + e^{a'-a}(v - v') \\ z + e^{2a'-2a}(z - z') + \frac{e^{a'-a}}{2} \Omega(v, v') (1 - e^{a'-a}) \end{array} \right)^t$$

quels que soient $(a, v, z), (a', v', z') \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Il est dès lors légitime de se demander si l'application Φ ne serait pas également un isomorphisme d'espaces symétriques entre $(\mathbb{S}, s^{gr})$ et $(\mathbb{D}, s^{\mathbb{D}})$. Afin de répondre à cette question, il suffit de comparer les structures symétriques s^{gr} et $s^{\mathbb{S}}$ sur $\mathbb{S}$. Or, nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} s_s^{gr}(s') &= s_s^{\mathbb{S}}(s') \quad \text{pour tout } s, s' \in \mathbb{S} \\ \Leftrightarrow (s')^{-1} s &= [\sigma(s^{-1} s')]_{\mathbb{S}} \quad \text{pour tout } s, s' \in \mathbb{S} \\ \Leftrightarrow s^{-1} &= [\sigma(s)]_{\mathbb{S}} \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{S} \end{aligned}$$

où σ est l'automorphisme de G défini en (1.16). Cette dernière assertion n'étant en général pas vérifiée, les structures symétriques s^{gr} et $s^{\mathbb{S}}$ sont donc distinctes.

Le point fondamental dans cette section sera de constater que les géométries affines associées à ces structures symétriques via leurs connexions de Loos respectives sont de natures complètement différentes. Nous en déduisons que chaque j -groupe normal élémentaire porte en lui une structure géométrique distincte de celle d'espace hermitien symétrique que nous connaissons et nous en étudierons brièvement ses propriétés. Avant d'en arriver là nous introduirons toutefois quelques notions et résultats relatifs à un certain type d'espace symétrique possédant une structure symplectique compatible avec la structure symétrique. Les références [Bi95] et [Vo11] s'avèreront précieuses dans cette étude.

1.7.1 Concept d'espace symétrique symplectique

La notion d'espace symétrique symplectique fut introduite par Pierre Bieliavsky dans sa thèse de doctorat ; [Bi95, ch.1]. Il s'agit d'une extension naturelle des espaces symétriques dans un cadre symplectique compatible, semblablement au concept d'espace riemannien symétrique. Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 1.7.1. Un *espace symétrique symplectique* est espace symétrique (M, s) muni d'une forme symplectique ω telle que, pour tout point $x \in M$, la symétrie $s_x : M \rightarrow M$ soit un symplectomorphisme de (M, ω) . Nous dénoterons par le triple (M, s, ω) un tel espace symétrique symplectique.

Un *morphisme* (resp. *isomorphisme*) d'espaces symétriques symplectiques entre deux espaces symétriques symplectiques (M, s, ω) et (M', s', ω') est une application étant à la fois un morphisme (resp. isomorphisme) entre les espaces symétriques (M, s) et (M', s') et un symplectomorphisme entre les variétés symplectiques (M, ω) et (M', ω') . Un isomorphisme entre un espace symétrique symplectique (M, s, ω) et lui-même sera appelé *automorphisme de l'espace symétrique symplectique* (M, s, ω) . L'ensemble de ces automorphismes sera noté $\text{Aut}(M, s, \omega)$. Il s'agit d'un sous-groupe fermé du groupe $\text{Aut}(M, s)$ qui contient toutes les symétries de (M, s) . Par conséquent, le groupe des automorphismes de (M, s, ω) et le groupe des transvections $G(M, s)$ sont tous deux des groupes de Lie de dimension finie agissant différenciablement et transitivement sur M ; [Lo69a, ch.2, thm.3.1].

Semblablement aux cas des espaces symétriques et hermitiens symétriques abordés précédemment, les espaces symétriques symplectiques admettent également un

encodage infinitésimal.

Définition 1.7.2. Soit $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une algèbre de Lie involutive de transvections telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$ où $\mathfrak{g}^\pm := \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = \pm X\}$. Si $\Omega \in (\mathfrak{g}^-)^* \otimes (\mathfrak{g}^-)^*$ est une forme symplectique sur $\mathfrak{g}^-$ satisfaisant

$$\Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]) = 0$$

pour tout $Z \in \mathfrak{g}^+$ et $X, Y \in \mathfrak{g}^-$, alors le *triple* $(\mathfrak{g}, \sigma, \Omega)$ est dit *symétrique symplectique*. Un *isomorphisme entre deux triples symplectiques* $(\mathfrak{g}, \sigma, \Omega)$ et $(\mathfrak{g}', \sigma', \Omega')$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie involutives ϕ entre $(\mathfrak{g}, \sigma)$ et $(\mathfrak{g}', \sigma')$ satisfaisant $\phi^* \Omega' = \Omega$.

Un espace symétrique symplectique (M, s, ω) et un point $o \in M$ étant donnés, nous pouvons leur associer le triple symétrique symplectique issu de la version infinitésimale du triple symétrique (1.4) et de la forme symplectique définie à partir de ω par une expression analogue à (1.11). Nous n'entrerons pas davantage dans ces détails étant donné que des résultats semblables ont déjà été abordés dans les sous-sections 1.1.2 et 1.2.2. Cette association induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes d'espaces symétriques symplectiques simplement connexes pointés et celui des classes d'isomorphismes de triples symétriques symplectiques ; [Bi95, ch.1, prop.1.23]. Ces considérations se sont bien entendu avérées utiles dans la thèse [Bi95] afin d'aborder les thèmes relatifs à la structure, à la décomposition, à la classification des espaces symétriques symplectiques.

Sur un plan davantage géométrique, notons ce qui suit. Sur un espace symétrique symplectique (M, s, ω) , si ∇ désigne la connexion de Loos de l'espace symétrique (M, s) , alors la forme symplectique ω possède la propriété d'être parallèle relativement à ∇ ; [Bi95, ch.1, lem.1.6]. Dans le cas où (M, J, g) est un espace hermitien symétrique de structure symétrique s , avec ω la forme symplectique sur M définie par (1.7), alors (M, s, ω) est un espace symétrique symplectique. Comme nous l'avons vu dans la sous-section 1.2.2, les symétries sont alors des isométries sur (M, g) et la connexion de Loos ∇ sur M correspond alors avec la dérivée covariante de Levi-Civita associée à g . Il est toutefois important de remarquer que, sur un espace symétrique symplectique quelconque, il n'existe pas nécessairement une métrique riemannienne (ou même pseudo-riemannienne) relativement à laquelle cette propriété tient. Nous dirons que de tels *espaces symétriques symplectiques* sont *non métriques*.

1.7.2 Deux géométries symétriques symplectiques

Revenons en maintenant à l'introduction de cette section. Comme nous venons de le voir au travers de la sous-section théorique précédente, pour tout réel $k > 0$, le triple $(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ définit un espace symétrique symplectique, celui-ci admettant une structure d'espace hermitien symétrique compatible. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le groupe des transvections associé à cet espace symétrique correspond au groupe de Lie simple G pour des raisons semblables à celles exposées à la remarque 1.3.11.

Concentrons-nous maintenant sur l'espace symétrique de type groupe $(\mathbb{S}, s^{gr})$. Considérons le groupe de Lie produit $\mathbb{S}^2 := \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ et définissons le sous-groupe $\text{diag}_{\mathbb{S}} = \{(s, s) \in \mathbb{S}^2 : s \in \mathbb{S}\} \simeq \mathbb{S}$ ainsi que l'automorphisme $\hat{\sigma} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ qui à (s, s') associe (s', s) . Le triple $(\mathbb{S}^2, \text{diag}_{\mathbb{S}}, \hat{\sigma})$ est alors symétrique et l'espace homogène $\mathbb{S}^2 / \text{diag}_{\mathbb{S}}$ muni de l'application (1.3) est un espace symétrique isomorphe à $(\mathbb{S}, s^{gr})$ par l'application

$$\mathbb{S}^2 / \text{diag}_{\mathbb{S}} \rightarrow \mathbb{S} : (s, s') \text{diag}_{\mathbb{S}} \mapsto s(s')^{-1} ;$$

[Ko10, ch.4, cor.4.26]. De la proposition 1.1.5, nous en tirons que l'application

$$\hat{v} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : ((s, s'), s_0) \mapsto \hat{v}_{(s, s')} (s_0) := s s_0 (s')^{-1}$$

définit alors une action différentiable et transitive de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{S}$ par automorphismes de $(\mathbb{S}, s^{gr})$. En utilisant les notations de la sous-section 1.5.1, l'égalité $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{n}$ et le lemme 1.1.8 appliqué à l'espace symétrique pointé $(\mathbb{S}, s^{gr}, \text{Id})$ nous livrent alors l'algèbre de Lie du groupe des transvections

$$\mathfrak{G} := \{(aH + X, -aH + Y) \in \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} : X, Y \in \mathfrak{n}, a \in \mathbb{R}\}$$

comme sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ du groupe de Lie $\mathbb{S}^2$. La paire $(\mathfrak{G}, \hat{\sigma}_{\star \text{Id}})$ définit alors une algèbre de Lie involutive de transvections qui, dans les notations de la définition 1.1.6, satisfait

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^+ &= [\mathfrak{G}^-, \mathfrak{G}^-] = \{(X, X) \in \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} : X \in \mathfrak{n}\} \simeq \mathfrak{n} \\ \text{et } \mathfrak{G}^- &= \{(aH + X, -aH - X) \in \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} : X \in \mathfrak{n}, a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

L'application qui à $(aH + X, -aH - X) \in \mathfrak{G}^-$ associe $aH + X \in \mathfrak{s}$ pour tout $X \in \mathfrak{n}, a \in \mathbb{R}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si nous notons a et z respectivement les coordonnées sur $\mathfrak{s}$ selon les vecteurs de base H et E , il est aisé de vérifier que le pull back de la forme symplectique

$$\hat{\Omega}_0 := da \wedge dz + \Omega$$

par cet isomorphisme induit une forme symplectique $\hat{\Omega}$ sur $\mathfrak{G}^-$ telle que le triple

$$(\mathfrak{G}, \hat{\sigma}_{\star \text{Id}}, k' \hat{\Omega})$$

soit symétrique symplectique pour tout $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; [Bi08, ch.2]. Le lecteur constatera aisément que l'espace symétrique symplectique associé à ce triple correspond, à isomorphisme près, à l'espace symétrique $(\mathbb{S}, s^{gr})$ muni de la forme symplectique $k' \hat{\omega}$ avec $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et où $\hat{\omega}$ est définie par invariance sous la restriction de l'action $\hat{v}$ à $G(\mathbb{S}, s^{gr}) \subset \mathbb{S}^2$ à partir de sa valeur au neutre Id, cette dernière s'obtenant via $\hat{\Omega}$. En utilisant un calcul élémentaire à partir de l'isomorphisme $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{G}^-$ et de l'adaptation de l'expression (1.11) à notre cadre, nous obtenons $4 \hat{\omega}_{\text{Id}}(X, Y) = \hat{\Omega}_0(X, Y)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{s}$.

Par ailleurs, nous remarquons que

$$\mathfrak{s}' := \{(aH + X, -aH) \in \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} : X \in \mathfrak{n}, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathfrak{G}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ isomorphe à $\mathfrak{s}$ par la projection sur le premier facteur dans $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$. L'usage du lemme 1.5.4 et des coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$ nous indique qu'il s'agit de l'algèbre de Lie du sous-groupe de Lie

$$\mathbb{S}' := \{((a, v, z), (-a, 0, 0)) \in \mathbb{S}^2\} \subset G(\mathbb{S}, s^{gr}).$$

Quel que soit $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, celui-ci agit simplement et transitivement sur le groupe de Lie $\mathbb{S}$ par automorphismes de l'espace symétrique symplectique $(\mathbb{S}, s^{gr}, k' \hat{\omega})$ via l'action $\hat{v}$. En outre, l'isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{s}'$ et $\mathfrak{s}$ s'intègre en un isomorphisme de groupes de Lie $((a, v, z), (-a, 0, 0)) \in \mathbb{S}' \mapsto (a, v, z) \in \mathbb{S}$. Ceci nous permet de définir l'action du groupe de Lie $\mathbb{S}$ sur lui-même

$$A : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : (s \simeq (a, v, z), s') \mapsto A_s(s') := \hat{v}_{((a, v, z), (-a, 0, 0))}(s').$$

Celle-ci est transitive et telle que $A_s \in \text{Aut}(\mathbb{S}, s^{gr}, k' \hat{\omega})$ pour tout $s \in \mathbb{S}$ et $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous en tirons alors la proposition suivante dont le lecteur pourra notamment retrouver la trace dans [Bi08, ch.2, prop.2.1] et [BG14, ch.2, prop.2.9].

Proposition 1.7.3. *L'application*

$$\text{ana} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : s \simeq (a, v, z) \mapsto A_s(\text{Id}) \simeq (a, v, z)(a, 0, 0) = (2a, e^{-a}v, e^{-2a}z)$$

définit un difféomorphisme $\mathbb{S}$ -équivariant relativement aux actions L et A . De plus, le transport de la structure symétrique s^{gr} par ce difféomorphisme nous livre une nouvelle structure symétrique

$$s^{\text{ana}} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S} : (s, s') \mapsto s_s^{\text{ana}}(s') := \text{ana}^{-1} \left(s_{\text{ana}(s)}^{gr}(\text{ana}(s')) \right)$$

telle que, pour tout $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le triple $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k' \omega^{\mathbb{S}})$ définisse un espace symétrique symplectique pour lequel

$$L_s \in \text{Aut}(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k' \omega^{\mathbb{S}})$$

quel que soit $s \in \mathbb{S}$.

Démonstration. Il est clair que ana est un difféomorphisme satisfaisant

$$\text{ana}(L_s(s')) = A_{ss'}(\text{Id}) = A_s(\text{ana}(s'))$$

pour tout $s, s' \in \mathbb{S}$. Cette application est donc bien $\mathbb{S}$ -équivariante relativement aux actions L et A . Pour tout $k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nous tirons alors de cette assertion et de la définition de la structure symétrique s^{ana} que le triple $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k' \text{ana}^* \hat{\omega})$ définit un espace symétrique symplectique tel que $L_s \in \text{Aut}(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k' \text{ana}^* \hat{\omega})$ quel que soit $s \in \mathbb{S}$. Afin de compléter la preuve, montrons l'existence d'un réel $k_0 \neq 0$ satisfaisant

$$\text{ana}^* \hat{\omega} = k_0 \omega^{\mathbb{S}}.$$

Ces deux formes symplectiques étant invariantes à gauche sur $\mathbb{S}$, il suffit de vérifier cette propriété au point $s = \text{Id}$. Pour tout $a, z \in \mathbb{R}$ et $v \in V$, nous déduisons aisément de l'expression de l'application ana les égalités

$$\text{ana}(\text{Id}) = \text{Id} \quad \text{et} \quad \text{ana}_{*\text{Id}}(aH + v + zE) = 2aH + v + zE.$$

Par conséquent, comme

$$(\text{ana}^* \hat{\omega})_{\text{Id}}(X, Y) = \frac{1}{4} \hat{\Omega}_0(\text{ana}_{*\text{Id}}(X), \text{ana}_{*\text{Id}}(Y))$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{s}$, la forme symplectique Ω_0 telle que définie en (1.38) correspond avec $4(\text{ana}^* \hat{\omega})_{\text{Id}}$ et la thèse est vérifiée avec $k_0 = \frac{1}{2(n+1)}$. ■

Remarque 1.7.4. Après quelques calculs au moyen des expressions des applications s^{gr} et ana , nous en déduisons la forme explicite

$$s_{(a,v,z)}^{\text{ana}}(a', v', z') = \begin{pmatrix} 2a - a' \\ 2 \cosh(a - a') v - v' \\ 2 \cosh(2a - 2a') z - z' + \sin(a - a') \Omega(v, v') \end{pmatrix}^t,$$

pour tout $(a, v, z), (a', v', z') \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Il suit directement de la proposition précédente que le difféomorphisme ana définit un isomorphisme d'espaces symétriques symplectiques entre $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, \omega^{\mathbb{S}})$ et $(\mathbb{S}, s^{gr}, 2(n+1)\hat{\omega})$. En particulier, en transportant l'action de $G(\mathbb{S}, s^{gr})$ de façon équivariante par cette application et en appliquant le lemme 1.1.8, nous en déduisons que l'algèbre de Lie du groupe des transvections $G(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$ est isomorphe à $\mathfrak{G}$. Ces faits couplés aux résultats obtenus lors de la sous-section 1.5.3 nous mènent à la proposition suivante.

Proposition 1.7.5. *Considérons un réel $k > 0$ ainsi que la variété symplectique $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ définie précédemment.*

- (a) *La structure symétrique $s^{\mathbb{S}}$ définie en (1.39) est telle que le triple $(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ définisse un espace symétrique symplectique dont le groupe des transvections $G(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}})$ est simple et s'identifie à $G = SU(1, n)$. De plus, le groupe de Lie $\mathbb{S}$ admet une structure d'espace hermitien symétrique compatible avec cette structure d'espace symétrique symplectique.*
- (b) *La structure symétrique s^{ana} définie à la proposition 1.7.3 est telle que le triple $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ définisse un espace symétrique symplectique non métrique dont le groupe des transvections $G(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$ est résoluble et d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{G}$.*

De plus, pour tout $s \in \mathbb{S}$, la translation à gauche par s définit un automorphisme de ces deux espaces symétriques symplectiques.

À ce stade, le seul point évoqué dans cette proposition restant *a priori* non trivial aux yeux du lecteur et pour lequel nous allons esquisser brièvement une preuve est le fait que l'espace symétrique symplectique $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ soit non métrique quel que soit $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. En effet, si ce point n'était pas vérifié, le groupe $G(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$ agirait transitivement et isométriquement sur $\mathbb{S}$ et un raisonnement semblable à celui de la sous-section 1.2.2, couplé à une adaptation du résultat [CP80, ch.1, prop.1.6.b] dans notre cadre, nous livrerait une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\hat{\beta}_0 \in \mathfrak{G}^* \otimes \mathfrak{G}^*$ satisfaisant

$$\hat{\beta}_0([Z, X], Y) + \hat{\beta}_0(X, [Z, Y]) = 0 \quad \text{pour tout } X, Y, Z \in \mathfrak{G}.$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que cette dernière condition entre en contradiction avec la non dégénérescence de la forme bilinéaire $\hat{\beta}_0$ en considérant, par exemple, $Z = (E, 0)$ et $X = Y$.

Remarque 1.7.6. Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction à cette section, pour tout réel $k > 0$, l'espace symétrique symplectique $(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ muni de la

structure complexe $J^{\mathbb{S}}$ et de la structure riemannienne $k\beta^{\mathbb{S}}$ est un espace hermitien symétrique de type non compact dont la structure peut s'identifier à celle de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ par le difféomorphisme Φ . Dans ce cas, le paramètre $k > 0$ est intimement relié à la courbure considérée sur la boule unité $\mathbb{D}$ en tant que variété riemannienne. À l'inverse, dans le cas de l'espace symétrique symplectique non métrique $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k\omega^{\mathbb{S}})$, la structure géométrique de l'espace est invariante sous le choix de ce paramètre $k > 0$. Dans un document non publié, Pierre Bieliavsky montra que ces deux espaces sont en fait liés l'un à l'autre par une *contraction de courbure*, c'est-à-dire l'annulation d'un ou plusieurs coefficients du tenseur de courbure de Riemann de la connexion de Loos sur $(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}})$. Ce fait est mentionné dans la référence [Bi08, ch.1] et explicité dans le cas $n = 1$ dans l'article [B+09].

1.7.3 Remarques sur les triangles géodésiques

La proposition 1.7.5 que nous venons d'aborder nous expose deux structures symétriques symplectiques invariantes à gauche sur le groupe de Lie $\mathbb{S}$. Ces deux structures sont distinctes et tant les connexions de Loos que les groupes de transvections y étant associés sont de natures relativement différentes. Au travers de cette sous-section, nous allons pointer quelques conséquences géométriques reliées à ces considérations. Celles-ci n'ayant pas fait l'objet spécifique de notre travail, nous n'en présenterons toutefois qu'une esquisse.

Proposition 1.7.7. [BG14, ch.2, prop.2.14 & ch.5, thm.5.53] *Considérons l'espace symétrique $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$ où $\mathbb{S}$ est le groupe d'Iwasawa de $SU(1, n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et s^{ana} la structure symétrique sur $\mathbb{S}$ définie à la proposition 1.7.3.*

(a) *Deux points de $\mathbb{S}$ sont nécessairement joints par un unique segment géodésique relativement à la connexion de Loos sur $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$.*

(b) *Pour tout $x, y, z \in \mathbb{S}$, il existe un unique point $P(x, y, z) \in \mathbb{S}$ tel que*

$$P(x, y, z) = (s_x^{\text{ana}} \circ s_y^{\text{ana}} \circ s_z^{\text{ana}})(P(x, y, z)).$$

(c) *Notons $\mathbb{S}^3 := \mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ et définissons l'application*

$$(x, y, z) \in \mathbb{S}^3 \mapsto (P, s_z^{\text{ana}}(P), s_y^{\text{ana}}(s_z^{\text{ana}}(P))) \in \mathbb{S}^3$$

où $P = P(x, y, z)$ est le point de $\mathbb{S}$ défini en (b). Alors, cette application est un difféomorphisme.

Par le point (a) de la proposition 1.7.7, un triple $(x, y, z) \in \mathbb{S}^3$ définit univoquement un triangle géodésique orienté dans $\mathbb{S}$, appelé parfois plus simplement *triangle*. Le *double triangle* basé sur les points $x, y, z \in \mathbb{S}$ est, quant à lui, le triangle défini à partir de l'image du triple $(x, y, z) \in \mathbb{S}^3$ par le difféomorphisme explicité à la proposition 1.7.7 (c). Dans le cas d'un espace symétrique (M, s) où seul le point (a) tient, une définition plus générale de *double triangle* basé sur $x, y, z \in M$ peut être donnée comme étant un triangle défini via un triple (x', y', z') tel que $s_x(z') = x'$, $s_y(x') = y'$ et $s_z(y') = z'$.

Dans le cadre de cette proposition, pour $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, considérons la forme symplectique $k\omega^{\mathbb{S}}$ définie à la sous-section 1.5.3 et telle que le triple $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ soit un espace symétrique symplectique en vertu de la proposition 1.7.5. Comme

$$H_{dR}^2(\mathbb{S}) \simeq H_{dR}^2(\mathbb{R}^{2n}) = 0$$

par le lemme de Poincaré, une application du théorème de Stokes-Cartan nous permet de définir l'*aire symplectique* du triangle géodésique porté par trois points $x, y, z \in \mathbb{S}$ comme étant l'intégrale de la forme symplectique $k\omega^{\mathbb{S}}$ sur n'importe quelle surface de $\mathbb{S}$ bordée par ce triangle orienté; [Wa83, ch.4], [Ma97, ch.15]. Le point (c) de la proposition 1.7.7 rend alors légitime la formulation de la définition suivante.

Définition 1.7.8. Dans le contexte mentionné ci-dessus, pour $x, y, z \in \mathbb{S}$, notons $\text{Aire}(x, y, z) \in \mathbb{R}$ l'aire symplectique (relativement à la forme symplectique $k\omega^{\mathbb{S}}$) du triangle géodésique orienté porté par les points x, y et z . La *phase de Weinstein* est définie comme étant la fonction

$$S^W : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto S^W(x, y, z) := \text{Aire}(P, s_z^{\text{ana}}(P), s_y^{\text{ana}}(s_z^{\text{ana}}(P)))$$

où $P := P(x, y, z)$ est le point de $\mathbb{S}$ défini à la proposition 1.7.7 (b).

Cette définition fut introduite par Alan Weinstein dans ses travaux en quantification par déformation sur lesquels nous reviendront brièvement par la suite ceci n'étant pas le but du présent chapitre; [We94a]. Le point sur lequel nous souhaitons insister ici est le fait que les doubles triangles dans $\mathbb{S}$, tout comme l'application S^W , sont bien définies dans le cas de l'espace symétrique symplectique $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, k\omega^{\mathbb{S}})$ essentiellement de par les propriétés géométriques exposées à la proposition 1.7.7. Au-delà de la référence [BG14], les résultats relatifs à cette proposition, de même que le cadre dans lequel ils se formulent, furent en partie développés par Yannick Voglaire dans sa thèse de doctorat [Vo11] et dans l'article [Vo13]. La notion de

point milieu y joue un rôle relativement central. Celle-ci se définit comme suit : étant donné un espace symétrique (M, s) et deux points $x, y \in M$, un point $z \in M$ est un *point milieu* de x et y si $s_z(x) = y$. Voglaire développa notamment des critères géométriques et algébriques équivalents à l'existence de tels points milieu ; [Vo11, ch.2, thm.2.2.20]. Sur l'espace symétrique $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$, l'existence et l'unicité d'un point milieu pour toute paire de points donnée est une vérité et le lecteur pourra trouver une formule explicite pour celui-ci en [BG14, ch.2, lem.2.13]. Toutefois, si cette propriété suffit à obtenir le point (a) de la proposition 1.7.7, elle ne suffit pas à en garantir les points (b) et (c) comme nous l'indique le résultat suivant.

Proposition 1.7.9. [Vo13, ch.2, thm.2.2.20, prop.2.3.7 & thm.2.3.12]

Soit (M, s) un espace symétrique sur lequel il existe une application lisse

$$m : M \times M \rightarrow M \text{ telle que } s_{m(x,y)}(x) = y$$

pour tout $x, y \in M$. Définissons l'application

$$m_3 : M \times M \times M \rightarrow M \times M \times M : (x, y, z) \mapsto (m(z, x), m(x, y), m(y, z)).$$

- (a) *Deux points de M sont nécessairement joints par un unique segment géodésique relativement à la connexion de Loos sur $(\mathbb{S}, s)$.*
- (b) *Le groupe des transvections $G(M, s)$ est résoluble si et seulement si l'application m_3 est un difféomorphisme.*
- (c) *Si le groupe des transvections $G(M, s)$ est semi-simple, alors l'application m_3 n'est pas surjective.*

Dans le cadre de cette proposition, l'existence et unicité d'un double triangle basé sur trois points de M donnés repose sur le fait que m_3 soit un difféomorphisme. Le point crucial nous menant à la proposition 1.7.7 (c) est donc le fait que le groupe des transvections de $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$ soit résoluble. En particulier, nous perdons donc cette propriété géométrique et la possibilité de définir globalement une phase analogue à S^W dans le cas de l'espace symétrique symplectique formé de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ munie de la structure symétrique $s^{\mathbb{D}}$ et de la structure symplectique $k\omega^{\mathbb{D}}$ pour $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, vu que son groupe des transvections est simple. Une explicitation concrète de ce fait est présentée dans le cas $n = 1$ à la référence [Vo11, ch.2, expl.2.3.4].

Chapitre 2

Quantification

« *Rome ne s'est pas faite en un jour* ». À travers ce célèbre proverbe d'origine latine se retrouve l'évolution de la recherche fondamentale actuelle dans de très nombreux domaines, et notamment en théorie mathématique de la quantification. Et c'est bien ce dernier que nous allons aborder dans le second chapitre de ce texte en entrant enfin dans le vif du sujet de notre thèse. Une entrée prudente qui verra avant tout la mise en place d'une description à la fois mathématique et journalistique de ce domaine de recherche dans lequel nous tenterons de replacer notre contribution.

Plus précisément, cette seconde partie sera consacrée à l'étude de l'obtention d'une forme de quantifications de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. À ces fins, nous revisiterons l'introduction d'outils théoriques associés à la mécanique hamiltonienne quantique et développerons une reformulation de nos objectifs en termes de l'évolution d'une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles dont nous discuterons la résolution. Cette approche sera basée entre autres sur les articles [BM01] et [B+09]. Tout au long de ce texte, nous mettrons également en évidence l'importance des résultats obtenus lors de l'étude géométrique que nous avons menée au cours du premier chapitre. À la frontière de domaines tels que la théorie de Lie, l'analyse harmonique, la théorie des représentations, les équations aux dérivées partielles ou encore l'analyse des fonctions spéciales, le lecteur découvrira ici une des faces cachées de la quantification.

2.1 Quantification par déformation

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, par le terme *quantification*, nous évoquons essentiellement un processus nous permettant l'expression au niveau quantique d'objets et de faits relatifs à un système classique. Le problème ainsi posé est vaste et différentes approches existent afin de s'y attaquer. Dans cette section nous nous intéresserons au traitement de la quantification par déformation initiée par Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer dans les articles considérés comme fondateurs de la discipline [B+78a], [B+78b]. Nous en développerons les idées principales du point de vue formel, tout en abordant ce sujet brièvement sous un angle non formel. Parmi les nombreuses références existant sur ce sujet, ce texte s'appuiera entre autres plus ou moins fortement sur les ouvrages et articles [Bo05], [Gu11], [Es14], [CW99], [We94b], [Be95], [B+98], [BG14], [Bi02], [Xu98], [De06], [Vo11], [Cl07], [dG10] et [Le90].

2.1.1 Concept de star-produit

L'idée de base de la *quantification par déformation* repose sur une quantification obtenue par déformation associative non commutative de l'algèbre des fonctions lisses sur la variété symplectique constituée par l'espace de phase associé à un système classique. Dans un cadre dit formel, cette déformation est encodée par la donnée d'un *star-produit* tel que nous allons le définir. Afin de faciliter l'expression de cette définition, fixons (M, ω) une variété symplectique et $\{-, -\}$ la structure de variété de Poisson sur M associée à la structure symplectique ω . Dans cette section, et plus généralement dans ce chapitre, la notation $\mathcal{C}^\infty(M)$ désignera l'ensemble des fonctions lisses sur M à valeurs complexes. Les champs de tenseurs (réels) intervenant dans la suite et étant issus des considérations géométriques du chapitre précédent sont alors sans peine vus comme éléments de l'ensemble des champs de tenseurs complexes ; [He01, ch.8, § 2]. Considérons maintenant

$$\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k f_k : f_k \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

l'ensemble des séries formelles en un paramètre formel ν à coefficients dans l'algèbre des fonctions lisses sur M . Nous insistons sur le fait que cette écriture en *série* est purement *formelle* dans le sens où elle ne sous-entend aucune notion de convergence. Deux telles séries formelles sont dites égales si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, leur

coefficient respectif en ν^k sont égaux. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$ se munit d'une structure d'algèbre commutative sur $\mathbb{C}$ dont l'addition et la multiplication sont respectivement définies par

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k f_k \right) + \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k g_k \right) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k (f_k + g_k) \\ \text{et } \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k f_k \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k g_k \right) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k \left(\sum_{l=0}^k f_l g_{k-l} \right) \end{aligned}$$

pour tout $\sum_k \nu^k f_k, \sum_k \nu^k g_k \in \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$. Les séries formelles en ν à coefficients réels ou complexes sont définies de façons semblables.

Enfin, avant d'introduire précisément la définition d'un star-produit, rappelons que, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, une application

$$C : (\mathcal{C}^\infty(M))^p \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

est appelée *opérateur p-différentiel* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, dans chaque carte locale (U, φ) de M de coordonnées locales $(x_j)_j$, il existe des fonctions lisses $\{C_{I_1, \dots, I_p} \in \mathcal{C}^\infty(U)\}_{I_1, \dots, I_p}$ qui vérifient

$$C(f_1, \dots, f_p)|_U = \sum_{\substack{I_1, \dots, I_p \\ |I_1|, \dots, |I_p| \leq N}} \left[C_{I_1, \dots, I_p} \prod_{k=1}^p \partial_{x_{I_k}}(f_k) \right]$$

pour tout $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{C}^\infty(M)$, où $I_1, \dots, I_p$ désignent des multi-indices dont les composantes sont des naturels entre 1 et $\dim(M)$.

Définition 2.1.1. Dans ce cadre, un *star-produit* sur M est une application

$$*_\nu : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket : (f, g) \mapsto f *_\nu g := \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k C_k(f, g)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application

$$C_k : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

est $\mathbb{C}$ -bilinéaire et définit un opérateur 2-différentiel tel que $C_k(f, 1) = 0$ et $C_k(1, f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$;

- (ii) son extension $\mathbb{C}[[\nu]]$ -bilinéaire à l'ensemble des séries formelles en ν à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, définie pour tout $\sum_k \nu^k f_k, \sum_k \nu^k g_k \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ par la formule

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k f_k \right) *_{\nu} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k g_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k \left(\sum_{\substack{i, j, l \in \mathbb{N} \\ i+j+l=k}} C_l(f_i, g_j) \right),$$

livre un produit associatif sur $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$;

- (iii) quels que soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, les relations dites *de limite classique*

$$C_0(f, g) = fg \quad \text{et} \quad C_1(f, g) - C_1(g, f) = 2\{f, g\}$$

sont vérifiées.

Le terme de *quantification par déformation formelle* est également utilisé pour référer à un star-produit. Le commutateur sur $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ relativement au star-produit $*_{\nu}$ sera appelé *$*_{\nu}$ -commutateur* et noté $[-, -]_{*_{\nu}}$. Tel qu'exposé ci-dessus, un star-produit constitue une déformation formelle de l'algèbre des fonctions lisses sur M préservant l'élément neutre $f \equiv 1$ et s'effectuant dans la direction du crochet de Poisson associé à la forme symplectique ω , dans le sens où

$$f *_{\nu} g \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} fg \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\nu} [f, g]_{*_{\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \{f, g\}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, ces conditions traduisent la limite classique de la déformation quantique formelle. Par ailleurs, l'associativité de l'opération de composition des opérateurs sur un espace de Hilbert dont est censé rendre compte le star-produit $*_{\nu}$ justifie logiquement la condition d'associativité de celui-ci. Le lecteur vérifiera facilement que cette dernière condition est équivalente à imposer

$$\sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i+j=k}} C_i(C_j(f, g), h) = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i+j=k}} C_i(f, C_j(g, h))$$

pour tout $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1.2. Quelques variantes de la définition 2.1.1 existent. Nous renvoyons le lecteur aux références citées en début de section pour plus de détails sur celles-ci. Spécifions toutefois les deux points suivants.

- (a) La définition d'un star-produit tient sur n'importe quelle sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(M)$ stable sous le crochet de Poisson $\{-, -\}$. En pratique, nous utiliserons régulièrement cette définition locale dans la suite afin de légitimer nos calculs, ceux-ci n'étant pas toujours réalisables sur l'espace des fonctions lisses sur M tout entier.
- (b) La définition d'un star-produit reste parfaitement valable dans le cas d'une variété de Poisson arbitraire indépendamment d'une éventuelle structure symplectique. En outre, si M est une variété lisse munie d'une application

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{*_\nu} \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket : (f, g) \mapsto fg + \sum_{k=1}^{+\infty} \nu^k C_k(f, g)$$

satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de la définition 2.1.1, alors l'application

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) : (f, g) \mapsto \frac{1}{2} [C_1(f, g) - C_1(g, f)]$$

définit une structure de variété de Poisson sur M .

Nous tenons enfin à souligner que, dans la suite de cette section et du chapitre, nous désignerons toujours par ν le paramètre formel intervenant relativement à la définition d'un star-produit telle qu'exposée ci-dessus. Ce paramètre ν sera par ailleurs appelé *paramètre (formel) de déformation*.

Avant de se pencher sur quelques résultats généraux relatifs à l'existence de star-produits, mentionnons l'exemple le plus connu et sans doute le plus important de star-produit. Considérons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ainsi que $M := \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ comme variété lisse munie de sa *forme symplectique standard* $\omega \in \Omega^2(M)$, c'est-à-dire la forme symplectique constante dont la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ est donnée par

$$(\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n} := \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $(\omega^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n} = -\left((\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n}\right)^{-1}$ et définissons l'application

$$\begin{aligned} *_{\nu}^0 : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket \\ (f, g) &\mapsto f *_{\nu}^0 g \\ &:= fg + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu^k}{k!} \sum_{\substack{I: |I|=k \\ J: |J|=k}} \omega^{IJ} \partial_I(f) \partial_J(g) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où, d'une part, I et J désignent des multi-indices dont les composantes sont des naturels étant compris entre 1 et $2n$, et, d'autre part, si $|I| = |J| = k \in \mathbb{N}$ avec $I = (i_1, \dots, i_k)$ et $J = (j_1, \dots, j_k)$, alors

$$\omega^{IJ} := \prod_{l=1}^k \omega^{i_l j_l}$$

et ∂_I (resp. ∂_J) désigne la composition des opérateurs de dérivées partielles en les variables $i_1, \dots, i_k$ (resp. $j_1, \dots, j_k$). Après quelques calculs, nous remarquons sans peine que l'application $*_{\nu}^0$ satisfait aux conditions de la définition 2.1.1 et définit donc un star-produit sur M . Le lecteur pourra consulter davantage de détails sur ce point aux références [Bo05, ch.5], [Be95, ch.1, § 2 & § 3] et [Es14, ch.3, expl.3.1]. Soulignons toutefois au passage les égalités

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I: |I|=1 \\ J: |J|=1}} \omega^{IJ} \partial_I(f) \partial_J(g) &= \sum_{i,j=1}^{2n} \omega^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g) \\ &= \{f, g\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

valables pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, où $\{-, -\}$ désigne le crochet de Poisson sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ associé à la forme symplectique standard ω .

Définition 2.1.3. Le star-produit $*_{\nu}^0$ défini en (2.1) sur $\mathbb{R}^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est appelé *star-produit de Moyal*.

Comme annoncé dans l'introduction, ce star-produit est issu de la composition des opérateurs obtenus après un processus de quantification. Il fut en réalité introduit par Groenewold dans le document [Gr46] avant que le nom de Moyal ne lui soit finalement associé après la parution en 1949 du papier de mécanique statistique quantique [Mo49] dans lequel intervient son $*_{\nu}^0$ -commutateur. L'article [B+78a] présente, quant à lui, une extension de la définition 2.1.3 au cas d'une variété symplectique munie d'une connexion symplectique plate.

Remarque 2.1.4. L'expression du star-produit de Moyal telle qu'exposée ci-dessus peut, à strictement parler, être simplifiée. Ce choix de formulation se justifie de par le fait que cette définition soit aisément généralisable en l'état au cas d'un espace vectoriel réel symplectique de dimension finie; [Be95, ch.1, § 2].

2.1.2 Résultats d'existence & équivalence de star-produits

Lors de la sous-section précédente, nous venons d'introduire la notion de star-produit vue comme manifestation formelle d'une quantification par déformation sur une variété symplectique (ou plus généralement, une variété de Poisson). Après avoir donné l'exemple du star-produit de Moyal dans le cadre spécifique de la variété $\mathbb{R}^{2n}$ munie de sa forme symplectique standard, n étant un naturel non nul, soulever la question de l'existence de tel objets mathématiques dans un cadre plus général paraît légitime. Historiquement de nombreux résultats abondèrent dans ce sens. Le traitement détaillé de ceux-ci n'étant pas l'objet principal de notre travail, nous les condenserons dans les lignes suivantes.

Le premier résultat complet d'existence d'un star-produit fut démontré en 1983, par De Wilde et Lecomte, dans le cadre des variétés symplectiques. L'article [DL83] concrétise ce résultat que les auteurs développèrent en utilisant, entre autres, des arguments cohomologiques. Indépendamment, d'autres approches arrivèrent aux mêmes conclusions par la suite. Citons notamment l'approche originale de Fedosov publiée initialement en russe de 1985 et reprise dans l'article [Fe94] du même auteur. Ce dernier y expose la construction d'un star-produit sur chaque variété symplectique en s'appuyant en partie sur le choix d'une connexion symplectique, ceci permettant de construire des star-produits possédant certaines propriétés. Nous effleurons ce dernier point dans la sous-section suivante. Au-delà de l'article [Fe94], de très nombreux textes cités dans nos références tels que [We94b, ch.2], [Be95, ch.3], [Xu98, ch.2], [CW99, ch.21] ou [Gu11, ch.3] reprennent cette importante construction. Enfin, toujours dans cadre des variétés symplectiques et indépendamment des auteurs précédents, citons Omori, Maeda et Yoshioka dont le travail apparaît dans la publication [O+91] de 1991 et mène à des conclusions semblables d'existence de star-produits.

Les différents travaux que nous venons brièvement de mentionner ne laissent donc aucun doute sur la véracité du théorème suivant.

Théorème 2.1.5. *Toute variété symplectique admet un star-produit.*

Dans le cadre plus général des variétés de Poisson, c'est le mathématicien Maxim Kontsevich qui livra en 1997 le résultat suprême d'existence d'un star-produit comme conséquence de son célèbre théorème de formalité. Si sa prépublication se trouve aisément sur la toile, c'est à l'article [Ko03] publié six ans plus tard que

nous renverrons le lecteur. En guise de référence complémentaire, notons que le travail de Kontsevich est le point central de l'ouvrage [Es14].

Cet important fait énoncé, nous réalisons qu'il existe sur Terre plus d'un star-produit. Il est dès lors intéressant d'introduire une notion d'équivalence entre deux tels star-produits qui soit naturelle relativement à la définition 2.1.1.

Définition 2.1.6. Deux *star-produits* $*_\nu$ et $*'_\nu$ sur une même variété symplectique (M, ω) sont dits *équivalents* s'il existe un opérateur linéaire T sur $\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$ de la forme

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k T_k \quad (2.3)$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (i) T_k est un opérateur 1-différentiel $\mathbb{C} \llbracket \nu \rrbracket$ -linéaire quel que soit $k \in \mathbb{N}$;
- (ii) $T_0 = \text{Id}_{\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket}$;
- (iii) $T(f *_\nu g) = T(f) *_\nu' T(g)$ pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Dans le cadre de la définition précédente, notons qu'un tel opérateur T est nécessairement inversible, ce qui permet une reformulation équivalente de la définition 2.1.6 en remplaçant la condition (iii) par

$$(iii)' \quad f *_\nu' g = T(T^{-1}(f) *_\nu T^{-1}(g)) \text{ pour tout } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) ;$$

[Be95, ch.4, lem.4.7]. Nous noterons plus simplement cette relation entre $*_\nu$ et $*'_\nu$ par $*'_\nu = T(*_\nu)$. Le lecteur vérifiera sans peine que cette dernière définition fournit bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des star-produits définis sur une variété symplectique.

Remarque 2.1.7. Dans la suite, une variété symplectique (M, ω) sur laquelle est défini un star-produit $*_\nu$ étant clairement spécifiée, nous noterons $\text{Op}(*_\nu)$ l'ensemble des opérateurs linéaires T sur $\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$ de la forme (2.3) satisfaisant aux points (i) et (ii) de la définition 2.1.6 et tel que $T(*_\nu)$ définisse un nouveau star-produit sur M . Remarquons que cette dernière condition est équivalente à demander que l'opérateur 1-différentiel T_k s'annule sur les constantes quel que soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; [Be95, ch.4, lem.4.7].

La question relativement logique se dressant devant nous est alors celle de la détermination des classes d'équivalence de star-produits sur une variété symplectique donnée. L'année 1995 vit une solution être apportée à ce problème sous différentes

approches au travers des travaux de Nest et Tsygan, puis de Deligne d'une part, et de Bertelson, Cahen et Gutt d'autre part ; [NT95], [De95], [Be95], [B+97]. L'énoncé suivant couvre le résultat fondamental issu de ces articles.

Théorème 2.1.8. *Les classes d'équivalence de star-produits sur une variété symplectique (M, ω) sont paramétrisées intrinsèquement par l'espace des séries formelles en le paramètre formel de déformation à coefficients dans le deuxième groupe de cohomologie de De Rham $H_{dR}^2(M)$.*

Notons qu'une des pierres angulaires de ce théorème réside dans le fait que tout star-produit sur une variété symplectique soit équivalent à un star-produit construit par la méthode exposée dans l'article [Fe94] de Fedosov que nous avons évoqué plus haut dans cette sous-section.

2.1.3 Star-produits invariants

Dans la suite de notre travail, nous allons nous pencher sur un certain type de star-produits visant à rendre compte de la présence de symétries d'un système classique au niveau de sa quantification par déformation. Afin d'introduire plus précisément ce concept, fixons pour le reste de cette sous-section une variété symplectique (M, ω) et un groupe de Lie G agissant à gauche par symplectomorphismes sur (M, ω) via l'action différentiable $\varsigma : G \times M \rightarrow M : (g, x) \mapsto \varsigma_g(x)$.

Définition 2.1.9. Dans le cadre exposé ci-dessus, un *star-produit* $*_\nu$ sur M est dit *G -invariant* si

$$\varsigma_g^*(f_1 *_\nu f_2) = \varsigma_g^*(f_1) *_\nu \varsigma_g^*(f_2) \quad (2.4)$$

pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et pour tout $g \in G$.

La relation (2.4) se comprend bien évidemment en considérant l'extension $\mathbb{C}[[\nu]]$ -linéaire de l'application $\varsigma_g^* : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ à $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, quel que soit $g \in G$. Au vu de la sous-section précédente, nous sommes à même de nous interroger sur l'existence d'un tel star-produit G -invariant sur la variété symplectique (M, ω) . Déjà abordé dans l'article fondateur [B+78a, ch.9, ch.10 & ch.11], l'existence d'un star-produit G -invariant sur M est intimement associée à l'existence d'une connexion symplectique sur (M, ω) invariante sous l'action du groupe G . Le fait suivant suit de la construction de Fedosov présentée dans l'article [Fe94]

et dont nous avons brièvement discuté à la sous-section précédente ; [B+98, ch.3, prop.3.2], [Xu98, ch.6, prop.6.1].

Proposition 2.1.10. *Dans le contexte susmentionné, s'il existe une connexion symplectique ∇ sur la variété symplectique (M, ω) telle que $\varsigma_g \in \text{Aff}(M, \nabla)$ pour tout $g \in G$, alors il existe un star-produit G -invariant sur M .*

Un autre point descendant naturellement des observations de la sous-section précédente est d'examiner ce qu'il advient du théorème 2.1.8 en le traduisant dans le contexte des star-produits G -invariants sur M . Pour cela, définissons d'abord la notion d'équivalence de star-produits sur M relativement à l'invariance sous l'action du groupe G .

Définition 2.1.11. Dans le cadre précédent, considérons deux star-produits $*_\nu$ et $*'_\nu$ sur M qui soient G -invariants et équivalents relativement à un opérateur linéaire T sur $\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$ de la forme (2.3). Si l'égalité

$$\varsigma_g^* \circ T_k = T_k \circ \varsigma_g^*$$

tient pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $g \in G$, alors les *star-produits* $*_\nu$ et $*'_\nu$ sont dits *G -équivalents*.

En adaptant les résultats de l'article [B+97] dans un cadre G -invariant, Bertelson, Bieliavsky et Gutt démontrèrent le résultat suivant.

Théorème 2.1.12. [B+98, ch.4, thm.4.1] *Dans le cadre de cette sous-section, les classes de G -équivalence de star-produits G -invariants sur la variété symplectique (M, ω) sont paramétrisées intrinsèquement par l'espace des séries formelles en le paramètre formel de déformation à coefficients dans le deuxième espace de cohomologie de De Rham G -invariante $H_{dR}^2(M)^G$.*

Le lecteur consultera l'article [B+98] pour plus de détails relativement à ce résultat qui nous sera bien utile dans la suite.

2.1.4 Introduction aux déformations non formelles

Nous proposons maintenant aux lecteurs de revenir plus spécifiquement sur les aspects ayant trait au point de vue formel inhérent au concept de star-produit tel qu'introduit à la sous-section 2.1.1. Comme formulé à la définition 2.1.1, ce

concept traduit une déformation formelle de l'algèbre commutative des fonctions lisses sur une variété symplectique (M, ω) que constitue l'espace de phase d'un système classique. Le terme *formel* est ici employé dans le sens où le star-produit de deux fonctions lisses sur M n'est *a priori* qu'une série formelle en un paramètre de déformation ν à coefficients dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$ ne sous-tendant donc aucune notion de convergence en ν . Toutefois, il arrive que cette écriture ne soit pas juste formelle mais définisse explicitement une fonction sur M dans un cadre fonctionnel adéquat. Nous parlerons alors de *quantification par déformation non formelle*.

Définition 2.1.13. Considérons (M, ω) une variété symplectique munie de sa mesure de Liouville $d\mu^\omega$ et du crochet de Poisson $\{-, -\}$ associé à la forme symplectique ω . Une *quantification par déformation non formelle* sur M est la donnée d'une famille d'algèbres associatives $\{(\mathcal{A}_\hbar, *_\hbar)\}_\hbar$ relativement à un paramètre réel de déformation $\hbar$ telle que :

(i) l'ensemble $\mathcal{D}(M)$ des fonctions lisses à support compact sur M est contenu dans $\mathcal{A}_\hbar$;

(ii) pour tout $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $f *_\hbar g$ admet une expression explicite de la forme

$$x \in M \longmapsto (f *_\hbar g)(x) = \int_{M \times M} K_\hbar(x, y, z) f(y) g(z) d\mu^\omega(y) d\mu^\omega(z)$$

où $K_\hbar \in \mathcal{C}^\infty(M \times M \times M)$;

(iii) pour chaque $x \in M$, si $f, g \in \mathcal{D}(M)$ sont deux fonctions à support dans un voisinage suffisamment petit du point $x \in M$, alors le produit de f et g par $*_\hbar$ admet un développement asymptotique en $\hbar$ de la forme

$$(f *_\hbar g)(x) \sim f(x)g(x) + \frac{\hbar}{2i} C_1(f, g) + o(\hbar^2)$$

où $C_1(f, g)$ vérifie la relation $C_1(f, g) - C_1(g, f) = 2\{f, g\}$.

Remarquons que la forme intégrale du produit $*_\hbar$ donnée au point (ii) de la définition 2.1.13 se motive tout naturellement à travers le théorème du noyau de Schwartz ; [DK10, ch.15]. Dans la lignée de cette définition, nous utiliserons dans la suite le terme *quantification par déformation à la fois formelle et non formelle* pour désigner un star-produit sur une variété symplectique (M, ω) admettant une notion de convergence sur un espace fonctionnel intéressant (dans le sens où le star-produit de deux fonctions n'est plus seulement une série formelle mais également une fonction) à laquelle nous pouvons associer une quantification par déformation non formelle. Dans ce cas, le paramètre de déformation ν associé à une telle quantification consistera en un multiple d'un paramètre réel de déformation $\hbar$. Notons

enfin que l'invariance d'une telle quantification par déformation sous l'action d'un groupe de Lie agissant par symplectomorphismes sur (M, ω) est définie de façon semblable au cas purement formel.

Avant de donner un exemple concret de quantification par déformation non formelle, nous jugeons bon de nous attarder un tout petit peu sur la littérature existant autour de cette dernière définition. L'approche non formelle à la quantification par déformation fut initiée en 1989 par Rieffel dans l'article [Ri89]. Dans celui-ci, Rieffel introduisit une notion de *quantification par déformation* non formelle dite *stricte* en requérant une structure additionnelle sur les algèbres associatives considérées. Plus précisément, le cadre utilisé dans cette formulation est celui des C^* -algèbres, c'est-à-dire des algèbres de Banach munies d'une involution et de relations de compatibilité entre ces structures. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur ces algèbres pourra notamment consulter l'ouvrage [Di64]. L'intérêt de ce cadre peut notamment se voir dans son adaptation à regrouper à la fois :

- (i) l'algèbre des fonctions continues sur un espace topologique compact séparé dans le cas d'une C^* -algèbre commutative munie d'une unité,
- (ii) l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert,

ce qui n'est pas pour nous déplaire dans le contexte de la quantification de systèmes classiques tel qu'exposé dans notre introduction ; [Di64, ch.1, § 4 & ch.2, § 6]. Quatre années plus tard, Rieffel publia le célèbre mémoire [Ri93] dans lequel il montra qu'une quantification par déformation stricte sur $\mathbb{R}^{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ associée au star-produit de Moyal pouvait être utilisée afin de construire une théorie de quantification par déformation stricte de C^* -algèbres admettant une action de $\mathbb{R}^{2n}$. Ce type de quantification porte aujourd'hui le nom de *formule de déformation universelle*. Plus récemment, des résultats similaires furent obtenus dans le cas où l'action du groupe abélien $\mathbb{R}^{2n}$ est remplacée par une action du supergroupe de Heisenberg (dans les articles [B+12] et [dG14]) ou de n'importe quel groupe de Lie kählerien à courbure négative (dans le document [BG14]). Signalons enfin l'existence de développements relatifs à l'adaptation du concept de quantification par déformation non formelle sur les variétés complexes ; [O+00], [d+14].

Si les notions et résultats évoqués ci-dessous ne nous laissent pas insensibles, nous n'entrerons toutefois pas davantage dans les détails les concernant, ceci n'étant pas le but de notre thèse. Comme nous l'expliquerons de façon plus précise à la section suivante, si notre objectif sera d'obtenir des quantifications par déformations à la fois formelle et non formelle, c'est avant tout d'un point de vue formel que

nous travaillerons, point de vue sur lequel nous avons le plus de maîtrise et de connaissances. Les aspects généraux touchant aux quantifications par déformations strictes au sens de Rieffel ou aux formules de déformation universelle sont, quant à eux, mentionnés afin de donner une perspective d'avenir au lecteur resituant une partie de ce travail au sein des nombreuses étapes menant vers une meilleure compréhension de la théorie des quantifications par déformations non formelles initiée il y a 25 ans et encore en plein développement de nos jours.

Il est maintenant temps d'exhiber explicitement un exemple de quantification par déformation non formelle. Considérons n un nombre naturel non nul et $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$. Notons que la mesure de Liouville $d\mu^\omega$ sur la variété symplectique $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ correspond alors à la mesure de Lebesgue dL sur $\mathbb{R}^{2n}$. Relativement à un paramètre de déformation réel $\hbar$, pour chaque $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $x \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que cela fasse sens, définissons

$$(f *_{\hbar}^W g)(x) := \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{2n} \int_{M \times M} e^{\frac{2i}{\hbar} S_0(x, y, z)} f(y) g(z) dL(y) dL(z)$$

$$\text{où } S_0(x, y, z) := \omega(x, y) + \omega(y, z) + \omega(z, x).$$

Cette formule fut initialement introduite par von Neumann en 1931 ; [Vo31]. Elle possède la merveilleuse propriété d'être stable dans l'espace des *fonctions de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \subset C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, c'est-à-dire l'espace des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^{2n}$ étant à décroissance rapide et telles que toutes leurs dérivées soient également à décroissance rapide ; [Ha84]. En d'autres termes, l'ensemble des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ muni du produit $*_{\hbar}^W$ constitue une algèbre associative. Dans ce contexte, le star-produit de Moyal $*_{\frac{\hbar}{2i}}^0$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ peut alors être défini comme un développement asymptotique formel en le paramètre de déformation $\hbar$ du produit $*_{\hbar}^W$. Sachant ce fait, il devient alors clair au regard de la définition 2.1.13 que le star-produit de Moyal $*_{\frac{\hbar}{2i}}^0$ constitue un exemple de quantification par déformation à la fois formelle et non formelle sur $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ à laquelle est associée l'expression non formelle $*_{\hbar}^W$. Ce célèbre résultat jouera un rôle fondamental dans notre démarche par la suite.

Définition 2.1.14. Dans le cadre susmentionné, la famille d'algèbres associatives définie sur l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ au moyen du produit $*_{\hbar}^W$ est appelé *quantification par déformation non formelle de Weyl*.

Remarque 2.1.15. Cette définition de la quantification par déformation non formelle de Weyl est généralisable en l'état en remplaçant ω par une forme sym-

plectique constante quelconque sur $\mathbb{R}^{2n}$. Dans ce texte, les *quantifications par déformations non formelles* ainsi obtenues seront également dites *de Weyl*.

Pour terminer, signalons que cette formule de quantification par déformation non formelle possède bien d'autres propriétés. Elle constitue notamment la pierre angulaire du travail de Rieffel sur la quantification par déformation stricte et les formules de déformation universelle ; [Ri89], [Ri93].

2.2 Objectif principal de la thèse

Après cette première section consacrée à la quantification par déformation d'un point de vue théorique, nous avons maintenant acquis suffisamment d'outils afin de mettre les choses à plat en clarifiant l'objectif principal de notre thèse de même que la méthode et les conventions que nous utiliserons pour y parvenir. C'est ce que nous proposons au lecteur de faire dans cette mini section de transition.

POUR CHAQUE NATUREL NON NUL n , LE BUT PREMIER DE NOTRE THÈSE EST DE DÉCRIRE EXPLICITEMENT L'ENSEMBLE DE TOUTES LES QUANTIFICATIONS PAR DÉFORMATIONS À LA FOIS FORMELLES ET NON FORMELLES SUR LA BOULE UNITÉ DE $\mathbb{C}^n$ QUI SOIENT INVARIANTES SOUS L'ACTION DE TOUT LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE CE DOMAINE BORNÉ SYMÉTRIQUE.

Il est important de souligner que ce travail fut réalisé en 2009 dans le cas du disque de Poincaré, c'est-à-dire pour $n = 1$, dans l'article [B+09] de Bieliavsky, Detournay et Spindel. Dans la suite, tel que spécifié dans notre introduction, nous allons exposer une approche relativement semblable à celle proposée par ces auteurs, toute la difficulté de cette généralisation venant bien entendu du fait que le naturel n soit cette fois strictement plus grand que l'unité. Dans notre texte, nous expliciterons les raisonnements et calculs menant à cet objectif, tout en imposant certaines restrictions visant à faciliter la mise en œuvre de ce projet. Nous exploiterons bien évidemment tous les résultats géométriques mis à notre disposition au travers du premier chapitre de ce texte à la fois pour dicter et interpréter la marche à suivre dans notre raisonnement. Tout l'intérêt de ce travail sera donc double : d'une part, d'un point de vue de l'obtention d'une quantification par déformation explicite de cette classe de domaines bornés homogènes, et d'autre part, d'un point de vue de l'information que nous pouvons retirer de l'interaction entre la géométrie de ces espaces et ce processus de quantification que nous présentons.

2.2.1 Conventions géométriques du chapitre

Afin de faciliter l'écriture du texte à venir, rapellons ici une fois pour toutes quelques notations relatives à la géométrie des espaces que nous souhaitons quantifier qui interviendront tout au long de ce second chapitre. Nous insistons sur le fait que nous utiliserons ici intensivement les acquis du premier chapitre.

Dans l'entièreté du texte à suivre, n désignera donc un nombre naturel non nul et $\mathbb{D}$ dénotera le domaine borné symétrique que définit la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Comme déjà mentionné dans le chapitre précédent, les calculs seront toujours effectués dans le cas $n > 1$ en référant occasionnellement au cas dit limite $n = 1$. Nous noterons G le groupe de Lie $SU(1, n)$ correspondant au groupe des automorphismes de $\mathbb{D}$ via l'action τ définie en (1.21). Le groupe d'Iwasawa de G sera noté $\mathbb{S}$. Par proposition 1.5.10, ce dernier est difféomorphe en tant que variété lisse à $\mathbb{D}$ par l'application qui à $s \in \mathbb{S}$ associe $\tau_s(0) \in \mathbb{D}$. Ceci nous permet de considérer le transport de la structure d'espace hermitien symétrique de type non compact de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{S}$. Rappelons ici que cette structure peut être définie relativement à un paramètre réel strictement positif souvent noté k apparaissant comme multiple de la métrique riemannienne et de la forme symplectique sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$ et étant lié à la courbure considéré sur la boule unité. L'action de G sur $\mathbb{D}$ se transporte pour sa part également de façon G -équivariante en l'action L de G sur $\mathbb{S}$ définie en (1.37). Ainsi, dans la suite, en pratique, nous travaillerons toujours sur le groupe de Lie $\mathbb{S}$. Comme détaillé lors de la section 1.5, celui-ci sera systématiquement considéré comme étant muni de ses coordonnées d'Iwasawa $(a, v = (v_1^1, \dots, v_{n-1}^1, v_1^i, \dots, v_{n-1}^i), z) \in \mathbb{R}^{2n}$ issues de la carte globale $(\mathbb{S}, \varphi^{-1})$ telle que donnée à la définition 1.5.5.

2.2.2 Star-produit de Moyal sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$

Introduisons maintenant une arme bien utile que nous allons utiliser dans notre chasse aux quantifications par déformations G -invariantes sur la boule unité $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$. Fixons $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Le premier fait géométrique fondamental intervenant dans notre travail est contenu dans la proposition 1.6.9(b). Par cette dernière, nous savons que la carte globale $(\mathbb{S}, \varphi^{-1})$ donnée à la définition 1.5.5 sur $\mathbb{S}$ est de Darboux relativement à la forme symplectique invariante à gauche $k\omega^{\mathbb{S}} \in \Omega^2(\mathbb{S})$ définie via (1.38). L'immense intérêt de ce résultat est de nous permettre d'identifier

ensemble des variétés symplectiques

$$\left(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_k := k(n+1) \left(da \wedge dz + \sum_{l=1}^n dv_l^i \wedge dv_l^1 \right) \right) \quad \text{et} \quad (\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$$

par l'application φ , et, de là, de définir un star-produit $*_{\nu}^0$ sur $\mathbb{S}$ à partir du star-produit de Moyal sur $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_k)$.

Afin d'expliciter celui-ci dans les coordonnées d'Iwasawa de $\mathbb{S}$, nous utiliserons les notations introduisant la définition 2.1.3, où les composantes des multi-indices intervenant seront cette fois notées comme éléments de l'ensemble $\mathcal{I}$ des indices associés aux coordonnées d'Iwasawa plutôt que par des entiers entre 1 et $2n$. Pour tout $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})$, nous obtenons alors

$$f *_{\nu}^0 g := fg + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\nu^p}{p!} \sum_{I, J \in \mathcal{I}^p} (\Omega_k)^{IJ} \partial_I(f) \partial_J(g),$$

où $((\Omega_k)^{ij})_{i,j}$ désigne la matrice carrée d'ordre $2n$ anti-symétrique satisfaisant

$$(\Omega_k)^{az} = \frac{1}{k(n+1)}, \quad (\Omega_k)^{v_l^1 v_{l'}^1} = 0 = (\Omega_k)^{v_l^i v_{l'}^i} \quad \text{et} \quad (\Omega_k)^{v_l^1 v_{l'}^i} = \frac{-\delta_{l,l'}}{k(n+1)}$$

quels que soient $1 \leq l \leq n-1$ et $1 \leq l' \leq n-1$. Comme explicité au travers de l'expression (2.2) et à la remarque 1.6.7, cette matrice définit le crochet de Poisson $\{-, -\}$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S}) \simeq \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ associé à la forme symplectique $k\omega^{\mathbb{S}} \simeq \Omega_k$. Définissons maintenant la bijection sur l'ensemble des indices

$$j : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I} : \begin{cases} a \mapsto z \\ v_l^1 \mapsto v_l^i \text{ pour } 1 \leq l \leq n-1 \\ v_l^i \mapsto v_l^1 \text{ pour } 1 \leq l \leq n-1 \\ z \mapsto a \end{cases}$$

et considérons son extension à l'ensemble des multi-indices

$$j : \{\mathcal{I}^p : p \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathcal{I}^p : p \in \mathbb{N}\}$$

définie en appliquant la bijection j à chaque composante du multi-indice. Enfin, pour chaque entier $p > 0$, posons

$$\mathcal{I}_+^p := \{I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}^p \text{ tel que } |\{l : i_l \in \{v_1^1, \dots, v_{n-1}^1, z\}\}| \text{ soit pair}\}$$

et notons $\mathcal{I}_-^p$ le complémentaire de $\mathcal{I}_+^p$ dans $\mathcal{I}^p$. Ainsi, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$, quelques calculs nous livrent la forme simplifiée

$$\begin{aligned} f *_{\nu}^0 g &= fg + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\nu^p}{p!} \sum_{I \in \mathcal{I}^p} (\Omega_k)^{I_{j(I)}} \partial_I(f) \partial_{j(I)}(g) \\ &= fg + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p!} \right) \left(\frac{\nu}{k(n+1)} \right)^p C_p^0(f, g) \\ &\text{où } C_p^0(f, g) := \sum_{I \in \mathcal{I}_+^p} \partial_I(f) \partial_{j(I)}(g) - \sum_{I \in \mathcal{I}_-^p} \partial_I(f) \partial_{j(I)}(g). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Définition 2.2.1. Le star-produit $*_{\nu}^0$ défini sur $\mathbb{S}$ par l'expression (2.5) sera logiquement appelé *star-produit de Moyal sur $\mathbb{S}$* .

Remarque 2.2.2. Parallèlement aux considérations de la sous-section 2.1.4, et plus particulièrement relativement à la remarque 2.1.15, il n'est pas difficile de voir que le star-produit de Moyal sur $\mathbb{S}$ peut être obtenu comme développement asymptotique de la formule définissant le produit dans la quantification par déformation non formelle de Weyl sur $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}}) \simeq (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_k)$ pour $2i\nu = \hbar \in \mathbb{R}$.

Via la remarque suivante, la forme simplifiée obtenue pour $*_{\nu}^0$ nous permet de calculer aisément le $*_{\nu}^0$ -commutateur de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$.

Remarque 2.2.3.

- (i) Pour tout entier $p > 0$ qui soit impair, la restriction de l'application j au sous-ensemble $\mathcal{I}_+^p$ (resp. $\mathcal{I}_-^p$) définit une bijection ensembliste involutive de $\mathcal{I}_+^p$ (resp. $\mathcal{I}_-^p$) sur $\mathcal{I}_-^p$ (resp. sur $\mathcal{I}_+^p$).
- (ii) Pour tout entier $p > 0$ qui soit pair, la restriction de l'application j au sous-ensemble $\mathcal{I}_+^p$ (resp. $\mathcal{I}_-^p$) définit une bijection ensembliste involutive de $\mathcal{I}_+^p$ (resp. $\mathcal{I}_-^p$) sur lui-même.

Considérons deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$. Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il suit alors de ces deux points l'égalité

$$C_p^0(f, g) - C_p^0(g, f) = \begin{cases} 2C_p^0(f, g) & \text{si } p \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par conséquent, le $*_{\nu}^0$ -commutateur des fonctions f et g vérifie l'égalité

$$\frac{1}{2\nu} [f, g]_{*_{\nu}^0} = \{f, g\} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\nu^{2p}}{(2p+1)!} \left(\frac{1}{k(n+1)} \right)^{2p+1} C_{2p+1}^0(f, g). \quad (2.6)$$

En outre, la remarque 2.2.3 nous permet une nouvelle fois de simplifier légèrement cette dernière forme étant donné que, pour tout naturel p impair, nous avons

$$C_p^0(f, g) = \sum_{I \in \mathcal{I}_+^p} [\partial_I(f) \partial_{j(I)}(g) - \partial_{j(I)}(f) \partial_I(g)] .$$

2.2.3 Existence, équivalence & reformulation

Attaquons-nous maintenant à deux points de réflexions théoriques portant sur l'objectif principal de notre thèse tel qu'exposé plus haut dans cette section. La connaissance du star-produit de Moyal sur $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$ va notamment nous permettre d'écrire une reformulation de cet objectif. Nous reprenons ici les notations de la sous-section précédente. La première remarque que nous souhaitons faire est de souligner, au moins au niveau formel, que l'ensemble des quantifications par déformations G -invariantes sur boule unité de $\mathbb{C}^n$ n'est pas vide. En effet, comme $\mathbb{D}$ est muni d'une structure d'espace hermitien symétrique sur lequel G agit par automorphismes via l'action τ , les équivalences entre les définitions d'une variété kählérienne exposées à la sous-section 1.2.1 couplées aux inclusions (1.8) nous permettent d'appliquer la proposition 2.1.10 et d'en tirer instantanément le lemme suivant.

Lemme 2.2.4. *Il existe un star-produit G -invariant sur $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$.*

Par ailleurs, étant donné que le deuxième groupe de cohomologie de De Rham de $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est trivial en vertu du lemme de Poincaré, le théorème 2.1.8 nous livre le résultat suivant.

Lemme 2.2.5. *Tous les star-produits sur $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$ sont équivalents.*

En particulier, tous les star-produits G -invariants sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ sont équivalents au star-produit de Moyal $*_\nu^0$ introduit à la sous-section 2.2.2. En conséquence, nous obtenons la reformulation suivante de notre objectif.

Reformulation 1. LA DÉTERMINATION EXPLICITE DE TOUTES LES QUANTIFICATIONS PAR DÉFORMATIONS À LA FOIS FORMELLES ET NON FORMELLES G -INVARIANTES SUR $\mathbb{D}$ REVIENT À LA DÉTERMINATION EXPLICITE DE TOUS LES OPÉRATEURS $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$ TELS QUE $T(*_\nu^0)$ SOIT UN STAR-PRODUIT G -INVARIANT SUR $\mathbb{S}$ ADMETTANT UNE EXPRESSION NON FORMELLE.

Remarque 2.2.6. Comme l'indique très bien cette nouvelle formulation de l'énoncé de départ, dans la suite du chapitre, notre travail se basera sur une approche essentiellement formelle. Malgré que l'objectif soit d'obtenir des quantifications par déformations admettant une forme non formelle, cet aspect sera mis partiellement de côté et nécessitera en réalité une vérification *a posteriori*. Toutefois, comme nous l'avons vu dans la sous-section 2.1.4 et comme il est explicité à la remarque 2.2.2, le star-produit de Moyal duquel nous partons admet une forme non formelle explicite issue de la quantification par déformation non formelle de Weyl. Il restera donc à vérifier que les entrelacements intervenant admettent à chaque fois une expression permettant une explicitation non formelle des star-produits G -invariants déterminés. Dans ce contexte, le paramètre de déformation ν considéré dans la suite du texte sera de la forme $\frac{\hbar}{2i}$ où $\hbar$ est un paramètre réel de déformation.

2.3 Vers une application moment quantique

Dans cette première section dédiée à la résolution explicite du problème principal de notre thèse nous allons tout d'abord revenir brièvement sur la théorie des star-produits en traitant de la notion de dérivation de l'algèbre associative qu'une telle quantification par déformation formelle définit. Nous nous attaquerons ensuite réellement à notre problème en abordant une reformulation de celui-ci au moyen du star-produit de Moyal. Celle-ci nous mènera à considérer d'un point de vue théorique et pratique les notions de covariance d'un star-produit et d'application moment quantique dans un esprit partiellement basé sur les articles [A+83] et [Xu98]. Pour rappel, nous utiliserons ici et dans la suite les conventions de notations exposées à la section 2.2.

2.3.1 Dérivations d'un star-produit

Basée en partie sur les références [Gu11, ch.4] et [Xu98, app.A], cette sous-section essentiellement théorique vise à apporter un complément très spécifique à nos connaissances sur les quantifications par déformations formelles introduites dans la première section du chapitre. Notre exposé est essentiellement orienté dans la direction des résultats nécessaires dans la suite du texte.

Définition 2.3.1. Considérons $*_\nu$ un star-produit sur une variété symplectique (M, ω) . Une *dérivation du star-produit* $*_\nu$ est un opérateur linéaire D sur $\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$ de la forme

$$D = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu^k D_k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, D_k est un opérateur 1-différentiel $\mathbb{C} \llbracket \nu \rrbracket$ -linéaire, et tel que la relation

$$D(f_\nu *_\nu g_\nu) = D(f_\nu) *_\nu g_\nu + f_\nu *_\nu D(g_\nu)$$

soit satisfaite pour tout $f_\nu, g_\nu \in \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$.

Dans le cadre de cette définition, notons que les *dérivations* dites *du star-produit* $*_\nu$ sont en fait simplement des dérivations de l'algèbre associative $(\mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket, *_\nu)$. Nous noterons de façon concise $\text{Der}(*_\nu)$ l'ensemble des dérivations du star-produit $*_\nu$ lorsque qu'aucune confusion n'est possible sur l'identité de la variété symplectique sur laquelle le star-produit est défini.

Remarque 2.3.2. Soit $*_\nu$ un star-produit sur une variété symplectique (M, ω) . Nous remarquons alors sans peine à partir de la définition 2.1.1 le fait suivant. Pour tout $f_\nu \in \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$, l'opérateur linéaire

$$\frac{1}{2\nu} [f_\nu, -]_{*_\nu} : \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket : g_\nu \mapsto \frac{1}{2\nu} [f_\nu, g_\nu]_{*_\nu}$$

définit une dérivation du star-produit $*_\nu$. Une *dérivation* $D \in \text{Der}(*_\nu)$ de cette forme sera dite *interne*.

Exposons maintenant deux petites propriétés qui nous seront bien utiles et dont jouissent les dérivations d'un star-produit sur une variété symplectique.

Lemme 2.3.3. Soit $*_\nu$ un star-produit sur une variété symplectique (M, ω) .

(a) Si D et D' sont deux dérivations (resp. dérivations internes) du star-produit $*_\nu$, alors le commutateur

$$[D, D'] := D \circ D' - D' \circ D$$

est une dérivation (resp. dérivation interne) de $*_\nu$. En particulier, pour tout $f_\nu, g_\nu \in \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$, nous avons

$$\left[\frac{1}{2\nu} [f_\nu, -]_{*_\nu}, \frac{1}{2\nu} [g_\nu, -]_{*_\nu} \right] = \frac{1}{2\nu} \left[\frac{1}{2\nu} [f_\nu, g_\nu]_{*_\nu}, - \right]_{*_\nu}.$$

(b) Considérons $*'_\nu$, un autre star-produit sur M ainsi que l'opérateur linéaire $T \in \text{Op}(*_\nu)$ tel que $*'_\nu = T(*_\nu)$. Alors, pour tout $D \in \text{Der}(*_\nu)$, nous avons

$$T \circ D \circ T^{-1} \in \text{Der}(*'_\nu).$$

De plus, dans le cas des dérivations internes, pour tout $f_\nu \in \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$, nous avons l'égalité

$$T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [f_\nu, -]_{*_\nu} \right) \circ T^{-1} = \frac{1}{2\nu} [T(f_\nu), -]_{*'_\nu}.$$

Le résultat du premier point de ce lemme est standard. Sa preuve est purement un exercice algébrique calculatoire que nous laissons à l'appréciation du lecteur. Nous démontrons ici le second point, dont la preuve est tout aussi aisée mais davantage impliquée dans le contexte des star-produits.

Démonstration. Soient $f_\nu, g_\nu, h_\nu \in \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$. Posons $D_T := T \circ D \circ T^{-1}$. Alors, il suit des définitions 2.1.6 et 2.3.1 les égalités

$$\begin{aligned} D_T(g_\nu *_'_\nu h_\nu) &= T[D(T^{-1}(g_\nu) *_\nu T^{-1}(h_\nu))] \\ &= T[D(T^{-1}(g_\nu)) *_\nu T^{-1}(h_\nu) + T^{-1}(g_\nu) *_\nu D(T^{-1}(h_\nu))] \\ &= T[(T^{-1} \circ T \circ D \circ T^{-1})(g_\nu) *_\nu T^{-1}(h_\nu) \\ &\quad + T^{-1}(g_\nu) *_\nu (T^{-1} \circ T \circ D \circ T^{-1})(h_\nu)] \\ &= D_T(g_\nu) *_'_\nu h_\nu + g_\nu *_'_\nu D_T(h_\nu). \end{aligned}$$

Ceci, couplé à ces mêmes définitions 2.1.6 et 2.3.1, nous indique bien que $D_T \in \text{Der}(*'_\nu)$. Par ailleurs, la définition du commutateur relativement à $*_\nu$ et $*'_\nu$ ainsi que la $\mathbb{C} \llbracket \nu \rrbracket$ -linéarité de l'opérateur T nous livre

$$\begin{aligned} \left[T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [f_\nu, -]_{*_\nu} \right) \circ T^{-1} \right](g_\nu) &= T \left(\frac{1}{2\nu} [T^{-1}(T(f_\nu)), T^{-1}(g_\nu)]_{*_\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2\nu} [T(f_\nu), g_\nu]_{*'_\nu} \end{aligned}$$

La preuve est ainsi complète. ■

Un autre résultat particulièrement important se retrouve dans la proposition qui suit. Le rôle que celle-ci jouera dans la suite de cette section n'est pas anodin.

Proposition 2.3.4. [Xu98, ch.8, thm.8.2] *Considérons une variété symplectique (M, ω) pour laquelle le premier groupe de cohomologie de De Rham $H_{dR}^1(M)$ est trivial. Alors, toute dérivation d'un star-produit quelconque sur M est nécessairement interne.*

2.3.2 Introduction pratique aux moments quantiques

Pour un entier $k > 0$ fixé, travaillons maintenant explicitement avec la boule unité de $\mathbb{C}^n$ vue comme la variété symplectique $(\mathbb{S}, k\omega^{\mathbb{S}})$ munie de la structure de variété de Poisson $\{-, -\}$ associée à $k\omega^{\mathbb{S}} \in \Omega^2(\mathbb{S})$. Pour rappel, la forme symplectique $k\omega^{\mathbb{S}}$ est définie via l'expression (1.38) et invariante à gauche sur $\mathbb{S}$. Comme d'habitude, nous noterons $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{s}$) l'algèbre de Lie de G (resp. de $\mathbb{S}$). Considérons $*_{\nu}^0$ le star-produit de Moyal sur $\mathbb{S}$ et $T \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ un opérateur linéaire tel que

$$\sharp_{\nu} := T(*_{\nu}^0)$$

soit un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$ relativement à l'action L définie en (1.37).

Remarque 2.3.5. Le groupe de Lie G étant connexe, la condition de G -invariance du star-produit $\sharp_{\nu}$ donnée par l'expression (2.4) est équivalente à sa version infinitésimale. Cette dernière se formule à travers l'inclusion

$$\{X^* : X \in \mathfrak{g}\} \subset \text{Der}(\sharp_{\nu}) \quad (2.7)$$

où les champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathbb{S}$ relativement à l'action du groupe G sont considérés comme étant étendus $\mathbb{C}[[\nu]]$ -linéairement à $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]]$. Ceux-ci constituent donc à la fois des dérivations du star-produit $\sharp_{\nu}$ et des dérivations de l'algèbre $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})$ pour le produit commutatif des fonctions sur $\mathbb{S}$.

En vertu de la proposition 2.3.3 (b) et de la remarque précédente, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous obtenons donc la relation

$$T^{-1} \circ X^* \circ T \in \text{Der}(*_{\nu}^0).$$

En outre, comme

$$H_{dR}^1(\mathbb{S}) \simeq H_{dR}^1(\mathbb{R}^{2n}) = 0$$

par le lemme de Poincaré, la proposition 2.3.4 nous permet de choisir, pour chaque $X \in \mathfrak{g}$, une série formelle $\lambda_{\nu}(X) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]]$ telle que

$$\frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}(X), -]_{*_{\nu}^0} = T^{-1} \circ X^* \circ T. \quad (2.8)$$

La proposition suivante possède le mérite de spécifier cette information.

Proposition 2.3.6. *Dans le contexte ayant été exposé ci-dessus, il existe une unique application linéaire*

$$\lambda_{\nu} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]] : X \mapsto \lambda_{\nu}(X)$$

satisfaisant à la relation (2.8) et à l'égalité

$$\lambda_\nu([X, Y]) = \frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu(X), \lambda_\nu(Y)]_{*\nu^0} \quad (2.9)$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. De plus, si $X \in \mathfrak{g}$, pour tout $f_\nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$ vérifiant la relation $\frac{1}{2\nu} [f_\nu, -]_{*\nu^0} = T^{-1} \circ X^* \circ T$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}[[\nu]]$ tel que $\lambda_\nu(X) = f_\nu + \alpha$.

Démonstration. Pour $X \in \mathfrak{g}$, si f_ν et g_ν sont deux séries formelles de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$ satisfaisant

$$\frac{1}{2\nu} [f_\nu, -]_{*\nu^0} = T^{-1} \circ X^* \circ T = \frac{1}{2\nu} [g_\nu, -]_{*\nu^0},$$

il s'ensuit $[f_\nu - g_\nu, -]_{*\nu^0} = 0$. Il est alors aisé de vérifier à partir de l'expression (2.6) que $f_\nu - g_\nu$ est nécessairement constante et satisfait $f_\nu - g_\nu \in \mathbb{C}[[\nu]]$. L'assertion complémentaire relative à la proposition susmentionnée est par conséquent démontrée. Attaquons-nous maintenant à l'affirmation principale. L'existence d'une application linéaire

$$\lambda_\nu^0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]] : X \mapsto \lambda_\nu(X)$$

satisfaisant la relation

$$\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), -]_{*\nu^0} = T^{-1} \circ X^* \circ T$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ découle directement de la proposition 2.3.4 et de la linéarité de cette relation en $X \in \mathfrak{g}$. Fixons une telle application λ_ν^0 . Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, étant donné que $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$, nous déduisons de la proposition 2.3.3 (a) l'égalité

$$\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0([X, Y]), -]_{*\nu^0} = \frac{1}{2\nu} \left[\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), \lambda_\nu^0(Y)]_{*\nu^0}, - \right]_{*\nu^0}. \quad (2.10)$$

Posons alors

$$c_2 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]] : (X, Y) \mapsto \lambda_\nu^0([X, Y]) - \frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), \lambda_\nu^0(Y)]_{*\nu^0}.$$

La linéarité de λ_ν^0 conclut clairement à l'anti-symétrie de l'application c_2 en ses arguments. Par ailleurs, au vu de l'expression (2.10), la première partie de notre preuve nous indique l'inclusion $\text{im}(c_2) \subset \mathbb{C}[[\nu]]$. Enfin, nous constatons sans peine que c_2 vérifie

$$c_2([X, Y], Z) + c_2([Y, Z], X) + c_2([Z, X], Y) = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. En ce sens, l'application c_2 se révèle être un 2-cocycle de Chevalley-Eilenberg. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, une application du

bien célèbre lemme de Whitehead nous mène alors à l'existence d'une application linéaire $c'_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}[[\nu]]$ telle que

$$c_2(X, Y) = c'_1([X, Y])$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Définissons alors l'application

$$\lambda_\nu := \lambda_\nu^0 - c'_1.$$

La linéarité de λ_ν^0 et de c'_1 implique celle de λ_ν et des arguments semblables à ceux de la première partie de notre démonstration permettent d'en déduire que λ_ν satisfait également aux relations (2.8) et (2.9) pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. La preuve de l'existence de l'application annoncée est ainsi complète. Pour terminer, montrons l'unicité de cette application. Supposons pour cela l'existence de deux applications $\lambda_\nu^1, \lambda_\nu^2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$ linéaires et satisfaisant toutes deux les hypothèses formulées dans l'énoncé relativement aux relations (2.8) et (2.9). Considérons

$$c_1 := \lambda_\nu^1 - \lambda_\nu^2$$

la différence de ces deux applications. De nouveau, la première partie de la preuve nous livre alors $\text{im}(c_1) \subset \mathbb{C}[[\nu]]$. De plus, la définition des applications λ_ν^1 et λ_ν^2 ainsi que l'usage des égalités (2.8) et (2.9) nous permet d'en déduire

$$\begin{aligned} c_1([X, Y]) &= \frac{1}{2\nu} \left([\lambda_\nu^1(X), \lambda_\nu^1(Y)]_{*_{\nu}^0} - [\lambda_\nu^2(X), \lambda_\nu^2(Y)]_{*_{\nu}^0} \right) \\ &= (T^{-1} \circ X^* \circ T)(\lambda_\nu^1(Y) - \lambda_\nu^2(Y)) \\ &= (T^{-1} \circ X^* \circ T)(c_1(Y)) \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Comme spécifié à la remarque 2.1.7, étant donné que $T \in \text{Op}(\star_\nu^0)$, nous avons

$$T|_{\mathbb{C}[[\nu]]} = \text{Id}_{\mathbb{C}[[\nu]]}.$$

Comme les dérivations associées aux champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathbb{S}$ relativement à l'action L s'annulent sur $\mathbb{C}[[\nu]]$, nous en concluons que l'application c_1 s'annule sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Or, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, il s'ensuit l'égalité $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ et par la même occasion, le résultat d'unicité attendu au regard de l'énoncé de la proposition s'en trouve démontré. ■

La preuve présentée ici est engagée dans le cadre de cette sous-section et de notre travail. Elle est partiellement inspirée de la référence [Xu98, ch.6] dans laquelle des résultats plus généraux sont abordés. Par un léger abus de vocabulaire relativement à cet article, nous choisissons d'introduire la définition suivante.

Définition 2.3.7. L'application λ_ν telle que définie à la proposition 2.3.6 est appelée *application moment quantique sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit de Moyal et à l'opérateur T* . L'application λ_ν étant spécifiée, pour $X \in \mathfrak{g}$, la série formelle $\lambda_\nu(X)$ sera plus simplement appelée *moment quantique associé à X* .

Remarque 2.3.8. Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur le fait que l'unicité de l'application λ_ν dépend au préalable du choix d'un tel opérateur $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$, et donc du choix d'un star-produit G -invariant. Ceci transparaît bien sûr clairement au travers de notre raisonnement et de la définition précédente.

Arrêtons-nous maintenant quelques instants sur la terminologie employée dans la définition 2.3.7, celle-ci pouvant nous sembler mystérieuse. Nous pouvons l'expliquer au regard de la sous-section 1.6.1. Reprenons le contexte exposé au début de la présente sous-section et considérons λ_ν l'application donnée par la proposition 2.3.6. Pour chaque $X \in \mathfrak{g}$, notons $\lambda_0(X) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ le terme d'ordre 0 en ν de la série formelle $\lambda_\nu(X) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$. L'application

$$\lambda_0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}) : X \mapsto \lambda_0(X)$$

est alors linéaire. En utilisant l'expression (2.6) et à la définition 2.1.6, nous remarquons sans peine que la lecture des relations (2.8) et (2.9) à l'ordre 0 en ν nous livre les égalités

$$\{\lambda_0(X), -\} = X^* \quad \text{et} \quad \{\lambda_0(X), \lambda_0(Y)\} = \lambda_0([X, Y])$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Or, nous savons par la proposition 1.6.10 que l'action L de G sur $\mathbb{S}$ est hamiltonienne relativement à l'application moment

$$\lambda^\mathbb{S} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}) : X \mapsto \lambda_X^\mathbb{S}$$

dont une expression explicite est fournie au lemme 1.6.11. Donc, en particulier, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous en tirons les égalités

$$\{\lambda_X^\mathbb{S}, -\} = X_{\lambda_X^\mathbb{S}} = X^* = \{\lambda_0(X), -\}.$$

Un usage de l'expression explicite du crochet de Lie $\{-, -\}$ donné à la remarque 1.6.7 nous indique alors

$$\lambda_0(X) = \lambda_X^\mathbb{S} + c(X)$$

pour une certaine fonction $c : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$. Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, par définition même de l'application moment $\lambda^\mathbb{S}$, nous obtenons alors

$$\lambda_{[X, Y]}^\mathbb{S} + c([X, Y]) = \lambda_0([X, Y]) = \{\lambda_0(X), \lambda_0(Y)\} = \{\lambda_X^\mathbb{S}, \lambda_Y^\mathbb{S}\} = \lambda_{[X, Y]}^\mathbb{S}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, la fonction c s'annule identiquement sur $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et donc $\lambda_0 = \lambda^\mathbb{S}$. Le lemme suivant reprend ce résultat.

Lemme 2.3.9. *Dans le cadre de la proposition 2.3.6, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le terme d'ordre 0 en ν de la série formelle $\lambda_\nu(X)$ correspond avec le moment $\lambda_X^\mathbb{S}$ tel que défini à la proposition 1.6.10.*

En particulier, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons donc

$$\lambda_\nu(X) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \lambda_X^\mathbb{S}.$$

En ce sens, le nom d'*application moment quantique* donné à l'application λ_ν est justifié de part le fait que celle-ci définit un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\lambda_\nu : (\mathfrak{g}, [-, -]) \rightarrow \left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}) \llbracket \nu \rrbracket, \frac{1}{2\nu} [-, -]_{*\nu} \right)$$

constituant une déformation quantique formelle de l'application moment associée à l'action hamiltonienne de G sur $\mathbb{S}$.

2.3.3 Invariance & application moment quantique

Adoptons maintenant un autre point de vue sur la situation décrite à la sous-section précédente. Les notations utilisées seront dans la continuité de cette dernière. Commençons par généraliser le concept d'application moment quantique tel que formulé à la définition 2.3.7.

Définition 2.3.10. Considérons (M, ω) une variété symplectique, $*_\nu$ un star-produit sur (M, ω) et H un groupe de Lie agissant différemmentiablement à gauche par symplectomorphismes sur (M, ω) . Notons $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et supposons que l'action de H sur (M, ω) soit hamiltonienne pour l'application moment $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$. Nous définissons alors $\text{MQ}(*_\nu)$ comme étant l'ensemble des applications linéaires

$$\Lambda_\nu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \llbracket \nu \rrbracket$$

telles que :

(i) pour tout $X, Y \in \mathfrak{h}$, la relation

$$\Lambda_\nu([X, Y]) = \frac{1}{2\nu} [\Lambda_\nu(X), \Lambda_\nu(Y)]_{*\nu}$$

soit satisfaite ;

(ii) pour tout $X \in \mathfrak{h}$, le terme d'ordre 0 en ν de $\Lambda_\nu(X)$ corresponde avec λ_X .

Une application $\Lambda_\nu \in \text{MQ}(*_\nu)$ sera appelée *application moment quantique sur M relativement au star-produit $*_\nu$* pour les mêmes raisons que celles justifiant une appellation semblable à l'issue de la définition 2.3.7. Dans le cas où $\lambda \in \text{MQ}(*_\nu)$, le star-produit $*_\nu$ est dit *H -covariant*.

Dans le cadre qui nous concerne, supposons $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$ être un opérateur linéaire tel qu'il existe $\lambda_\nu \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ satisfaisant (2.8) pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Alors, en utilisant successivement la proposition 2.3.3 (b) et la remarque 2.3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} X^\star &= T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu(X), -]_{*_\nu^0} \right) \circ T^{-1} \\ &= \frac{1}{2\nu} [T(\lambda_\nu(X)), -]_{T(*_\nu^0)} \in \text{Der}(T(*_\nu^0)) \end{aligned}$$

quel que soit $X \in \mathfrak{g}$. Ce dernier fait, couplé à la remarque 2.3.5, nous permet d'en déduire la G -invariance du star-produit $T(*_\nu^0)$. Par ailleurs, pour tout opérateur $T' \in \text{Op}(*_\nu^0)$ tel que le star-produit $T'(*_\nu^0)$ soit G -invariant, la proposition 2.3.6 et le lemme 2.3.9 nous livrent l'existence d'une unique application moment quantique $\lambda'_\nu \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ satisfaisant l'égalité (2.8) pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (où T et λ_ν sont respectivement remplacés par T' et λ'_ν). Ces considérations nous mènent dès lors à la proposition suivante.

Proposition 2.3.11. *Dans le contexte susmentionné, considérons un opérateur linéaire $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$. Alors, le star-produit $T(*_\nu^0)$ est G -invariant si et seulement s'il existe une application moment quantique $\lambda_\nu \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ vérifiant la relation (2.8) pour tout $X \in \mathfrak{g}$. De plus, si une telle application $\lambda_\nu \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ existe, elle est unique.*

Ce résultat nous permet de développer une méthode afin de déterminer l'ensemble des opérateurs linéaires $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$ tels que $T(*_\nu^0)$ soit un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$. Celle-ci peut se décrire au travers des points suivants.

- (i) Déterminer l'ensemble des applications moment quantique $\text{MQ}(*_\nu^0)$.
- (ii) Pour chaque $\lambda_\nu \in \text{MQ}(*_\nu^0)$, déterminer les opérateurs $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$ qui satisfont à la relation (2.8) pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

L'efficacité de cette méthode peut toutefois être mise en doute. Réfléchissons donc un instant à une stratégie dérivée qui serait plus efficace. Plutôt que de calculer et de travailler sur toutes les applications moment quantique, notre motivation est d'examiner la possibilité de restreindre l'ensemble $\text{MQ}(*_\nu^0)$ à un ou plusieurs

éléments à partir desquels la seconde étape nous livrerait l'entière des opérateurs $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$ tels que $T(*_\nu^0)$ soit un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$. À ces fins, choisissons un opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ tel que $T^0(*_\nu^0)$ soit un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$. Notons $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ l'application moment quantique sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit de Moyal et à l'opérateur T^0 issue de la proposition 2.3.6. Définissons

$$\begin{aligned} & \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0) \\ &:= \left\{ T \in \text{Op}(*_\nu^0) : T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), -]_{*_\nu^0} \right) \circ T^{-1} = X^* \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g} \right\}. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 2.3.11, l'ensemble des star-produits de la forme $T(*_\nu^0)$ pour $T \in \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ est inclus dans l'ensemble des star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$. Étant donné nos motivations dans ce paragraphe, il est légitime de s'interroger de façon plus précise sur cette inclusion. Pour cela, considérons $T \in \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$. L'opérateur

$$\mathcal{T} := T \circ (T^0)^{-1} \in \text{Op}(T^0(*_\nu^0))$$

définit alors une équivalence entre les star-produits G -invariants $T^0(*_\nu^0)$ et $T(*_\nu^0)$. De plus, par définition des opérateurs T^0 et T , pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$T^0 \circ T^{-1} \circ X^* \circ T \circ (T^0)^{-1} = T^0 \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), -]_{*_\nu^0} \right) \circ (T^0)^{-1} = X^*,$$

c'est-à-dire

$$X^* \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ X^*.$$

Cette dernière égalité n'est autre que la traduction infinitésimale de la condition de G -équivalence des star-produits $T^0(*_\nu^0)$ et $T(*_\nu^0)$ via l'opérateur linéaire $\mathcal{T}$.

Par ailleurs, pour tout star-produit $\sharp_\nu$ sur $\mathbb{S}$ qui soit G -invariant, s'il existe un opérateur $\mathcal{T}' \in \text{Op}(T^0(*_\nu^0))$ définissant une G -équivalence entre les star-produits $T^0(*_\nu^0)$ et $\sharp_\nu$, les mêmes raisonnements nous permettent d'en déduire que l'opérateur $T' := \mathcal{T}' \circ T^0$ appartient à $\text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$. Ces faits se condensent dans l'énoncé suivant.

Proposition 2.3.12. *Dans le cadre de cette sous-section, considérons $\sharp_\nu^0$ et $\sharp_\nu$ deux star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ ainsi qu'un opérateur linéaire $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ tel que $T^0(*_\nu^0) = \sharp_\nu^0$. Notons $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ l'application moment quantique sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit de Moyal $*_\nu^0$ et à l'opérateur T^0 . Alors, les star-produits $\sharp_\nu^0$ et $\sharp_\nu$ sont G -équivalents si et seulement si il existe $T \in \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ tel que $T(*_\nu^0) = \sharp_\nu$.*

Comme nous l'indique le théorème 2.1.12, les classes de G -équivalence de star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ sont paramétrisées par $H_{dR}^2(\mathbb{S})^G[[\nu]]$, c'est-à-dire l'espace des séries formelles en ν à coefficients dans le deuxième espace de cohomologie de De Rham G -invariante. La proposition précédente motive logiquement l'envie de jeter un œil sur cet espace.

Lemme 2.3.13. *Le deuxième espace de cohomologie de De Rham G -invariante $H_{dR}^2(\mathbb{S})^G$ est unidimensionnel.*

Démonstration. Commençons par observer qu'une 2-forme différentielle fermée G -invariante sur $\mathbb{S}$ qui est nécessairement $\mathbb{S}$ -invariante. Dès lors, la donnée d'une telle 2-forme différentielle peut se ramener à la donnée d'un 2-cocycle de Chevalley-Eilenberg défini sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$, c'est-à-dire à la donnée d'une application bilinéaire anti-symétrique $c_2 : \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$c_2([X, Y], Z) + c_2([Y, Z], X) + c_2([Z, X], Y) = 0 \quad (2.11)$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{s}$. Considérons c_2 comme étant un tel 2-cocycle et travaillons dans les notations de la sous-section 1.5.1. Nous vérifions sans peine que la condition (2.11) est équivalente à imposer

$$c_2(E, v) = 0 \quad \text{et} \quad 2c_2(v, v') = \Omega(v, v') c_2(H, E) \quad (2.12)$$

pour tout $v, v' \in V$. Par ailleurs, en adaptant les arguments de la sous-section 1.2.2 menant à la proposition 1.2.6, nous observons que la condition de G -invariance des 2-formes différentielles considérées conduit, au niveau infinitésimal, à la relation

$$c_2([X, Y]_{\mathfrak{s}}, Z) + c_2(Y, [X, Z]_{\mathfrak{s}}) = 0$$

quel que soient $X \in \mathfrak{k}$ et $Y, Z \in \mathfrak{s}$, la notation $[-]_{\mathfrak{s}}$ étant définie via l'expression (1.35). Pour chaque $v \in V$, nous constatons alors que cette dernière relation nous livre l'égalité $c_2(H, v) = 0$. Le lecteur pourra vérifier ce fait au moyen de l'appendice A en remplaçant respectivement X, Y et Z par $v - \bar{v}^t$, E et H pour $v \in V$. Cette égalité impose alors

$$c_2 = \frac{c_2(H, E)}{2} \Omega_0$$

où $\Omega_0 \in \mathfrak{s}^* \otimes \mathfrak{s}^*$ est défini en (1.38). Or, par les résultats acquis à la sous-section 1.5.3, nous savons qu'une 2-forme différentielle $\mathbb{S}$ -invariante sur $\mathbb{S}$ correspondant à un tel 2-cocycle est nécessairement G -invariante. D'où, chaque 2-forme différentielle fermée G -invariante sur $\mathbb{S}$ correspond à la 2-forme différentielle $k'\omega^{\mathbb{S}}$ pour un

certain réel k' . De plus, des arguments parfaitement semblables montrent qu'une 1-forme différentielle G -invariante sur $\mathbb{S}$ est complètement déterminée par une application linéaire $c_1 : \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $c_1([X, Y]_{\mathfrak{s}}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{k}$ et $Y \in \mathfrak{s}$. Il est alors facile de constater à partir de l'appendice A qu'une telle application est nécessairement nulle. Il s'ensuit $H_{dR}^2(\mathbb{S})^G \simeq \mathbb{R}$. ■

Il découle alors de ce lemme l'identification

$$H_{dR}^2(\mathbb{S})^G \llbracket \nu \rrbracket \simeq \mathbb{R} \llbracket \nu \rrbracket.$$

Ce résultat nous permet d'en déduire qu'il est toujours possible de passer d'une classe de G -équivalence de star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ à une autre en redéfinissant simplement le paramètre de déformation ν ; [BB03]. Nous ne nous étendons cependant pas sur ce point, celui-ci n'ayant pas fait l'objet spécifique de nos recherches. Toutefois, comme le devine le lecteur, dans la suite, nous allons nous atteler à résoudre notre problème de manière précise au sein d'une classe de G -équivalence de star-produits G -invariants. Afin d'atteindre cet objectif, la proposition 2.3.12 nous est bien évidemment d'une aide sans borne. En particulier, elle nous permet d'améliorer nettement la méthode précédemment exposée. En effet, pour déterminer explicitement les éléments d'une telle classe de G -équivalence de star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$, il nous suffit simplement de choisir une application moment quantique $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ telle que $\text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ soit non vide, et de calculer ensuite de façon explicite les éléments de cet ensemble. Nous obtenons donc la reformulation suivante.

Reformulation 2. POUR CHAQUE APPLICATION $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ TELLE QUE $\text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ SOIT NON VIDE, À REDÉFINITION DU PARAMÈTRE DE DÉFORMATION ν PRÈS, DÉTERMINER EXPLICITEMENT DE TOUTES LES QUANTIFICATIONS PAR DÉFORMATIONS À LA FOIS FORMELLES ET NON FORMELLES G -INVARIANTES SUR $\mathbb{S}$ REVIENT À DÉTERMINER L'ENSEMBLE DES OPÉRATEURS $T \in \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ TELS QUE $T(*_\nu^0)$ SOIT UN STAR-PRODUIT SUR $\mathbb{S}$ ADMETTANT UNE EXPRESSION NON FORMELLE.

Remarque 2.3.14. Dans la suite, nous allons entreprendre cette tâche en partant d'une application moment quantique $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ particulière que nous décrirons à la sous-section 2.3.4. Notons que, dans notre démarche, nous ne vérifierons toutefois qu'*a posteriori* l'existence d'un opérateur $T \in \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$.

Enfin, terminons ici en spécifiant que certains aspects démontrés au cours des sous-sections précédentes sont bien sûr valables dans un contexte un peu plus général que celui avec lequel nous travaillons. Nous n'avons toutefois pas souhaité exprimer en général ces généralisations dans ce texte, cela n'étant pas l'objectif de celui-ci.

2.3.4 Exemple concret d'application moment quantique

Avant de mettre en pratique les acquis de cette section dans la suite de ce travail, nous allons donner enfin un exemple explicite d'application moment quantique sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$. Nous utiliserons ici plus spécifiquement les notations des sous-sections 1.5.1 et 2.2.2.

Remarque 2.3.15. Par facilité, dans la suite de nos calculs, nous ferons le choix de fixer le paramètre $k > 0$ apparaissant comme multiple de la métrique riemannienne $\beta^{\mathbb{S}}$ et de la forme symplectique $\omega^{\mathbb{S}}$ sur $\mathbb{S}$ en lui donnant la valeur

$$k := \frac{2}{n+1}.$$

Géométriquement, cela correspond bien évidemment au choix spécifique d'une structure de variété kählérienne sur $\mathbb{S}$ qui n'enlève rien au fond du travail. De plus, d'un point de vue de l'expression (2.5) du star-produit de Moyal, nous remarquons aisément que ce choix n'est guère fort contraignant, celui-ci étant équivalent à une redéfinition paramètre de déformation comme étant $2k^{-1}(n+1)^{-1}\nu$.

Comme nous l'indique la définition 2.3.10 (et d'une certaine façon, le lemme 2.3.9) la recherche d'une application moment quantique $\lambda_{\nu}^0 \in \text{MQ}(*_{\nu}^0)$ passe nécessairement par une déformation de l'application moment $\lambda^{\mathbb{S}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})$ dans la direction du paramètre formel de déformation ν . Pour rappel, cette application moment $\lambda^{\mathbb{S}}$ est celle relativement à laquelle l'action L de G sur $\mathbb{S}$ est hamiltonienne. Afin de nous épargner de longs et pénibles calculs, nous allons rechercher cette application $\lambda_{\nu}^0 \in \text{MQ}(*_{\nu}^0)$ en essayant de faire le moins d'effort possible, c'est-à-dire en essayant minimiser l'ordre maximal en ν des moments quantiques.

Commençons tout d'abord par rappeler un fait connu, à savoir que le star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$ est $\mathbb{S}$ -covariant ; [BM01, ch.2, prop.2.1]. En effet, à partir du lemme 1.6.11, nous observons sans peine que les moments associés aux éléments de l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}$ sont linéaires sur $\{(0, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R}\}$.

Or, par définition de la bijection j donnée à la sous-section 2.2.2, si l'indice a est une composante du multi-indice $I \in \mathcal{I}^p$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nécessairement, l'indice z sera une composante de $j(I)$. Par conséquent, pour tout naturel $p \geq 2$, pour tout $I \in \mathcal{I}_+^p$ et pour tout $X, Y \in \mathfrak{s}$, nous avons

$$\partial_I (\lambda_X^{\mathbb{S}}) \partial_{j(I)} (\lambda_Y^{\mathbb{S}}) = 0.$$

En utilisant l'expression (2.6) et la définition de l'application moment $\lambda^{\mathbb{S}}$, nous en déduisons alors les égalités

$$\frac{1}{2\nu} [\lambda_X^{\mathbb{S}}, \lambda_Y^{\mathbb{S}}]_{*\nu^0} = \{\lambda_X^{\mathbb{S}}, \lambda_Y^{\mathbb{S}}\} = \lambda_{[X,Y]}^{\mathbb{S}} \quad (2.13)$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{s}$. D'où, le star-produit de Moyal sur $\mathbb{S}$ est bien $\mathbb{S}$ -covariant.

Par ailleurs, toujours en utilisant le résultat du lemme 1.6.11, pour $X \in \mathfrak{m}$ et $I \in \mathcal{I}^p$ où $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, nous remarquons que $\partial_I (\lambda_X^{\mathbb{S}}) = 0$. Nous en concluons donc que la relation (2.13) est également vérifiée pour tout $X, Y \in \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m}$. De là, il est plus que tentant d'essayer d'adapter cet argument afin de vérifier si nous n'aurions par hasard pas une propriété de G -covariance du star-produit $*_{\nu}^0$. Nous sommes toutefois en droit d'en douter en observant les expressions des moments associés aux éléments de $\mathfrak{g}_{-1}$ étant donné que leurs dérivées troisièmes en les composantes de v ne sont pas nécessairement nulles. Plus précisément, pour $1 \leq l \leq n-1$ et $1 \leq l' \leq n-1$, si nous effectuons le calcul du $*_{\nu}^0$ -commutateur des moments associés à deux éléments c_l^1 et $c_{l'}^i$ appartenant à la base de $\mathfrak{g}$ issue de la décomposition d'Iwasawa de cette algèbre de Lie, nous obtenons

$$\frac{1}{2\nu} [\lambda_{c_l^1}^{\mathbb{S}}, \lambda_{c_{l'}^i}^{\mathbb{S}}]_{*\nu^0} (a, v, z) = -2 \delta_{l,l'} (\lambda_F^{\mathbb{S}} (a, v, z) + e^{2a} (n-1) \nu^2)$$

pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Notre espoir est ainsi anéanti et le star-produit de Moyal n'est pas G -covariant si $n > 1$ comme l'indique si bien le facteur $(n-1)$ devant le carré du paramètre de déformation dans l'expression précédente. Toutefois, comme $[c_l^1, c_{l'}^i] = -2 \delta_{l,l'} F$ pour tout $1 \leq l \leq n-1$ et $1 \leq l' \leq n-1$, ce dernier résultat nous laisse soupçonner l'énoncé suivant.

Lemme 2.3.16. *Pour $X \in \mathfrak{g}$, notons $[X]_F \in \mathbb{R}$ la composante de X dans la direction $F \in \mathfrak{g}_{-2} \subset \mathfrak{g}$ respectivement à la base de $\mathfrak{g}$ issue de sa propre décomposition en sous-espaces de racine restreinte tel qu'exposée à la sous-section 1.5.1. Alors, l'application*

$$\lambda_{\nu}^0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]] : X \mapsto \lambda_{\nu}^0(X)$$

définie pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ par

$$(\lambda_\nu^0(X))(a, v, z) = \lambda_X^\mathbb{S}(a, v, z) + e^{2a} [X]_F (n-1) \nu^2$$

est une application moment quantique relativement au star-produit de Moyal $\ast_\nu^0$. En particulier, le star-produit de Moyal sur $\mathbb{S}$ est $\mathbb{S}$ -covariant.

La linéarité de l'application λ_ν^0 ainsi définie étant claire, au vu de l'ensemble des constatations faites précédemment, la preuve de ce lemme revient à vérifier les égalités

$$\left[\lambda_{c_l^1}^\mathbb{S}, \lambda_{c_{l'}^1}^\mathbb{S} \right]_{\ast_\nu^0} = 0 = \left[\lambda_{c_l^i}^\mathbb{S}, \lambda_{c_{l'}^i}^\mathbb{S} \right]_{\ast_\nu^0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(F), \lambda_\nu^0(X)]_{\ast_\nu^0} = \lambda_\nu^0([F, X])$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $1 \leq l \leq n-1$ et $1 \leq l' \leq n-1$. Ces vérifications ne nécessitant aucune réflexion particulière, elles seront laissées à l'appréciation du lecteur. Notons toutefois que ces calculs sont facilités grâce à l'appendice A et à la forme relativement sympathique que prend l'application λ_ν^0 , celle-ci faisant apparaître clairement l'application moment $\lambda^\mathbb{S}$ dont nous connaissons à la fois la forme explicite mais aussi les intéressantes propriétés.

Remarque 2.3.17. Tant à partir de ce lemme qu'à partir de l'expression des moments donnés à la sous-section 1.6.3, nous constatons que le star-produit de Moyal $\ast_\nu^0$ est G -covariant si et seulement si $n = 1$.

Dans la suite, cette application moment quantique λ_ν^0 jouera un rôle fondamental. Comme inspiré au travers de la proposition 2.3.12 et indiqué à sa suite, c'est à partir d'elle que nous allons construire explicitement une classe de G -équivalence de star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$.

2.4 Obtention d'une invariance partielle

Nous allons maintenant nous attaquer à la réalisation du programme exposé à la fin de la section 2.3.3 au travers de la remarque 2.3.14 et de la seconde reformulation de notre objectif initial. Partant de l'application moment quantique $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(\ast_\nu^0)$ définie au lemme 2.3.16, nous allons chercher l'ensemble des opérateurs linéaire $T \in \text{Op}(\ast_\nu^0)$ tels que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous ayons

$$T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), -]_{\ast_\nu^0} \right) \circ T^{-1} = X^\star.$$

Pour chaque tel opérateur T , la proposition 2.3.11 nous garantit que le star-produit $T(*_{\nu}^0)$ est G -invariant. Ces star-produits appartiennent alors à la même classe de G -équivalence de star-produits G -invariants et constituent tous les éléments de cette classe en vertu de la proposition 2.3.12.

L'accomplissement de ce travail sera exposé lors des trois prochaines sections. Dans cette section, nous allons nous attaquer à la première grande étape qui consiste en l'obtention d'un opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ tel que le star-produit $T^0(*_{\nu}^0)$ soit $\mathbb{S}$ -invariant. De là, nous aborderons tant le point de vue formel que non formel des quantifications par déformations ainsi obtenues. Des liens géométriques existant avec ce travail seront également effleurés au regard des faits établis lors de la section 1.7. Les résultats que nous exposerons ici ne sont pas nouveaux et reposent en bonne partie sur le travail de Bieliavsky et Massar exposé dans les articles [BM01] et [Bi08]. Dans la section suivante, les connaissances acquises ici nous permettront de revenir sur notre objectif principal via l'étude du problème du passage d'un star-produit $\mathbb{S}$ -invariant à un star-produit G -invariant. Les notations utilisées dans ce cadre seront celles définies à la section 2.2 tant pour le star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$ sur $\mathbb{S}$ que pour les conventions géométriques. Rappelons également que depuis la remarque 2.3.15 le paramètre $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ est fixé par l'égalité $(n+1)k = 2$. Enfin, nous renvoyons le lecteur aux considérations de la section 1.5 notamment pour tout ce qui concerne l'introduction de la fameuse base de $\mathfrak{g}$ issue de sa propre décomposition en sous-espaces de racine restreinte dont nous serons friands.

2.4.1 Approche semi-formelle

Afin de faciliter les notations de cette sous-section, définissons

$$\rho_{\nu}^0 : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(*_{\nu}^0) : X \mapsto \rho_{\nu}^0(X) := \frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}^0(X), -]_{*_{\nu}^0} \quad (2.14)$$

où $\lambda_{\nu}^0 \in \text{MQ}(*_{\nu}^0)$ est l'application moment quantique définie au lemme 2.3.16. La proposition 2.3.3(a) et les définitions 2.1.1 et 2.3.10 nous indiquent que l'application ρ_{ν}^0 n'est autre qu'une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]]$. Comme mentionné dans l'introduction à cette section, nous allons nous pencher sur la question de l'obtention d'un opérateur linéaire explicite $T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ qui satisfasse pour tout $X \in \mathfrak{s}$ la relation

$$T^0 \circ \rho_{\nu}^0(X) \circ (T^0)^{-1} = X^*. \quad (2.15)$$

Cette démarche ainsi formulée de façon formelle fera apparaître des considérations non formelles dans la recherche de l'opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$. Sur base de la référence [BM01, ch.3], ces dernières seront plus proprement explicitées à la sous-section suivante afin de susciter l'apparition d'une quantification par déformation non formelle $\mathbb{S}$ -invariante sur $\mathbb{S}$.

Étant donné que la relation 2.15 est linéaire en $X \in \mathfrak{s}$, il suffit de déterminer $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ telle que celle-ci soit vérifiée pour $X = E$, $X \in V$ et $X = H$. La première chose semblant logique à faire dans ce cadre est donc d'examiner la forme des dérivations $\rho_\nu^0(E)$, $\rho_\nu^0(v_0)$ pour $v_0 \in V$ et $\rho_\nu^0(H)$. Ces dernières s'obtiennent par calculs directs à partir de l'expression 2.6 et des lemmes 2.3.16 et 1.6.11. Pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $v_0 \in V$, nous avons :

- (i) $\rho_\nu^0(E)|_{(a,v,z)} = -\frac{e^{-2a}}{\nu} \sinh(\nu \partial_z);$
- (ii) $\rho_\nu^0(v_0)|_{(a,v,z)} = -\frac{e^{-a}}{\nu} \Omega(v_0, v) \sinh\left(\frac{\nu}{2} \partial_z\right) - e^{-a} \partial_{v_0} \cosh\left(\frac{\nu}{2} \partial_z\right);$
- (iii) $\rho_\nu^0(H)|_{(a,v,z)} = -\partial_a;$

où, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sinh(\alpha \nu \partial_z) := \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\alpha \nu)^{2p+1}}{(2p+1)!} \partial_z^{2p+1} \quad \text{et} \quad \cosh(\alpha \nu \partial_z) := \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\alpha \nu)^{2p}}{(2p)!} \partial_z^{2p}.$$

Nous remarquons que la dérivation $\rho_\nu^0(H)$ possède déjà une forme appropriée. En effet, il s'agit du champ de vecteurs fondamental sur $\mathbb{S}$ associé à $H \in \mathfrak{g}$ relativement à l'action L . Par simplicité, nous nous arrangerons donc pour que l'opérateur linéaire $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ recherché préserve ce résultat. Par ailleurs, comme nous souhaitons que l'entrelacement de la dérivation $\rho_\nu^0(X)$ par cet opérateur nous livre des champs de vecteurs pour tout $X \in \mathfrak{s}$, nous avons tout intérêt à faire disparaître les séries formelles en ν à coefficients dans les opérateurs 1-différentiels que sont $\sinh(\nu \partial_z)$, $\sinh\left(\frac{\nu}{2} \partial_z\right)$ et $\cosh\left(\frac{\nu}{2} \partial_z\right)$. Un outil bien adapté à ce travail est la transformée de Fourier.

Définition 2.4.1. La transformée de Fourier partielle en la variable z sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est définie comme étant l'opération $\mathcal{F}$ qui à une fonction $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$ associe

$$\mathcal{F}(f) : (a, v, \xi) \mapsto \mathcal{F}(f)(a, v, \xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi} f(a, v, z) dz$$

pour les triples $(a, v, \xi) \in \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$ tels que cette expression fasse sens. Nous noterons

$$\mathbb{S}' := \{(a, v, \xi)\} \simeq \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{2n}$$

l'ensemble des coordonnées sur lesquelles sont définies les fonctions ayant subi la transformée de Fourier partielle en la variable z sur $\mathbb{S}$. La *transformée de Fourier inverse de $\mathcal{F}$* est alors définie comme l'opération notée $\mathcal{F}^{-1}$ qui à une fonction $f : \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{C}$ associe

$$\mathcal{F}^{-1}(f) : (a, v, z) \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(a, v, \xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f(a, v, \xi) d\xi$$

pour les triples $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$ tels que cette expression fasse sens.

Remarque 2.4.2. Bien entendu, comme le lecteur s'en doute, ces définitions ne sont pas formulées dans un cadre précis et rigoureux d'un point de vue analytique. Nous reviendrons sur ce point d'analyse fonctionnelle dans la sous-section suivante. En attendant, nous poursuivrons notre raisonnement dans un cadre semi-formel. Dans la suite de cette sous-section, nous supposons que les transformations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont bien définies et l'inverse l'une de l'autre sur l'espace des fonctions lisses sur lequel nous travaillerons. En pratique, dans nos calculs, ce seront essentiellement leurs extensions $\mathbb{C}[[\nu]]$ -linéaires à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$ qui seront considérées à chaque fois que cela fait sens. Enfin, si m_α dénote l'opération de multiplication par une fonction α , nous supposons les formules opératoriels

$$\mathcal{F} \circ \partial_z = m_{i\xi} \circ \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \mathcal{F} \circ m_z = i \partial_\xi \circ \mathcal{F} \quad (2.16)$$

comme étant valides.

L'introduction des opérateurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ nous permet d'obtenir sans peine les expressions suivantes pour tout $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $v_0 \in V$:

- (i) $(\mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(E) \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} = -\frac{e^{-2a}}{\nu} \sinh(i\nu\xi) \text{Id} ;$
- (ii) $(\mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(v_0) \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} = -\frac{e^{-a}}{\nu} \Omega(v_0, v) \sinh\left(\frac{i\nu\xi}{2}\right) \text{Id} \\ - e^{-a} \cosh\left(\frac{i\nu\xi}{2}\right) \partial_{v_0} ;$
- (iii) $(\mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(H) \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} = -\partial_a.$

À partir des expressions de ces opérateurs 1-différentiels, Bieliavsky et Massar devinèrent qu'un changement de variables adéquat permettrait d'arriver à résoudre ce problème ; [BM01]. En effet, pour $i\nu \in \mathbb{R}$, définissons l'application

$$\psi : \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{S}' : (a, v, \xi) \mapsto \left(a, \frac{v}{\cosh\left(\frac{i\nu\xi}{2}\right)}, \frac{\sinh(i\nu\xi)}{i\nu} \right). \quad (2.17)$$

Nous constatons directement qu'il s'agit d'un difféomorphisme de $\mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$ dans lui-même. Son inverse est donné explicitement par

$$\psi^{-1} : \mathbb{S}' \rightarrow \mathbb{S}' : (a, v, \xi) \mapsto \left(a, \cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) v, \frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{i\nu} \right).$$

Remarque 2.4.3. Le lecteur souhaitant davantage d'informations sur les fonctions hyperboliques $\sinh$ et $\cosh$ ainsi que sur leurs réciproques $\operatorname{arcsinh}$ et $\operatorname{arccosh}$ pourront consulter les références [AS65, ch.4, § 5 & § 6] et [O+10, ch.4, § 28-41]. Nous utiliserons intensivement ces fonctions dans la suite. En particulier, pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $i\nu \in \mathbb{R}$, les égalités suivantes nous seront fortement utiles :

- (a) $\cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu^2\xi^2}}{2}}$ et
 $\sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) = \operatorname{sign}(i\nu\xi) \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1-\nu^2\xi^2}}{2}};$
- (b) $\cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) = \frac{i\nu\xi}{2};$
- (c) $\cosh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) - \sinh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) = 1;$
- (d) $\cosh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) + \sinh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) = \sqrt{1-\nu^2\xi^2};$
- (e) $\cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \pm \sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) = e^{\pm \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)};$
- (f) $\cosh(\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)) = \sqrt{1-\nu^2\xi^2};$
- (g) $\partial_\xi \left(\cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right) = \frac{i\nu}{2\sqrt{1-\nu^2\xi^2}} \sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right)$ et
 $\partial_\xi \left(\sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right) = \frac{i\nu}{2\sqrt{1-\nu^2\xi^2}} \cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right).$

Pour tout $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et $v_0 \in V$, un bref calcul à partir des expressions (2.17) et (1.42) nous indique la relation

$$\left((\psi^{-1})^* \circ \partial_{v_0} \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = \left(\cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^{-1} \partial_{v_0}$$

qui, combinée avec la remarque 2.4.3(b), nous permet d'obtenir :

- (i) $\left((\psi^{-1})^* \circ \mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(E) \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = -i\xi e^{-2a} \operatorname{Id};$
- (ii) $\left((\psi^{-1})^* \circ \mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(v_0) \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = -\frac{i\xi}{2} e^{-a} \Omega(v_0, v) \operatorname{Id}$
 $\quad - e^{-a} \partial_{v_0};$
- (iii) $\left((\psi^{-1})^* \circ \mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(H) \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = -\partial_a.$

En utilisant les égalités (2.16), nous remarquons alors que l'entrelacement de ces opérateurs 1-différentiels par la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$ nous redonne exactement les expressions des champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathbb{S}$ telles qu'elles furent obtenues à la remarque 1.6.12. En d'autres termes, si nous posons

$$T^0 := \mathcal{F}^{-1} \circ (\psi^{-1})^* \circ \mathcal{F}, \quad (2.18)$$

alors la relation (2.15) annoncée en début de sous-section est vérifiée pour chaque $X \in \mathfrak{s}$. D'un point de vue purement formel, il est possible de montrer que cet opérateur T^0 admet un développement asymptotique de la forme (2.3) de telle façon à définir exactement une équivalence de star-produits au sens de la définition 2.1.6 ; [BM01, ch.2 & ch.3], [Bi08, ch.3, § 1]. Nous utiliserons également la notation $T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ pour désigner cet opérateur qui sera le plus souvent manipulé sous sa forme non formelle explicite. Le star-produit $\mathbb{S}$ -invariant sur $\mathbb{S}$ ainsi obtenu sera, quant à lui, noté

$$*_{\nu}^{\mathbb{S}} := T^0(*_{\nu}^0).$$

2.4.2 De l'analyse fonctionnelle aux aspects non formels

Lors de la sous-section précédente, nous sommes partis d'un point de vue formel à la recherche d'un opérateur linéaire $T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ satisfaisant l'égalité (2.15) pour tout $X \in \mathfrak{s}$. Reprendre les calculs exposés précédemment dans l'esprit de l'article [BM01] nous a permis de nous rendre compte que l'approche de la définition d'un tel opérateur sous une forme non formelle était adaptée à la situation. Compte tenu du fait que le star-produit $*_{\nu}^0$ n'est autre que le développement asymptotique du produit associatif issu de la quantification par déformation non formelle de Weyl et que l'opérateur T^0 a pour but de définir une équivalence entre le star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$ et un star-produit $\mathbb{S}$ -invariant, il est légitime de s'interroger sur la possibilité de définir concrètement une quantification par déformation non formelle $\mathbb{S}$ -invariante sur $\mathbb{S}$ à partir de ces expressions. Ce travail a été réalisé au sein de l'article [BM01, ch.3] puis généralisé, entre autres, à la référence [Bi08, ch.3]. Nous allons évoquer brièvement les résultats principaux y étant démontrés.

Pour commencer, revenons sur l'analyse des trois ingrédients nous permettant de définir notre opérateur T^0 via l'expression (2.18), à savoir, la transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}$, son inverse $\mathcal{F}^{-1}$ et le difféomorphisme ψ . Le cadre semblant le plus naturel pour formuler la définition 2.4.1 est très certainement celui des fonctions Lebesgue-intégrables. En effet, l'expression définissant la transformée de Fourier

$\mathcal{F}$ (resp. la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$) fait sens pour chaque fonction $f \in L^1(\mathbb{S}, dz)$ (resp. $f \in L^1(\mathbb{S}', d\xi)$), c'est-à-dire chaque fonction définie sur $\mathbb{S}$ (resp. $\mathbb{S}'$) qui soit Lebesgue-intégrable en la variable z (resp. ξ) relativement à la mesure de Lebesgue. Toutefois, en regard de la remarque 2.4.2, le concept d'inverse de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ et les formules (2.16) semblent dénués de sens dans ce contexte trop général. Il existe néanmoins un cadre intéressant, bien connu et qui soit adapté à la formulation de la définition 2.4.1, à savoir, celui des fonctions de Schwartz, et plus particulièrement, des distributions tempérées. Sans entrer dans de longs rappels, nous nous référons aux ouvrages [DK10, ch.3, ch.4 & ch.14] et [Sc98, ch.2 & ch.5] pour tout ce qui concerne les notions bien connues de distributions et transformée de Fourier que nous allons aborder brièvement ci-dessous.

En assimilant les fonctions lisses sur $\mathbb{S}$ (resp. $\mathbb{S}'$) à des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^{2n}$ munies des coordonnées (a, v, z) (resp. (a, v, ξ)), définissons les espaces de fonctions suivants :

- (a) $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{S}')$) l'ensemble des fonctions lisses sur $\mathbb{S}$ (resp. $\mathbb{S}'$) à support compact ;
- (b) $\mathcal{S}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{S}') \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}')$) l'ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ (resp. $\mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$) ;
- (c) $\mathcal{D}'(\mathbb{S})$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{S}')$) l'ensemble des *distributions* sur $\mathbb{S}$ (resp. $\mathbb{S}'$), c'est-à-dire l'ensemble des fonctionnelles $\mathbb{C}$ -linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ (resp. $\mathcal{D}(\mathbb{S}')$) ;
- (d) $\mathcal{S}'(\mathbb{S})$ (resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{S}')$) l'ensemble des *distributions tempérées* sur $\mathbb{S}$ (resp. $\mathbb{S}'$), c'est-à-dire l'ensemble des fonctionnelles $\mathbb{C}$ -linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{S}')$).

Dans la suite du texte, nous noterons $dL = da dv_1^1 \dots dv_{n-1}^1 dv_1^i \dots dv_{n-1}^i dz$ (resp. $dL = da dv_1^1 \dots dv_{n-1}^1 dv_1^i \dots dv_{n-1}^i d\xi$) la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ (resp. $\mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$). Le lecteur vérifiera sans peine la remarque suivante.

Remarque 2.4.4. [BG14, ch.6, §2] Une mesure de Haar invariante à gauche sur le groupe de Lie $\mathbb{S}$, et donc, en particulier, la mesure de Liouville sur la variété symplectique $(\mathbb{S}, 2(n+1)^{-1} \omega^{\mathbb{S}})$, correspond nécessairement à un multiple de la mesure de Lebesgue dL sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Il est bien connu qu'à chaque fonction $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{S}, dL)$ localement Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{S}$, nous pouvons associer la distribution sur $\mathbb{S}$ définie par

$$g \in \mathcal{D}(\mathbb{S}) \mapsto \int_{\mathbb{S}} fg \, dL ;$$

[DK10, ch.3, thm.3.5]. Par facilité, la notation $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})$ sera régulièrement utilisée pour désigner la distribution ainsi associée à une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{S}, dL)$. En outre, de ce point de vue, nous avons les inclusions

$$\mathcal{D}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{S}) \subset L^1(\mathbb{S}, dL) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{S}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{S});$$

[DK10, ch.14, expl.14.22]. Dans la suite de notre travail, nous considérerons la notion de *dérivation généralisée au sens des distributions* telle qu'exposée à la référence [DK10, ch.4]. En d'autres termes, pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})$, nous définissons

$$\partial_z(f) := -f \circ \partial_z.$$

Rappelons que du point de vue de l'inclusion $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{S}, dL) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{S})$, cette notion de dérivation correspond à la dérivation usuelle d'une fonction lisse sur $\mathbb{S}$ via la règle d'intégration par parties. Les définitions et faits énoncés ici restent bien entendu d'application en remplaçant $\mathbb{S}$ et z respectivement par $\mathbb{S}'$ et ξ dans les lignes ci-dessus. Énonçons maintenant le résultat fondamental sur la transformée de Fourier définie dans notre cadre.

Théorème 2.4.5. [DK10, ch.14, thm.13.13 & thm.14.24] *La transformée de Fourier partielle en la variable z sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ définit un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{S}')$ dont l'inverse est $\mathcal{F}^{-1}$. Celui-ci s'étend par dualité au niveau des distributions tempérées en un isomorphisme*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{S}') \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{S}) : f \mapsto \mathcal{F}(f) := f \circ \mathcal{F}.$$

Si nous posons de façon semblable $\mathcal{F}^{-1}(f) := f \circ \mathcal{F}^{-1}$ pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{S})$, alors

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \text{Id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{S})} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \text{Id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{S}')}.$$

De plus, dans ce contexte, les relations (2.16) sont vérifiées sur $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ et s'entendent au sens des distributions sur $\mathcal{S}'(\mathbb{S}') \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{S})$.

Remarque 2.4.6. Le terme d'*extension* utilisé à deux reprises dans l'énoncé du théorème précédent se justifie car $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}'$ peuvent être identifiés l'un à l'autre. De façon plus précise :

- (i) vue comme appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{S}) \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{S}')$, la distribution tempérée associée à la transformée de Fourier partielle en la variable z d'une fonction de Schwartz $f \in \mathcal{S}(\mathbb{S})$ correspond à l'image par $\mathcal{F}$ de la distribution associée à f vue comme élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{S}') \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{S})$;

- (ii) l'extension des relations (2.16) sur $\mathcal{S}'(\mathbb{S}')$ se fait rigoureusement en échangeant les coordonnées z et ξ dans les expressions de celles-ci.

Ce théorème et les considérations précédentes constituent bien évidemment une adaptation de la théorie générale des distributions et des transformées de Fourier dans notre contexte; [DK10], [Sc98]. Si nous ne ferons pas appel à l'ensemble de ces résultats dans cette sous-section, ceux-ci apparaîtront néanmoins dans la suite.

Revenons maintenant plus spécifiquement au sujet de quantification nous concernant dans cette section. Outre le fait d'être un espace fonctionnel sur lequel la quantification par déformation non formelle de Weyl sur $\mathbb{S}$ est bien définie, l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{S})$, vu comme étant identifié à $\mathcal{S}(\mathbb{S}')$, possède donc la propriété importante d'être stable sous la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ ainsi que sous son inverse $\mathcal{F}^{-1}$. Au regard de ce résultat et de l'expression (2.18), nous pouvons logiquement nous demander de quelle façon interagit l'application pull-back par le difféomorphisme ψ défini en (2.17) avec ce type de fonctions. Cette interaction est décrite par les inclusions

$$\psi^*(\mathcal{S}(\mathbb{S}')) \subset \mathcal{S}(\mathbb{S}') \quad \text{et} \quad (\psi^{-1})^*(\mathcal{S}(\mathbb{S}')) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{S}');$$

[BM01, ch.3, lem.3.1]. Ainsi, dans l'esprit de la remarque 2.4.6, en identifiant $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}'$, les opérateurs $T^0 := \mathcal{F}^{-1} \circ (\psi^{-1})^* \circ \mathcal{F}$ et $(T^0)^{-1} := \mathcal{F}^{-1} \circ \psi^* \circ \mathcal{F}$ sont bien définis sur $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ et à images dans $\mathcal{S}'(\mathbb{S})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ respectivement. En outre, nous avons les inclusions

$$\mathcal{S}(\mathbb{S}) \subset \text{im}(T^0) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{S})$$

et la définition de l'application $(T^0)^{-1}$ nous permet de l'étendre en un isomorphisme linéaire entre $\text{im}(T^0)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ de telle façon à ce que

$$(T^0)^{-1} \circ T^0 = \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{S})} \quad \text{et} \quad T^0 \circ (T^0)^{-1} \Big|_{\mathcal{S}(\mathbb{S})} = \text{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{S})};$$

[BM01, ch.3, lem.3.2]. Nous obtenons donc deux applications T^0 et $(T^0)^{-1}$ bien définies et inverses l'une de l'autre sur $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ admettant chacune une expression explicite non formelle. En recoupant les résultats [BM01, ch.3, thm.3.1], [Bi08, ch.3, thm.3.1], [Vo11, ch.5, thm.5.8] et [BG14, ch.3, thm.3.5], nous en tirons une quantification par déformation à la fois formelle et non formelle $\mathbb{S}$ -invariante sur $\mathbb{S}$ via le théorème suivant.

Théorème 2.4.7. *Dans le cadre de cette sous-section, pour $2i\nu = \hbar \in \mathbb{R}$, si $*_{\hbar}^W$ dénote le produit associatif sur $\mathcal{S}(\mathbb{S})$ issu de la quantification par déformation non formelle de Weyl définie sur*

$$\left(\mathbb{S}, \frac{2}{n+1} \omega^{\mathbb{S}} \right) \simeq \left(\mathbb{R}^{2n}, 2 \left(da \wedge dz + \sum_{l=1}^n dv_l^i \wedge dv_l^1 \right) \right),$$

alors l'application

$$\begin{aligned} *_{\hbar}^{W_{\mathbb{S}}} : \text{im}(T^0) \times \text{im}(T^0) &\rightarrow \text{im}(T^0) \\ (f, g) &\mapsto f *_{\hbar}^{W_{\mathbb{S}}} g := T^0 \left((T^0)^{-1}(f) *_{\hbar}^W (T^0)^{-1}(g) \right) \end{aligned}$$

*définit une structure d'algèbre associative sur $\text{im}(T^0) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{S})$ dont le développement asymptotique correspond au star-produit $\mathbb{S}$ -invariant $*_{\nu}^{\mathbb{S}} = T^0(*_{\nu}^0)$. De plus, l'évaluation en un point $s_0 \in \mathbb{S}$ du produit $*_{\hbar}^{W_{\mathbb{S}}}$ de deux fonctions $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{S}) \subset \text{im}(T^0)$ admet l'expression explicite*

$$\left(\frac{1}{\pi \hbar} \right)^{2n} \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} A_{\hbar}(s_0, s_1, s_2) e^{\frac{2i}{\hbar} S(s_0, s_1, s_2)} f(s_1) g(s_2) dL(s_1) dL(s_2)$$

où $A_{\hbar}$ et S sont des fonctions lisses à valeurs réelles définies sur $\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ et déterminées explicitement. Dans ce contexte, la fonction S correspond avec la phase de Weinstein S^W définie à la sous-section 1.7.3. Évaluée sur les points $\{s_j = (a_j, v_j, z_j) : j \in \{0, 1, 2\}\} \subset \mathbb{S}$, la phase S prend précisément la valeur

$$\sum_{\odot \{0,1,2\}} [\Omega(\cosh(a_2 - a_0)v_1, \cosh(a_0 - a_1)v_2) - \sinh(2(a_1 - a_2))z_0]$$

où $\Omega \in V^ \otimes V^*$ est la forme symplectique sur V issue de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{s}$.*

Comme nous le voyons à travers son expression, le produit $*_{\hbar}^{W_{\mathbb{S}}}$ intervenant dans la quantification par déformation non formelle définie ci-dessus fait intervenir une donnée géométrique, à savoir la phase de Weinstein S^W telle qu'elle fut introduite à la définition 1.7.8. En particulier, cette formule fait donc intervenir la géométrie de l'espace symplectique sur lequel nous travaillons, non pas du point de vue de la structure symétrique $s^{\mathbb{S}}$ issue de la structure de domaine borné symétrique de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, mais bien de celui de la structure symétrique s^{ana} définie à la proposition 1.7.3 à partir de la structure symétrique de type groupe sur $\mathbb{S}$ telle que donnée en (1.1). Cette intervention de la structure géométrique de l'espace symplectique

$$\left(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, \frac{2}{n+1} \omega^{\mathbb{S}} \right) \tag{2.19}$$

apparaît également au niveau de l'invariance de la quantification par déformation obtenue, cette dernière étant en réalité invariante sous l'action de tout le groupe G_{ana} des automorphismes de cet espace symétrique symplectique ; [Bi08, ch.3], [BG14, ch.3, thm.3.5]. Ce résultat fut notamment généralisé par Bieliavsky dans l'article [Bi08] en introduisant un opérateur de multiplication par une fonction dans l'entrelacement par la transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}$ et son inverse apparaissant dans la définition de l'opérateur T^0 . Il caractérisa ainsi l'ensemble des star-produits G_{ana} -invariants associés à une quantification par déformation non formelle de l'espace symétrique symplectique (2.19) ; [Bi08, ch.3, thm.3.3]. Ces faits furent étendus aux j -groupes normaux et utilisés récemment par Bieliavsky et Gayral afin de définir une formule de déformation universelle associée à l'action de tels groupes à la fois dans un cadre fréchélique et C^* -algébrique ; [BG14].

2.4.3 Commentaire géométrique sur la phase de Weinstein

Comme nous pouvons le deviner, l'apparition d'une donnée géométrique telle que la phase de Weinstein S^W dans l'expression du produit associatif intervenant dans la quantification par déformation non formelle donnée au théorème 2.4.7 est sous-jacente à des résultats plus généraux. Bien que ce point ne soit pas au cœur de notre travail, nous souhaitons l'effleurer brièvement en quelques lignes compte tenu de ses liens intimes avec les aspects géométriques évoqués à la section 1.7.

Dans les années 1980 et 1990, Karasev, Weinstein et Zakrzewski lancèrent indépendamment un programme de quantification en utilisant de récents développements géométriques concernant la théorie des groupoïdes ; [We94a]. Cette nouvelle approche de la quantification revenait à faire l'*ansatz* d'une quantification par déformation non formelle invariante dont le noyau $K_{\hbar}$ apparaissant au point (ii) de la définition 2.1.13 serait de la forme

$$K_{\hbar}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\dim(M)} A_{\hbar}(x, y, z) e^{\frac{2i}{\hbar} S(x, y, z)} \quad (2.20)$$

où S (resp. $A_{\hbar}$) est une fonction (resp. une série formelle en $\hbar$ à coefficients dans les fonctions) de trois points sur la variété symplectique sur laquelle la quantification par déformation est considérée. En 1994, dans ce contexte, Weinstein livra des arguments montrant que, dans le cadre des espaces hermitiens symétriques de type non compact, la valeur de l'évaluation de la phase S sur 3 points x , y et z devait essentiellement être déterminée par l'aire symplectique d'un double triangle

géodésique dont x , y et z sont les points milieu des côtés, pour autant qu'un tel triangle existe; [We94a]. Notons que cette dernière assertion tient d'une simple observation dans le cas de la formule intégrale définissant la quantification par déformation non formelle de Weyl. Toutefois, comme nous l'avons vu à la section 1.7 à travers la proposition 1.7.9, une telle définition de la phase S ne peut être globale sur un espace hermitien symétrique de type non compact arbitraire. Ce cas se présente d'ailleurs pour la boule unité de $\mathbb{C}^n$, la géométrie affine de celle-ci ne correspondant pas à celle de l'espace symétrique symplectique (2.19).

Ce problème de phase fut étudié par Bieliavsky. Dans le cadre plus général des espaces symétriques symplectiques, il proposa l'introduction de *phases* S dites *admissibles* définie à partir d'observations réalisées sur les propriétés géométriques dont devrait disposer une formule semblable à celle du produit apparaissant dans la quantification par déformation non formelle de Weyl afin de définir un produit associatif; [Bi02, ch.1, ch.2 & ch.3]. Il montra également que la phase proposée par Weinstein dans le cas des espaces hermitiens symétriques de type non compact était admissible lorsqu'elle était bien définie; [Bi02, ch.3, prop.3.2]. Dans l'article [B+09], les auteurs mirent en évidence deux *phases* dites *canoniques* globalement définies respectivement sur les espaces symétriques symplectiques $(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}}, \omega^{\mathbb{S}})$ et $(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, \omega^{\mathbb{S}})$ dans le cas $n = 1$. Celles-ci sont obtenues de façons semblables en considérant une phase admissible sur un espace plat défini à partir d'une projection de la représentation de ces espaces symétriques symplectiques en tant qu'orbites coadjointes de leurs groupes d'automorphismes. Dans le cas de la structure symétrique s^{ana} , la phase de Weinstein est globalement définie, apparaît dans le théorème 2.4.7 (en considérant $V = \{0\}$) et correspond à la phase canonique proposée dans [B+09]. Toutefois, lorsque c'est la structure symétrique $s^{\mathbb{S}}$ qui est considérée sur $\mathbb{S}$ et non plus s^{ana} , c'est la géométrie du disque de Poincaré qui intervient. Dans ce cas, il est explicitement montré que la phase canonique ne correspond plus à la phase de Weinstein S^W quand celle-ci est définie mais qu'elles sont localement fonction l'une de l'autre. Par ailleurs, toujours dans l'article [B+09], il fut montré qu'une fonction spéciale de cette phase canonique compose la phase apparaissant dans l'expression explicite du noyau $K_{\hbar}$ de la forme (2.20) définissant le produit de la quantification par déformation non formelle $SU(1, 1)$ -invariante sur le disque de Poincaré. Cette notion de phase canonique possède donc l'avantage d'être bien définie et de se recouper avec la phase de Weinstein quand celle-ci est définie tout en proposant une vision unifiée des choses pour chacune des deux géométries affines sur $\mathbb{S}$. Notons enfin que Voglaire travailla également sur ce sujet dans sa thèse de

doctorat [Vo11] en présentant et en utilisant des outils plus généraux se recoupant sur certains points avec le travail susmentionné.

2.5 Quand l'invariance devient EDP

Lors de la section précédente, nous avons introduit un opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ particulier tel que $*_\nu^{\mathbb{S}} := T^0(*_\nu^0)$ soit un star-produit $\mathbb{S}$ -invariant sur $\mathbb{S}$ admettant une expression non formelle intéressante. Pour cela nous avons utilisé des méthodes géométriques associées à la représentation ρ_ν^0 de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$ définie en (2.14) à partir du star-produit $*_\nu^0$ et de l'application $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ calculée à la sous-section 2.3.4. Comme nous pouvons nous y attendre, l'extension directe de cette approche en vue d'obtenir des star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ est très vite rendue difficile. C'est précisément sur ce point que nous nous pencherons dans cette section. Nous utiliserons notamment des techniques se situant à la frontière de la théorie de Lie et de l'analyse harmonique sur les espaces homogènes afin d'obtenir un résultat clé dans notre thèse reformulant notre problème en termes de la résolution d'une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles. Tant le contenu que les notations des développements présentés ici seront dans la continuité de la précédente section.

2.5.1 À la recherche d'une plus grande invariance

Comme abordé à la sous-section 2.3.3, à redéfinition du paramètre de déformation ν près, pour obtenir l'ensemble des quantifications par déformations à la fois formelles et non formelles G -invariantes sur $\mathbb{S}$, il nous suffit de déterminer explicitement l'ensemble des éléments qui composent une classe de G -équivalence de star-produits G -invariants admettant une expression non formelle. Plus spécifiquement pour ce qui nous concerne, nous avons choisi de partir de l'application $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$ définie au lemme 2.3.16 et de déterminer l'ensemble $\text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ des opérateurs $T \in \text{Op}(*_\nu^0)$ tels que

$$T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), -]_{*_\nu^0} \right) \circ T^{-1} = X^*$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Comme le souligne la proposition 2.3.12, tous les star-produits du type $T(*_\nu^0)$ pour $T \in \text{Op}(*_\nu^0, \lambda_\nu^0)$ appartiendront alors à la même classe de

G -équivalence de star-produits G -invariants et constitueront en outre tous les éléments de cette classe. Dans le but de nous faciliter cette recherche, il est crucial de voir s'il est possible d'exploiter les acquis de la section précédente afin d'en déduire une information plus spécifique portant sur la forme des opérateurs appartenant à $\text{Op}(*_{\nu}^0, \lambda_{\nu}^0)$.

Lemme 2.5.1. *Dans le contexte susmentionné, considérons un opérateur linéaire $T \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$. Alors, $T \in \text{Op}(*_{\nu}^0, \lambda_{\nu}^0)$ si et seulement s'il existe un opérateur $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ satisfaisant*

$$T = U \circ T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0, \lambda_{\nu}^0)$$

*et définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre les star-produits $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et $T(*_{\nu}^0)$.*

Démonstration. La condition suffisante étant immédiate, montrons la condition nécessaire. Considérons $T \in \text{Op}(*_{\nu}^0, \lambda_{\nu}^0)$ et définissons l'opérateur linéaire

$$U := T \circ (T^0)^{-1} \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}}).$$

Par définition des opérateurs T et T^0 , pour tout $X \in \mathfrak{s}$, nous obtenons alors les égalités

$$U \circ X^* \circ U^{-1} = T \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}^0(X), -]_{*_{\nu}^0} \right) \circ T^{-1} = X^*.$$

Cette dernière relation étant la traduction infinitésimale de la définition 2.1.11 et le groupe de Lie $\mathbb{S}$ étant simplement connexe, nous en déduisons que l'opérateur U définit une $\mathbb{S}$ -équivalence entre les star-produits $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et $T(*_{\nu}^0)$. La thèse est ainsi démontrée. ■

En combinant ce lemme avec la seconde reformulation obtenue à la sous-section 2.3.3, ceci nous mène alors à une nouvelle reformulation.

Reformulation 3. SI $\text{Op}(*_{\nu}^0, \lambda_{\nu}^0)$ EST NON VIDE, À REDÉFINITION DU PARAMÈTRE DE DÉFORMATION ν PRÈS, DÉTERMINER EXPLICITEMENT DE TOUTES LES QUANTIFICATIONS PAR DÉFORMATIONS À LA FOIS FORMELLES ET NON FORMELLES G -INVARIANTES SUR $\mathbb{S}$ REVIENT À DÉTERMINER L'ENSEMBLE DES OPÉRATEURS $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ QUI SATISFONT LA RELATION $U \circ T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0, \lambda_{\nu}^0)$ ET DÉFINISSENT UNE $\mathbb{S}$ -ÉQUIVALENCE ENTRE $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ ET UN STAR-PRODUIT SUR $\mathbb{S}$ ADMETTANT UNE EXPRESSION NON FORMELLE.

Le résultat clé de cette sous-section est ainsi énoncé. Nous constatons que la preuve de celui-ci est très impliquée dans le cadre spécifique dans lequel nous travaillons. Avant d'exploiter le lemme 2.5.1 dans la suite, nous jugeons donc intéressant de le resituer dans un contexte plus vaste ne dépendant pas spécifiquement de la classe de G -équivalence de star-produits G -invariants recherchée. Ceci complètera ainsi les résultats évoqués lors de la sous-section 2.3.3 à travers un petit retour aux sources en ce qui concerne les classes d'équivalences de star-produits invariants et les applications moment quantique.

Lemme 2.5.2. *Tous les star-produits $\mathbb{S}$ -invariants sur $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$ sont $\mathbb{S}$ -équivalents.*

Démonstration. En vertu du théorème 2.1.12, l'assertion annoncée sera démontrée si le deuxième espace de cohomologie de De Rham $\mathbb{S}$ -invariant $H_{dR}^2(\mathbb{S})^{\mathbb{S}}$ est trivial. Pareillement au travail réalisé lors de la preuve du lemme 2.3.13, l'étude de l'espace $H_{dR}^2(\mathbb{S})^{\mathbb{S}}$ peut être ramenée au neutre du groupe $\mathbb{S}$ et la thèse revient alors à voir que tout 2-cocycle de Chevalley-Eilenberg défini sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est un 2-cobord. Au regard des relations (2.12), si $c_2 : \mathfrak{s} \times \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R}$ un tel 2-cocycle, nous constatons sans peine que l'application linéaire

$$c_1 : \mathfrak{s} \rightarrow \mathbb{R} : (aH + v + zE) \mapsto c_2 \left(H, \frac{z}{2} E + v \right)$$

satisfait à l'égalité $c_2(X, Y) = c_1([X, Y])$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{s}$. Dans ce cadre, ceci revient exactement à dire que l'application c_2 est un 2-cobord de Chevalley-Eilenberg, ce qui conclut la preuve. ■

En particulier, ce résultat nous indique qu'il n'est donc pas surprenant que pour chaque $T \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ tel que $T(*_{\nu}^0)$ soit un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$, il existe un opérateur $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et $T(*_{\nu}^0)$. Toutefois, l'énoncé du lemme 2.5.1 nous dit plus que cela, car il donne aussi une information sur le comportement de U par rapport à l'application moment quantique sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$ et à l'opérateur T dans le cas où celle-ci correspond à λ_{ν}^0 . Comme nous pouvons nous y attendre, ce point spécifique peut être généralisé au moyen d'une adaptation de la proposition 2.3.12 tenant compte du lemme 2.5.2.

Proposition 2.5.3. *Considérons $\sharp_{\nu}^0$ et $\sharp_{\nu}$ deux star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ ainsi qu'un opérateur linéaire $U^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ fourni par le lemme 2.5.2 définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et $\sharp_{\nu}^0$. Notons $\lambda_{\nu} \in \text{MQ}(*_{\nu}^0)$ l'application moment quantique*

sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$ et à l'opérateur $U^0 \circ T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$. Alors, les star-produits $\sharp_{\nu}^0$ et $\sharp_{\nu}$ sont G -équivalents si et seulement s'il existe un opérateur $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre les star-produits $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et $\sharp_{\nu}$ qui soit telle que

$$(U \circ T^0) \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}(X), -]_{*_{\nu}^0} \right) \circ (U \circ T^0)^{-1} = X^*$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. La condition suffisante est une conséquence directe de la proposition 2.3.12. Montrons la condition nécessaire. Supposons qu'il existe un opérateur $\mathcal{T} \in \text{Op}(\sharp_{\nu}^0)$ définissant une G -équivalence entre les star-produits $\sharp_{\nu}^0$ et $\sharp_{\nu}$. À partir de la définition 2.1.11, nous constatons alors que l'opérateur

$$U := \mathcal{T} \circ U^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$$

définit une $\mathbb{S}$ -équivalence entre les star-produits $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et $\sharp_{\nu}$. En utilisant successivement la définition de l'application moment quantique λ_{ν} et la version infinitésimale de la définition de G -équivalence entre star-produits G -invariants, nous obtenons alors les égalités

$$\begin{aligned} & (U \circ T^0) \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}(X), -]_{*_{\nu}^0} \right) \circ (U \circ T^0)^{-1} \\ &= \mathcal{T} \left[(U^0 \circ T^0) \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}(X), -]_{*_{\nu}^0} \right) \circ (U^0 \circ T^0)^{-1} \right] \circ \mathcal{T}^{-1} \\ &= \mathcal{T} \circ X^* \circ \mathcal{T}^{-1} = X^* \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. La preuve est ainsi complète. ■

Ce résultat peut donc être vu d'une certaine façon comme une généralisation du lemme 2.5.1. En particulier, il nous indique qu'une construction semblable à celle issue de la troisième reformulation est possible dans chaque classe de G -équivalence de star-produits G -invariants en conservant le star-produit $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ obtenu à la section 2.4 mais en travaillant avec d'autres applications moment quantique que λ_{ν}^0 .

2.5.2 Quand apparaissent les équations

Comme nous le suggère le lemme 2.5.1, nous allons maintenant entamer un parcours s'inscrivant dans la suite de la sous-section 2.4.1 afin de déterminer les

opérateurs $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ de la forme (2.3) définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre le star-produit $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$. Par définition même de l'action L et de la notion de $\mathbb{S}$ -équivalence entre star-produits, un tel opérateur U commute nécessairement avec les translations à gauche sur $\mathbb{S}$. En particulier, une généralisation du résultat [DK10, ch.11, thm.11.3] appliquée aux cas des opérateurs 1-différentiels nous indique que chaque ordre en ν de cet opérateur U est alors un opérateur de convolution avec une distribution sur $\mathbb{S}$ comme le formule le lemme suivant ; [C+82, ch.2, § 1], [DK10, ch.11 & ch.15], [B+09, ch.3, § 3].

Lemme 2.5.4. *Pour tout opérateur $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre le star-produit $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$, il existe une série formelle en ν à coefficients dans les distributions $u_{\nu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ vérifiant formellement*

$$U(f)(s_0) = \int_{\mathbb{S}} u_{\nu}(s^{-1}s_0) f(s) \, dL(s)$$

pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ et $s_0 \in \mathbb{S}$, la mesure dL étant celle de Lebesgue sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ en tant que mesure de Haar invariante à gauche sur $\mathbb{S}$.

Afin de faciliter les notations dans la suite, introduisons l'application

$$\rho_{\nu}^{\mathbb{S}} : X \in \mathfrak{g} \mapsto \rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X) := T^0 \circ \left(\frac{1}{2\nu} [\lambda_{\nu}^0(X), -]_{*_{\nu}^0} \right) \circ (T^0)^{-1} \quad (2.21)$$

où $\lambda_{\nu}^0 \in \text{MQ}(*_{\nu}^0)$ et $T^0 \in \text{Op}(*_{\nu}^0)$ sont respectivement l'application moment quantique définie au lemme 2.3.16 et l'opérateur linéaire introduit à la section précédente dont la forme non formelle est donnée en (2.18). Nous déduisons sans peine le lemme suivant de la proposition 2.3.3, des définitions 2.1.1 et 2.3.10, ainsi que des résultats sous-jacents à la définition de T^0 qui furent obtenus à la sous-section 2.4.1.

Lemme 2.5.5. *L'application $\rho_{\nu}^{\mathbb{S}}$ est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})[[\nu]]$. Elle constitue une extension de l'application*

$$\mathfrak{s} \rightarrow \text{Der}(*_{\nu}^{\mathbb{S}}) : X \mapsto X^*$$

à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et satisfait à l'égalité

$$\rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X) = \frac{1}{2\nu} [T^0(\lambda_{\nu}^0(X)), -]_{*_{\nu}^{\mathbb{S}}} \in \text{Der}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

La troisième reformulation à laquelle nous sommes arrivés à la sous-section précédente se réexprime en termes de cette représentation de $\mathfrak{g}$ en un problème de détermination de l'ensemble des opérateurs $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ satisfaisant l'égalité

$$U \circ \rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X) \circ U^{-1} = X^* \quad (2.22)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et un star-produit sur $\mathbb{S}$ admettant une expression non formelle.

Remarque 2.5.6. À partir de ce point, il semble bon de rappeler encore une fois au lecteur que la réalisation du programme susmentionné se fera essentiellement du point du vue formel. Tout comme ce fut le cas dans la section précédente présentant l'obtention d'une quantification par déformation à la fois formelle et non formelle $\mathbb{S}$ -invariante sur $\mathbb{S}$, les aspects fonctionnels seront à régler *a posteriori*. Dans le cadre de cette thèse nous ne pourrons malheureusement pas arriver jusqu'à un énoncé aussi précis que celui du théorème 2.4.7, ceci étant un travail de longue haleine. Notre travail nous permettra néanmoins d'exhiber explicitement tous les opérateurs $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ satisfaisant aux conditions décrites ci-dessus.

Considérons maintenant un opérateur U tel que décrit ci-dessus et notons v_{ν} la série formelle en ν à coefficients dans $\mathcal{D}'(\mathbb{S})$ que nous fournit le lemme 2.5.4 relativement à l'opérateur inverse U^{-1} . Pour chaque $X \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ et $s_0 \in \mathbb{S}$, nous remarquons que la relation (2.22) peut alors se récrire à travers les égalités

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}} (\rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X))_{s_0} (v_{\nu}(s^{-1}s_0)) f(s) \, dL(s) \\ &= (\rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X))_{s_0} \left(\int_{\mathbb{S}} v_{\nu}(s^{-1}s_0) f(s) \, dL(s) \right) = [(\rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X) \circ U^{-1})(f)](s_0) \\ &= [(U^{-1} \circ X^*)(f)](s_0) = \int_{\mathbb{S}} v_{\nu}(s^{-1}s_0) X_s^*(f) \, dL(s) \\ &= - \int_{\mathbb{S}} X_s^*(v_{\nu}(s^{-1}s_0)) f(s) \, dL(s), \end{aligned}$$

cette dernière suivant de la remarque 2.4.4 et du fait que le flot du champ de vecteurs X^* soit par définition même un sous-groupe à un paramètre de symplectomorphismes sur cette variété symplectique $(\mathbb{S}, 2(n+1)^{-1}\omega^{\mathbb{S}})$. À $X \in \mathfrak{g}$ fixé, la fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ apparaissant dans les égalités précédentes étant arbitraire, pour tout $s, s_0 \in \mathbb{S}$, il s'ensuit

$$(\rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X))_{s_0} (v_{\nu}(s^{-1}s_0)) = -X_s^*(v_{\nu}(s^{-1}s_0)). \quad (2.23)$$

Nous allons maintenant développer des résultats nous permettant une reformulation de la relation (2.23) en étudiant séparément chaque acteur intervenant dans celle-ci. Dans la suite, nous utiliserons les notations (1.35) issues des décompositions d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$ et de G .

Lemme 2.5.7. *Soit $X \in \mathfrak{g}$. Alors, dans les notations de cette sous-section, quels que soient $s_0, s \in \mathbb{S}$, nous avons l'égalité*

$$-X_s^*(v_\nu(s^{-1}s_0)) = ([\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_s)^*_{s^{-1}s_0}(v_\nu).$$

Démonstration. Notons $i_{\mathbb{S}}$ l'application qui à un élément $s \in \mathbb{S}$ associe son inverse $s^{-1} \in \mathbb{S}$. Pour tout $s_0, s \in \mathbb{S}$, en utilisant la définition de l'action L et du champ de vecteurs fondamental sur $\mathbb{S}$ associé à X , nous obtenons

$$\begin{aligned} -X_s^*(v_\nu(s^{-1}s_0)) &= -\frac{d}{dt}\bigg|_0 v_\nu\left((L_{\exp(-tX)}(s))^{-1}s_0\right) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 ((R_{s_0} \circ i_{\mathbb{S}})^* v_\nu)([\exp(tX)s]_{\mathbb{S}}) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 ((R_{s_0} \circ i_{\mathbb{S}} \circ L_s)^* v_\nu)([\exp(t \text{Ad}_{s^{-1}}(X))]_{\mathbb{S}}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous déduisons aisément du lemme 1.5.7 l'identité

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 [\exp(t \text{Ad}_{s^{-1}}(X))]_{\mathbb{S}} = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \exp(t [\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_s)$$

pour tout $s \in \mathbb{S}$, et donc

$$\begin{aligned} -X_s^*(v_\nu(s^{-1}s_0)) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 ((R_{s_0} \circ i_{\mathbb{S}} \circ L_s)^* v_\nu)(\exp(t [\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_s)) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 v_\nu(\exp(-t [\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_s) s^{-1}s_0) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 v_\nu\left(L_{\exp(-t [\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_s)}(s^{-1}s_0)\right), \end{aligned}$$

pour tout $s_0, s \in \mathbb{S}$. Ceci conclut la preuve. ■

Avant de passer à l'étude de l'autre membre de l'égalité (2.23), introduisons le lemme suivant davantage lié à la théorie de Lie élémentaire ainsi qu'à la structure des applications moment quantique.

Lemme 2.5.8. *Dans le cadre présenté lors de cette section, l'égalité*

$$(L_s^* \circ T^0)(\lambda_\nu^0(X)) = T^0(\lambda_\nu^0(\text{Ad}_{s^{-1}}(X)))$$

est satisfaite pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et pour tout $s \in \mathbb{S}$.

Démonstration. Commençons notre preuve en simplifiant les notations via l'introduction de l'application

$$\Lambda_\nu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]] : X \mapsto \Lambda_\nu(X) := T^0(\lambda_\nu^0(X)).$$

Compte tenu des définitions de l'application moment quantique $\lambda_\nu^0 \in \text{MQ}(*_\nu^0)$, de l'opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ et du star-produit $*_\nu^\mathbb{S} = T^0(*_\nu^0)$, nous en déduisons que Λ_ν est une application moment quantique sur $\mathbb{S}$ relativement au star-produit $*_\nu^\mathbb{S}$. En combinant ce fait au lemme 2.5.5, nous observons que l'application $\rho_\nu^\mathbb{S}$ définie en (2.21) constitue une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur

$$E := \text{im}(\Lambda_\nu) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]].$$

Par ailleurs, étant donné que l'application $\Lambda_\nu \in \text{MQ}(*_\nu^\mathbb{S})$ constitue un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{g}$ sur son image satisfaisant

$$\rho_\nu^\mathbb{S}(X) \circ \Lambda_\nu = \Lambda_\nu \circ \text{ad}_X$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous en tirons que les applications

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \rho_\nu^\mathbb{S} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$$

sont des représentations équivalentes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La restriction de cette seconde représentation à l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ étant un homomorphisme d'algèbres de Lie et le groupe de Lie $\mathbb{S}$ étant simplement connexe, le deuxième théorème de Lie nous garantit l'existence d'un unique homomorphisme de groupes de Lie

$$\mathcal{Q} : \mathbb{S} \rightarrow GL(E) \quad \text{tel que} \quad \mathcal{Q}_{\text{Id}} = \rho_\nu^\mathbb{S}|_{\mathfrak{s}}.$$

Or, le lemme 2.5.5 et les résultats obtenus ci-dessus nous indiquent que

$$\rho_\nu^\mathbb{S}(X) = X^* = \Lambda_\nu \circ \text{ad}_X \circ \Lambda_\nu^{-1}$$

pour tout $X \in \mathfrak{s}$. De là, nous en déduisons que les applications

$$\mathcal{Q}_1 : \mathbb{S} \rightarrow GL(E) : s \mapsto L_{s^{-1}}^* \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_2 : \mathbb{S} \rightarrow GL(E) : s \mapsto \Lambda \circ \text{Ad}_s \circ \Lambda^{-1}$$

sont deux homomorphismes de groupes de Lie intégrant $\rho_\nu^\mathbb{S}|_{\mathfrak{s}}$ au niveau du groupe de Lie $\mathbb{S}$. L'unicité d'une telle application nous permet de conclure la preuve. ■

Ce beau résultat nous permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 2.5.9. *Considérons $X \in \mathfrak{g}$. Dans le contexte de cette sous-section,*

$$(\rho_\nu^\mathbb{S}(X))_{s_0}(v_\nu(s^{-1}s_0)) = (\rho_\nu^\mathbb{S}(\text{Ad}_{s^{-1}}(X)))_{s^{-1}s_0}(v_\nu)$$

pour tout $s_0, s \in \mathbb{S}$.

Démonstration. Pour tout $s_0, s \in \mathbb{S}$, le lemme 2.5.5, l'invariance du star-produit $*_\nu^\mathbb{S}$ sous l'action du groupe de Lie $\mathbb{S}$ par translations à gauche et le lemme 2.5.8 nous permettent d'obtenir successivement les égalités

$$\begin{aligned} (\rho_\nu^\mathbb{S}(X))_{s_0}(v_\nu(s^{-1}s_0)) &= (\rho_\nu^\mathbb{S}(X))_{s_0}(L_{s^{-1}}^*(v_\nu)) \\ &= \frac{1}{2\nu} [T^0(\lambda_\nu^0(X)), L_{s^{-1}}^*(v_\nu)]_{*_\nu^\mathbb{S}}(s_0) \\ &= \frac{1}{2\nu} \left(L_{s^{-1}}^* \left([L_s^* \circ T^0](\lambda_\nu^0(X)), v_\nu \right)_{*_\nu^\mathbb{S}} \right)(s_0) \\ &= \frac{1}{2\nu} [T^0(\lambda_\nu^0(\text{Ad}_{s^{-1}}(X))), v_\nu]_{*_\nu^\mathbb{S}}(s^{-1}s_0). \end{aligned}$$

Une ultime application du lemme 2.5.5 nous fournit alors le résultat annoncé. ■

Ce travail nous permet enfin d'en arriver au point culminant de cette section.

Théorème 2.5.10. *À redéfinition du paramètre de déformation ν près, l'inverse de tout opérateur $U \in \text{Op}(*_\nu^\mathbb{S})$ définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre le star-produit $*_\nu^\mathbb{S}$ et un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$ est un opérateur de convolution dont le noyau v_ν est une série formelle en ν à coefficients dans les distributions sur $\mathbb{S}$ satisfaisant*

$$(\rho_\nu^\mathbb{S}(X))(v_\nu) = ([X]_\mathbb{S})^*(v_\nu) \quad (2.24)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. De plus, tous les star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ s'obtiennent de cette façon.

Démonstration. Considérons $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$. En vertu du lemme 2.5.7 et de la proposition 2.5.9, pour $X \in \mathfrak{g}$ et $s, s_0 \in \mathbb{S}$, la relation (2.23) se réécrit

$$(\rho_\nu^\mathbb{S}(\text{Ad}_{s^{-1}}(X)))_{s^{-1}s_0}(v_\nu) = ([\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_\mathbb{S})_{s^{-1}s_0}^*(v_\nu).$$

Pour chaque $X \in \mathfrak{g}$, il est donc clair que v_ν satisfait à (2.23) pour tout $s, s_0 \in \mathbb{S}$

si et seulement si

$$(\rho_\nu^{\mathbb{S}}(\text{Ad}_{s^{-1}}(X)))(v_\nu) = ([\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_{\mathfrak{s}})^*(v_\nu)$$

pour tout $s \in \mathbb{S}$. Par ailleurs, un calcul élémentaire nous indique qu'il existe, pour chaque $X \in \mathfrak{g}$, un élément $s \in \mathbb{S}$ tel que $\text{Ad}_{s^{-1}}(F) = X$, où F est le générateur du sous-espace de racine restreinte $\mathfrak{g}_{-2}$ tel que défini à la sous-section 1.5.1. En particulier, il s'ensuit que v_ν satisfait à l'égalité (2.23) pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et pour tout $s, s_0 \in \mathbb{S}$ si et seulement si v_ν satisfait à l'égalité (2.24) pour tout $X \in \mathfrak{g}$. En combinant ce dernier fait aux résultats 2.3.12, 2.3.13, 2.4.7, 2.5.1 et 2.5.4, nous remarquons que la preuve de ce théorème est ainsi complète. ■

Ce théorème constitue bien évidemment un résultat fondamental dans notre thèse. Il nous permet d'associer la recherche de star-produits G -invariants sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ à la résolution d'une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles généralisant les résultats obtenus dans l'article [B+09] pour $n = 1$. Toutefois, comme nous le verrons, ce nouveau problème n'en est pas moins trivial.

2.6 Résolution explicite

Au terme d'un suspense insoutenable, la sous-section précédente fut le théâtre de la découverte d'un résultat magnifique énoncé à travers le théorème 2.5.10. C'est précisément dans la lignée de celui-ci que va entièrement se jouer le dernier acte du programme évoqué dans l'introduction à la section 2.4 visant à résoudre, au moins du point de vue formel, le problème posé à la base de cette thèse dans la section 2.2. Et pour cela, dans ce contexte, nous allons bien évidemment nous attaquer à la détermination de l'ensemble

$$\{v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]] : (\rho_\nu^{\mathbb{S}}(X))(v_\nu) = ([X]_{\mathfrak{s}})^*(v_\nu) \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}\}$$

où $\rho_\nu^{\mathbb{S}}$ est la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie en (2.21) et $[X]_{\mathfrak{s}}$ désigne la composante en $\mathfrak{s}$ de $X \in \mathfrak{g}$ relativement à la décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{k}$. Pour rappel, ce fameux théorème 2.5.10 nous garantit que la résolution de ce système d'équations permettra, à redéfinition du paramètre de déformation ν près, de déterminer l'ensemble des star-produits G -invariants sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$, ce qui résoudra donc le problème posé dans notre thèse dans l'esprit rappelé à la remarque 2.5.6. Dans nos calculs, le paramètre réel de déformation $\hbar = 2i\nu$ sera toujours supposé positif.

2.6.1 Premier contact avec les équations

Dans cette sous-section, nous proposons au lecteur un premier contact avec une des équations faisant l'objet de l'introduction à cette section. Celui-ci s'avèrera d'une importance certaine dans la suite. Nous allons en effet donner une forme équivalente explicite de l'équation (2.24) pour l'élément $X = F$ générant le sous-espace de racine restreinte $\mathfrak{g}_{-2} \subset \mathfrak{g}$ tel qu'exposé à la sous-section 1.5.1. Pour cela, il nous suffit d'expliciter les opérateurs

$$\rho_\nu^\mathbb{S}(F) \quad \text{et} \quad ([F]_\mathfrak{s})^*,$$

ceux-ci étant tout deux des dérivations du star-produit $*_\nu^\mathbb{S}$ comme nous l'indique le lemme 2.5.5. Réaliser cette tâche pour l'opérateur $([F]_\mathfrak{s})^*$ est aisé. En effet, dans les notations de la sous-section 1.5.1, nous constatons que $F = -E + 2e_1$ avec $E \in \mathfrak{s}$ et $e_1 \in \mathfrak{k}$. Nous obtenons alors l'égalité $[F]_\mathfrak{s} = -E$ et il s'ensuit de la remarque 1.6.12 l'expression

$$([F]_\mathfrak{s})_{(a,v,z)}^* = -E_{(a,v,z)}^* = e^{-2a} \partial_z$$

pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

L'obtention d'une forme explicite semblable pour l'opérateur $\rho_\nu^\mathbb{S}(F) \in \text{Der}(*_\nu^\mathbb{S})$ est toutefois moins directe. À ces fins, introduisons la définition suivante.

Définition 2.6.1. En référant aux notations de la sous-section 1.5.3, définissons les opérateurs suivants sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})[[\nu]]$:

- (a) $\Theta := \frac{d}{dt}\big|_0 [v \in V \mapsto \exp(t \text{Id})(v)]^*$;
- (b) $\Xi := \frac{d}{dt}\big|_0 [v \in V \mapsto \exp(t J_{\text{Id}}^\mathbb{S})(v)]^*$;
- (c) Δ_V l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $(V, (-| -))$.

Dans les coordonnées d'Iwasawa, quelques calculs aux moyens des remarques 1.5.9(a) et 1.5.9(b) nous livrent pour chaque $v = \sum_l (v_l^1 b_l^1 + v_l^i b_l^i) \in V$ les formes explicites

$$\begin{aligned} \Theta|_v &= \partial_v = \sum_{l=1}^{n-1} \left[v_l^1 \partial_{v_l^1} + v_l^i \partial_{v_l^i} \right]; \\ \Xi|_v &= \sum_{l=1}^{n-1} \left[v_l^i \partial_{v_l^1} - v_l^1 \partial_{v_l^i} \right]; \\ \Delta_V|_v &= \Delta_V = \sum_{l=1}^{n-1} \left[\partial_{v_l^1}^2 + \partial_{v_l^i}^2 \right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.6.2. Bien que ces expressions soient standards dans un cadre euclidien, les définitions initiales fournies pour ces opérateurs nous rappellent que ceux-ci sont avant tout définis à travers la structure de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Comme formulé à la remarque 1.5.9, il en va de même pour le produit scalaire $(-|-) \in V^* \otimes V^*$ et la forme symplectique $\Omega \in V^* \otimes V^*$ directement issus des structures riemannienne et symplectique sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$. L'usage abondant que nous ferons de ces tenseurs et opérateurs dans la suite ne doit pas nous faire oublier qu'ils portent en eux une information sur la géométrie de la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

Ces opérateurs introduits, nous allons maintenant nous pencher sur la détermination de la dérivation $\rho_\nu^{\mathbb{S}}(F) \in \text{Der}(*_\nu^{\mathbb{S}})$ par des calculs analogues à ceux réalisés à la sous-section 2.4.1. Nous invitons donc le lecteur à se référer à la section attachée à cette dernière pour tout ce qui touche aux notations et concepts qui seront utilisés ci-dessous.

Étant donné l'expression (2.21), la première chose à faire afin de calculer la dérivation $\rho_\nu^{\mathbb{S}}(F) \in \text{Der}(*_\nu^{\mathbb{S}})$ est de calculer $\rho_\nu^0(F) \in \text{Der}(*_\nu^0)$ tel que donné en (2.14). Après un long et pénible calcul à partir de l'expression du $*_\nu^0$ -commutateur (2.6) et de la définition du moment quantique $\lambda_\nu^0(F)$ donnée au lemme 2.3.16, nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_\nu^0(F)|_{(a,v,z)} &= \frac{\lambda_\nu^0(F)}{\nu} \sinh(\nu \partial_z) \\ &\quad + 4e^{2a} \left[\frac{1+(v|v)}{2} \Xi|_v - z \partial_a \right] \cosh(\nu \partial_z) \\ &\quad + \nu e^{2a} \left[\frac{1+(v|v)}{2} \Delta_V + \Xi|_v^2 + \Theta|_v + \partial_a^2 \right] \sinh(\nu \partial_z) \\ &\quad + \frac{\nu^2}{2} e^{2a} \Xi|_v \Delta_V \cosh(\nu \partial_z) \\ &\quad + \frac{\nu^3}{16} e^{2a} \Delta_V^2 \sinh(\nu \partial_z) \end{aligned}$$

quel que soit $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Remarquons que nous avons omis le symbole de composition des opérateurs 1-différentiels dans l'expression précédente par facilité d'écriture. De là, en utilisant la transformée de Fourier partielle en la variable z sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ introduite via la définition 2.4.1 et toutes les notions et notations sous-jacentes à cette dernière abordées à la section 2.4, nous pouvons en déduire

$$(\mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(F) \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\nu} e^{2a} \sinh(i\nu\xi) \left[(1 + (v|v))^2 \text{Id} - 4\partial_\xi^2 \right] \\
&\quad - 4i e^{2a} \cosh(i\nu\xi) \left[\frac{i}{2} (1 + (v|v)) \Xi|_v + (2 + \partial_a) \partial_\xi \right] \\
&\quad + \nu e^{2a} \sinh(i\nu\xi) \left[(n-1) \text{Id} + (2 + \partial_a)^2 + \frac{1 + (v|v)}{2} \Delta_V + \Xi|_v^2 + \Theta|_v \right] \\
&\quad + \frac{\nu^2}{2} e^{2a} \cosh(i\nu\xi) \Xi|_v \Delta_V \\
&\quad + \frac{\nu^3}{16} e^{2a} \sinh(i\nu\xi) \Delta_V^2
\end{aligned}$$

pour tout $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Penchons-nous maintenant sur le calcul du changement de variables défini au moyen du difféomorphisme ψ dont l'expression explicite est donnée en (2.17). Afin de mener à bien ce calcul, commençons par voir comment interagit ce changement de variables avec les opérateurs 1-différentiels apparaissant dans l'égalité précédente. Après quelques calculs faisant notamment intervenir les résultats évoqués à la remarque 2.4.3, pour chaque $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}'$, nous obtenons :

- $\left((\psi^{-1})^* \circ (v|v) \text{Id} \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = \left(\cosh \left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^2 (v|v) \text{Id} ;$
- $\left((\psi^{-1})^* \circ \partial_a \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = \partial_a ;$
- $\left((\psi^{-1})^* \circ \Theta \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = \Theta|_v ;$
- $\left((\psi^{-1})^* \circ \Xi \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = \Xi|_v ;$
- $\left((\psi^{-1})^* \circ \Delta_V \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)} = \left(\cosh \left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^{-2} \Delta_V ;$
- $\left((\psi^{-1})^* \circ \partial_\xi \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)}$
 $= \cosh(\text{arcsinh}(i\nu\xi)) \partial_\xi - \frac{1}{\xi} \left(\sinh \left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^2 \Theta|_v ;$
- $\left((\psi^{-1})^* \circ \partial_\xi^2 \circ \psi^* \right) \Big|_{(a,v,\xi)}$
 $= (\cosh(\text{arcsinh}(i\nu\xi)))^2 \partial_\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} \left(\sinh \left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^4 \Theta|_v^2$
 $- \frac{2}{\xi} \cosh(\text{arcsinh}(i\nu\xi)) \left(\sinh \left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^2 \Theta|_v \partial_\xi$
 $- \xi \nu^2 \partial_\xi - \frac{1}{\xi^2} \left(\sinh \left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right)^2 \Theta|_v.$

Ces dernières égalités nous mettent en position de choix afin d'écrire explicitement l'opérateur

$$\square := (\psi^{-1})^* \circ \mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(F) \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \psi^* = \mathcal{F} \circ \rho_\nu^{\mathbb{S}}(F) \circ \mathcal{F}^{-1} \quad (2.25)$$

défini formellement sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}')[[\nu]]$. Si $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$, celui-ci est donné par

$$\begin{aligned} \square|_{(a,v,\xi)} = & \frac{i\xi e^{2a}}{4} \left[\left[\left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}\right) (v|v) + 2 \right]^2 + 4(n+3)\nu^2 \right] \text{Id} \\ & + 4i\nu^2 \xi e^{2a} \partial_a \\ & - 3i\nu^2 \xi e^{2a} \Theta|_v \\ & + e^{2a} \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}\right) (v|v) + 2 \right] \Xi|_v \\ & - 4i e^{2a} (2 - 3\nu^2 \xi^2) \partial_\xi \\ & + i\nu^2 \xi e^{2a} \partial_a^2 \\ & + \frac{i e^{2a}}{2\xi} \left[\nu^2 \xi^2 (v|v) - 2(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \right] \Delta_V \\ & - \frac{i}{\xi} e^{2a} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2})^2 (\Theta|_v^2 - \Theta|_v) \\ & + i\nu^2 \xi e^{2a} (\Xi|_v^2 + \Theta|_v) \\ & - 4i\xi e^{2a} (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_\xi^2 \\ & + \frac{2i}{\xi} e^{2a} \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \Theta|_v \partial_a \\ & - 4i e^{2a} (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_a \partial_\xi \\ & + 4i e^{2a} \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \Theta|_v \partial_\xi \\ & - \frac{1}{\xi^2} e^{2a} \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \Xi|_v \Delta_V \\ & + \frac{i}{4\xi^3} e^{2a} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2})^2 \Delta_V^2. \end{aligned}$$

À la vue de cette expression, la peur peut logiquement s'emparer du lecteur (et de l'auteur), d'autant plus que nous savons qu'il ne s'agit que d'un des opérateurs apparaissant dans une des nombreuses équations que nous devons résoudre.

Remarque 2.6.3. Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur trois points concernant la forme de l'opérateur $\square$.

- (a) Une telle forme de l'opérateur $\square$ n'est pas si suprenante car nous cherchons à entrelacer $\rho_\nu^0(F) \in \text{Der}(*_\nu^0)$ par l'opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ et son inverse.

Or, ce dernier a été choisi à la sous-section 2.4.1 de telle façon à obtenir un star-produit $\mathbb{S}$ -invariant sur $\mathbb{S}$ à partir du star-produit de Moyal $*_{\nu}^0$. Il n'est donc pas adapté pour obtenir des expressions particulières lors de l'entrelacement des dérivations $\rho_{\nu}^0(X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$ tel que $X \neq [X]_{\mathbb{S}}$.

(b) La très grande quantité de termes contenant l'expression

$$\sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}$$

est due à un choix d'écriture évitant les fonctions hyperboliques. Nous aurions bien sûr pu procéder différemment, notamment en exprimant l'entièreté des coefficients en termes des expressions

$$\sinh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(\nu\xi)}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \cosh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(\nu\xi)}{2}\right).$$

Le passage d'une écriture à l'autre se fait via les égalités de la remarque 2.4.3 (a).

(c) Les termes de l'opérateur $\square$ sont écrits par ordre croissant relativement au degré des opérateurs de dérivation qui y apparaissent, le degré maximal valant, quant à lui, 4. En particulier, pour chaque $v = \sum_l (v_l^1 b_l^1 + v_l^i b_l^i) \in V$, nous avons les égalités

$$\begin{aligned} \Theta|_v^2 - \Theta|_v &= \sum_{l,l'=1}^{n-1} \left[v_l^1 v_{l'}^1 \partial_{v_l^1} \partial_{v_{l'}^1} + 2 v_l^1 v_{l'}^i \partial_{v_l^1} \partial_{v_{l'}^i} + v_l^i v_{l'}^i \partial_{v_l^i} \partial_{v_{l'}^i} \right]; \\ \Xi|_v^2 + \Theta|_v &= \sum_{l,l'=1}^{n-1} \left[v_l^i v_{l'}^i \partial_{v_l^1} \partial_{v_{l'}^1} - 2 v_l^i v_{l'}^1 \partial_{v_l^1} \partial_{v_{l'}^i} + v_l^1 v_{l'}^1 \partial_{v_l^i} \partial_{v_{l'}^i} \right]. \end{aligned}$$

Afin de limiter notre souffrance calculatoire, nous éviterons le calcul de l'expression $\mathcal{F}^{-1} \circ \square \circ \mathcal{F}$ en travaillant avec l'entracement des équations (2.24) par la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ et son inverse quand la situation le nécessite. Ainsi, nous rechercherons l'ensemble des noyaux d'opérateurs de convolution $v_{\nu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ tels que

$$\vartheta := \mathcal{F}(v_{\nu}) : (a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi} v_{\nu}(a, v, z) dz \quad (2.26)$$

satisfasse pour chaque $X \in \mathfrak{g}$ l'équation

$$(\mathcal{F} \circ \rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X) \circ \mathcal{F}^{-1})(\vartheta) = (\mathcal{F} \circ ([X]_{\mathbb{S}})^{\star} \circ \mathcal{F}^{-1})(\vartheta). \quad (2.27)$$

Un rapide calcul nous montre que

$$(\mathcal{F} \circ ([F]_{\mathbb{S}})^{\star} \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} = (\mathcal{F} \circ (-E)^{\star} \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} = i\xi e^{-2a} \operatorname{Id}$$

pour tout $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}'$. L'équation (2.27) pour $X = F$ se réécrit alors

$$\square|_{(a,v,\xi)}(\vartheta) = i\xi e^{-2a} \vartheta(a, v, \xi) \quad (2.28)$$

pour $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}'$. Soulignons ici que l'auteur passa une année afin de résoudre cette équation et exhiba en 2012 une classe de solutions obtenue par des techniques de séparation de variables. Le résultat final de cette résolution est présentée à l'appendice B. Nous avons cependant réalisé par la suite qu'il existait une méthode bien plus efficace afin de venir à bout de la résolution de toute la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles. C'est vers celle-ci que s'orienteront les sous-sections à venir. La résolution explicitée à l'appendice B ne sera toutefois pas complètement vaine comme nous le verrons à la sous-section 2.7.2.

2.6.2 Quelques commentaires sur le problème

Après avoir constaté avec émoi le travail qui nous attendait, l'heure est venue de révéler la vérité au lecteur. Cette énorme équation (2.28) que nous avons exhibée à la sous-section précédente ne doit en réalité pas nécessairement être résolue. Historiquement, ce fait fut constaté après la résolution de tout le système d'équations aux dérivées partielles issu du théorème 2.5.10. Nous choisissons ici de ne pas laisser planer le suspense plus longtemps et de dévoiler le raisonnement amenant à de telles conclusions.

Revenons pour cela en arrière et partons de l'équation de départ (2.22) portant sur l'opérateur $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ censé définir une $\mathbb{S}$ -équivalence entre le star-produit $*_{\nu}^{\mathbb{S}}$ et un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$. Comme il transparaît à travers la preuve du théorème 2.5.10, cette équation pour $X = F$ semble jouer un rôle particulier. Mettons ce fait au clair. Comme nous l'avons vu lors des sous-sections 1.6.1 et 2.5.2, les applications

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \rho_{\nu}^{\mathbb{S}}(X) \quad \text{et} \quad X \in \mathfrak{g} \mapsto X^*$$

définissent toutes deux des représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il s'ensuit alors le lemme suivant.

Lemme 2.6.4. *Tout opérateur $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ satisfaisant l'équation (2.22) pour deux éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ satisfait également cette équation pour tout multiple de ceux-ci, de même que pour leur crochet de Lie.*

Semblablement à un raisonnement maintes fois établi, la version infinitésimale de la définition 2.1.11 et le lemme 2.5.5 nous permettent de remarquer que l'équation (2.22) est triviale pour $X \in \mathfrak{s}$. Or, si nous utilisons la structure de la décomposition en sous-espaces de racine restreinte de $\mathfrak{g}$ via l'appendice A, nous constatons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est complètement générée par les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{g}_{-2}$ via des combinaisons de crochets de Lie d'éléments de celles-ci. Nous en concluons alors par le lemme 2.6.4 que si l'équation (2.22) est satisfaite pour $X = F$, alors elle le sera pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Ce résultat bien sympathique ne nous est toutefois d'aucune utilité. En effet, comme l'indiquent les développements de la sous-section 2.5.2, la résolution de l'équation (2.22) pour $X = F$ oblige la résolution de l'équation (2.24) pour tout $X \in \{\text{Ad}_s(F) : s \in \mathbb{S}\}$, c'est-à-dire pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Un autre réflexe logique qui nous vient alors est d'essayer d'obtenir un résultat analogue au lemme 2.6.4 portant directement sur l'équation (2.24). Cette approche ne s'avère malheureusement pas concluante étant donné que nous nous heurtons à la présence de l'application

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto [X]_{\mathfrak{s}}$$

engendrant la perte de la propriété de représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à ces équations, ceci étant précisément ce point qui nous permettait l'obtention du lemme 2.6.4. Toutefois, l'astuce afin d'obtenir le résultat annoncé est toute autre que de nous concentrer sur l'équation (2.24). Elle consiste à revenir en arrière et à travailler de nouveau avec l'équation (2.22) en utilisant la même méthode que celle nous ayant permis d'obtenir le premier résultat de cette sous-section, mais en tenant compte cette fois-ci de l'apparition des actions adjointes dans la preuve du théorème 2.5.10.

Proposition 2.6.5. *Dans les notations de la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte, considérons un opérateur linéaire $U \in \text{Op}(*_{\nu}^{\mathbb{S}})$ dont l'inverse est un opérateur de convolution dont le noyau $v_{\nu} \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ satisfait l'équation (2.24) pour tout*

$$X \in W := \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-1}.$$

Alors, v_{ν} satisfait automatiquement à l'équation (2.24) pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. En utilisant le lemme 1.5.4, l'égalité $\text{Ad}_{\exp(X)} = \exp(\text{ad}_X)$ valable pour $X \in \mathfrak{g}$ et la proposition 1.4.8(a), nous obtenons sans peine

$$\{\text{Ad}_s(X) : s \in \mathbb{S} \text{ et } X \in W\} = W.$$

Par conséquent, si v_ν satisfait (2.24) pour tout $X \in W$, alors

$$(\rho_\nu^{\mathbb{S}}(\text{Ad}_{s^{-1}}(X)))(v_\nu) = ([\text{Ad}_{s^{-1}}(X)]_{\mathfrak{s}})^*(v_\nu)$$

pour tout $s \in \mathbb{S}$ et $X \in W$. Le lemme 2.5.7, la proposition 2.5.9 et les considérations de la sous-section 2.5.2 introduisant l'équation (2.23) nous permettent alors d'affirmer que l'opérateur U satisfait à l'équation (2.22) pour tout $X \in W$. Par ailleurs, étant donné que l'appendice A nous fournit l'égalité

$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \mathfrak{g}_{-2},$$

le lemme 2.6.4 nous garantit que l'équation (2.22) est automatiquement vérifiée par U quel que soit $X \in \mathfrak{g} = W \oplus \mathfrak{g}_{-2}$. D'où, l'opérateur U définit une $\mathbb{S}$ -équivalence entre le star-produit $*_\nu^{\mathbb{S}}$ et un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$, et la thèse s'ensuit alors du théorème 2.5.10. ■

Comme annoncé en début de sous-section, cette proposition constitue en soit un résultat magnifique à plus d'un titre.

- (i) D'un point de vue général de la théorie des équations aux dérivées partielles, pour un analyste ou un ingénieur, s'attaquer à la résolution de l'équation (2.28) n'est bien évidemment pas une sinécure. La grande force du résultat que nous avons obtenu est de fournir gratuitement des solutions à celle-ci via la résolution d'autres équations qui s'avèreront au final plus simples à résoudre, comme nous le verrons dans la sous-section suivante.
- (ii) D'un point de vue de la théorie de Lie, ce qui est remarquable est que la preuve de ce résultat soit en bonne partie guidée par les propriétés de la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte. L'information que nous donne cette décomposition de l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de l'espace que nous souhaitons quantifier semble donc jouer un rôle primordial ici.

2.6.3 Apparition d'une notion de radialité

À la suite des deux sous-sections précédentes, il est maintenant temps de s'attaquer à la résolution du problème mentionné dans l'introduction à cette section, à savoir la résolution de la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles

$$\{(\rho_\nu^{\mathbb{S}}(X))(v_\nu) = ([X]_{\mathfrak{s}})^*(v_\nu) : X \in \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-1}\}$$

où $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ est un noyau d'opérateur de convolution à déterminer. Pour rappel, l'équation (2.24) pour $X \in \mathfrak{g}_{-2}$ peut être écartée de ce système en vertu de la proposition 2.6.5. Cette équation n'est d'ailleurs pas la seule qui puisse subir ce sort comme nous l'indique le lemme suivant.

Lemme 2.6.6. *L'équation (2.24) est trivialement vérifiée pour tout $X \in \mathfrak{s}$.*

Ce lemme découle directement des égalités

$$\rho_\nu^\mathbb{S}(X) = X^* \quad \text{et} \quad [X]_\mathfrak{s} = X$$

valables pour chaque $X \in \mathfrak{s}$, cette première étant obtenue via le lemme 2.5.5.

Analysons maintenant l'équation (2.24) pour $X \in \mathfrak{m}$. Clairement, étant donné l'inclusion $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$, pour tout $X \in \mathfrak{m}$, l'égalité

$$[X]_\mathfrak{s} = 0$$

est une évidence. Comme nous l'avons fait dans la sous-section 2.6.1, pour $X \in \mathfrak{m}$ arbitrairement fixé, calculons maintenant l'opérateur $\rho_\nu^\mathbb{S}(X) \in \text{Der}(*_\nu^\mathbb{S})$. Notons tout d'abord que le moment quantique $\lambda_\nu^0(X)$ correspond exactement au moment associé à X . Tel qu'exposé aux lemmes 2.3.16 et 1.6.11, celui-ci est une fonction polynomiale d'ordre 2 en les composantes du vecteur $v \in V$. En particulier, il suit directement de la définition d'application moment et de l'expression (2.6) l'égalité

$$\frac{1}{2\nu} [\lambda_\nu^0(X), -]_{*_\nu^0} = \{\lambda_X^\mathbb{S}, -\} = X^*.$$

Par ailleurs, au vu de la forme du moment $\lambda_X^\mathbb{S}$, la remarque 1.6.12 nous indique que le champ de vecteurs fondamental X^* évalué au point $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est de la forme

$$X_{(a,v,z)}^* = \sum_{l=1}^{n-1} \left(L_l^1(v) \partial_{v_l^1} - L_l^i(v) \partial_{v_l^i} \right) \quad (2.29)$$

où $L_l^1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $L_l^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications linéaires sur V pour tout $1 \leq l \leq n-1$. Sachant ce fait, un rapide calcul nous livre sans difficulté

$$\rho_\nu^\mathbb{S}(X) = T^0 \circ X^* \circ (T^0)^{-1} = X^*$$

pour l'opérateur $T^0 \in \text{Op}(*_\nu^0)$ défini en (2.18). Ceci nous mène au lemme suivant.

Lemme 2.6.7. *Un noyau d'opérateur de convolution $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ satisfait l'équation (2.24) pour $X \in \mathfrak{m}$ si et seulement si $X^*(v_\nu) = 0$.*

Considérons maintenant un tel noyau $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ tel que $X^*(v_\nu) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{m}$. Par définition des coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$ et de l'action L de G sur $\mathbb{S}$, pour chaque $X \in \mathfrak{m}$ et $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$, étant donné l'inclusion $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$, nous avons

$$\begin{aligned} & L_{\exp(-tX)}(a, v, z) \\ &= [\exp(-tX)(a, v, z)]_{\mathbb{S}} \\ &= [\exp(\text{Ad}_{\exp(-tX)}(aH)) \exp(\text{Ad}_{\exp(-tX)}(v)) \exp(\text{Ad}_{\exp(-tX)}(zE))]_{\mathbb{S}} \\ &= [\exp(e^{\text{ad}(-tX)}(aH)) \exp(e^{\text{ad}(-tX)}(v)) \exp(e^{\text{ad}(-tX)}(zE))]_{\mathbb{S}} \\ &= (a, \text{Ad}_{\exp(-tX)}(v), z), \end{aligned}$$

cette dernière égalité découlant des relations

$$[X, H] = [X, E] = 0 \quad \text{et} \quad [X, v] \in V$$

comme conséquence de la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte. Par définition du champ de vecteurs fondamental associé à X , nous obtenons alors

$$X_{(a,v,z)}^*(v_\nu) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[(R_{(0,0,z)} \circ L_{(a,0,0)})^* v_\nu \right] (\text{Ad}_{\exp(-tX)}(v))$$

pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $v \in V$, l'appendice A nous garantit l'égalité

$$\left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(-tX)}(v) = [v, X] : X \in \mathfrak{m} \right\} = \{v' \in V : (v'|v) = 0\}.$$

Ceci signifie donc que la dépendance de v_ν en la variable $v \in V$ se réduit en une dépendance en la direction purement radiale de $v \in V$ relativement au produit scalaire $(-|-) \in V^* \otimes V^*$ défini à la remarque 1.5.9(b).

Remarque 2.6.8. Cette dépendance radiale en v de v_ν peut se réinterpréter de façon équivalente au moyen des points (a) et (b) de la remarque 1.5.3. En effet, l'action adjointe du sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ sur $V \subset \mathfrak{s}$ peut se voir comme l'action du groupe $U(n-1)$ sur $\mathbb{C}^{n-1}$ à travers les isomorphismes explicités dans cette remarque, et il est bien connu que l'action du groupe $U(n-1)$ est transitive sur la sphère unité

$$S^{2n-3} \subset \mathbb{C}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{2(n-1)} \simeq V.$$

Réciproquement, le lecteur pourra très facilement vérifier à partir de l'expression des champs de vecteurs fondamentaux associés aux éléments de $\mathfrak{m}$ sur $\mathbb{S}$ que cette condition de radialité en la variable $v \in V$ sur $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ est également suffisante pour assurer l'égalité $X^*(v_\nu) = 0$ pour tout $\mathfrak{m}$. Nous obtenons donc le résultat énoncé ci-dessous.

Lemme 2.6.9. *Une série formelle $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ constituant le noyau d'un opérateur de convolution satisfait la relation $X^*(v_\nu) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{m}$ si et seulement si elle est radiale en la variable $v \in V$ relativement au produit scalaire $(-|-) \in V^* \otimes V^*$ défini à la remarque 1.5.9(b).*

La grande force de ce résultat est de réduire considérablement le nombre de variables de notre problème de $2n$ à seulement 3. Dans la suite, nous dirons plus simplement qu'une telle *solution* v_ν à la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles est *radiale* en la variable $v \in V$. À nouveau, semblablement à la remarque 2.6.2, nous insistons sur le fait que cette notion de radialité est d'une certaine façon définie à partir de la structure riemannienne de la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

2.6.4 Vers une réduction de la hiérarchie d'EDP

À la suite des deux sous-sections précédentes, la résolution de la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles nous concernant dans cette section a fait des progrès fabuleux. En effet, les lemmes 2.6.6 et 2.6.9, couplés à la proposition 2.6.5, permettent de réduire notre problème à la seule recherche des noyaux d'opérateurs de convolution $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ radiaux en la variable $v \in V$ et satisfaisant l'équation (2.24) pour tout $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Comme déjà deux fois précédemment, la première chose à faire afin de nous attaquer à ces équations est d'explicitier les opérateurs

$$\rho_\nu^{\mathbb{S}}(X) \quad \text{et} \quad ([X]_{\mathbb{S}})^*,$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Au vu de l'expression des moments quantiques associés aux éléments de $\mathfrak{g}_{-1}$, nous flairons toutefois des difficultés calculatoires afin d'obtenir ce premier. Le souvenir effroyable des équations obtenues à la sous-section 2.6.1 étant encore dans toutes les mémoires, plutôt que de nous lancer à corps perdu dans un combat calculatoire intense, nous allons essayer d'exploiter intelligemment les résultats que nous avons déjà à notre disposition. En effet, il nous suffit de penser encore une fois à la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte et d'aller jeter un œil à l'appendice A pour constater que, pour chaque $X \in \mathfrak{g}_{-1}$,

il existe $w \in V = \mathfrak{g}_1$ tel que $[F, w] = X$. Comme, par le lemme 2.5.5, l'application $\rho_\nu^\mathbb{S}$ constitue une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous pouvons calculer plus simplement $\rho_\nu^\mathbb{S}|_{\mathfrak{g}_{-1}}$ en nous ramenant à des opérateurs que nous connaissons via les égalités

$$\rho_\nu^\mathbb{S}([F, w]) = [\rho_\nu^\mathbb{S}(F), \rho_\nu^\mathbb{S}(w)] = [\rho_\nu^\mathbb{S}(F), w^\star] \in \text{Der}(\ast_\nu^\mathbb{S})$$

pour $w \in V$. La nécessité de travailler avec l'opérateur $\rho_\nu^\mathbb{S}(F)$ nous incite toutefois à utiliser la formulation de nos équations donnée en (2.27). Dans cet esprit, reprenons les notations de la sous-section 2.6.1 où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ désignent respectivement la transformée de Fourier partielle en la variable z sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et son inverse telles que données à la définition 2.4.1 avec les propriétés qui lui sont formellement associées via la remarque 2.4.2. Posons

$$\vartheta := \mathcal{F}(v_\nu)$$

tel qu'explicité en (2.26) où $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ est le noyau de l'opérateur de convolution indéterminé dans nos équations. Notons que si v_ν est radial en $v \in V$, alors il en va de même pour ϑ . Dès lors, la résolution de notre hiérarchie d'équations aux dérivées partielles revient à déterminer l'ensemble des solutions ϑ radiales en $v \in V$ satisfaisant l'équation

$$(\mathcal{F} \circ \rho_\nu^\mathbb{S}([F, w]) \circ \mathcal{F}^{-1})(\vartheta) = (\mathcal{F} \circ ([F, w]_\mathbb{S})^\star \circ \mathcal{F}^{-1})(\vartheta)$$

pour tout $w \in V$.

Explicitons maintenant les deux opérateurs apparaissant ci-dessus. Fixons

$$w = \sum_{l=1}^{n-1} (w_l^1 b_l^1 + w_l^i b_l^i) \in V.$$

En utilisant la base de $\mathfrak{g}$ issue de sa décomposition en sous-espaces de racine restreinte définie à la sous-section 1.5.1, comme

$$[c_l^1]_\mathfrak{s} = b_l^1 \quad \text{et} \quad [c_l^i]_\mathfrak{s} = b_l^i$$

pour tout $1 \leq l \leq n-1$, nous obtenons les égalités

$$[[F, w]]_\mathfrak{s} = \left[\sum_{l=1}^{n-1} (2w_l^1 c_l^i - 2w_l^i c_l^1) \right]_\mathfrak{s} = 2 \sum_{l=1}^{n-1} (w_l^1 b_l^i - w_l^i b_l^1) \in V.$$

Dès lors, en reprenant l'expression de l'opérateur

$$(\psi^{-1})^\star \circ \mathcal{F} \circ \rho_\nu^0(v_0) \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \psi^\star = \mathcal{F} \circ (v_0)^\star \circ \mathcal{F}^{-1}$$

que nous avons obtenue à la sous-section 2.4.1 pour $v_0 \in V$ arbitraire, quelques calculs nous livrent la forme explicite

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} \circ ([F, w]_s)^* \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} &= -2i\xi e^{-a} (w|v) \text{Id} \\ &\quad + 2e^{-a} \left[\sum_{l=1}^{n-1} (w_l^i \partial_{v_l^1} - w_l^1 \partial_{v_l^i}) \right] \end{aligned}$$

pour tout $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Par ailleurs, quel que soit $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}'$, en utilisant un peu de courage ainsi que les expressions explicites des opérateurs $\square := \mathcal{F} \circ \rho_\nu^{\mathbb{S}}(F) \circ \mathcal{F}^{-1}$ et $\mathcal{F} \circ w^* \circ \mathcal{F}^{-1}$ respectivement données aux sous-sections 2.6.1 et 2.4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \square_w|_{(a,v,\xi)} &:= (\mathcal{F} \circ \rho_\nu^{\mathbb{S}}([F, w]) \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a,v,\xi)} \\ &= \left[\square|_{(a,v,\xi)}, -\frac{i\xi}{2} e^{-a} \Omega(w, v) \text{Id} - e^{-a} \partial_w \right] \\ &= \left[i\xi e^a \left[(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) (v|v) + 2 \right] (w|v) \right] \text{Id} \\ &\quad - \left[e^a (1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \Omega(w, v) \right] \text{Id} \\ &\quad - \left[e^a (1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \Omega(w, v) \right] \partial_a \\ &\quad + \left[e^a (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \Omega(w, v) \right] \Theta|_v \\ &\quad + \left[2e^a (1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) (w|v) \right] \Xi|_v \\ &\quad + \left[e^a \left[(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) (v|v) + 2 \right] \right] \Xi_w \\ &\quad - \left[2e^a \xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \Omega(w, v) \right] \partial_\xi \\ &\quad - \left[\frac{ie^a}{\xi} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) (w|v) \right] \Delta_V \\ &\quad + \left[\frac{2ie^a}{\xi} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \right] \Theta|_v \Theta_w \\ &\quad - \left[\frac{2ie^a}{\xi} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \right] \Xi|_v \Xi_w \\ &\quad - \left[\frac{2ie^a}{\xi} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \right] \partial_a \Theta_w \\ &\quad - \left[4ie^a \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right] \partial_\xi \Theta_w \\ &\quad - \left[\frac{e^a}{\xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \right] \Delta_V \Xi_w, \end{aligned}$$

où, par facilité, nous avons posé $\Theta_w := \partial_w$ et $\Xi_w := \sum_l (w_l^i \partial_{v_l^1} - w_l^1 \partial_{v_l^i})$.

La combinaison de ces calculs avec les résultats 2.6.5, 2.6.6 et 2.6.9 nous permet d'en tirer la proposition suivante.

Proposition 2.6.10. *La résolution de la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles mentionnées dans l'introduction à cette section revient à trouver les solutions ϑ radiales en $v \in V$ satisfaisant l'équation*

$$\square_w|_{(a,v,\xi)}(\vartheta) = -2i\xi e^{-a}(w|v)\vartheta + 2e^{-a}\Xi_w(\vartheta) \quad (2.30)$$

pour tout $w \in V$ et $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}'$. En particulier, toute telle solution ϑ vérifie automatiquement (2.28).

Ce qui est remarquable dans cet énoncé est que tout le système d'équations aux dérivées partielles de départ se retrouve finalement dans cette seule équation paramétrisée par l'élément $w \in V$. Ce qui est moins amusant est la forme *a priori* compliquée de cette équation, même si la plupart des coefficients des opérateurs de dérivation intervenant dans celle-ci sont relativement semblables et globalement plus simples que dans l'équation (2.28).

Nous allons maintenant exploiter l'information issue du lemme 2.6.9 concernant la radialité des solutions en $v \in V$. Dans la suite, nous noterons r la variable radiale dont dépend ϑ . Relativement à la variable $v \in V$, celle-ci est bien évidemment donnée par

$$r = \sqrt{(v|v)}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine le lemme suivant.

Lemme 2.6.11. *Dans le cadre exposé ci-dessus, si nous considérons $\vartheta = \vartheta(a, v, \xi)$ défini sur $\mathbb{S}'$ comme étant purement radiale en la variable $v \in V$, alors, pour tout $w \in V$, nous avons les identités suivantes :*

- $\Theta|_v(\vartheta) = r \partial_r(\vartheta) ;$
- $\Xi|_v(\vartheta) = 0 ;$
- $\Theta_w(\vartheta) = \frac{(w|v)}{r} \partial_r(\vartheta) ;$
- $\Xi_w(\vartheta) = \frac{\Omega(w,v)}{2r} \partial_r(\vartheta) ;$
- $\Delta_V(\vartheta) = \partial_r^2(\vartheta) + \frac{2n-3}{r} \partial_r(\vartheta) ;$
- $\left(\Theta|_v^2 - \Theta|_v\right)(\vartheta) = r^2 \partial_r^2(\vartheta) ;$

- $\left(\Xi|_v^2 + \Theta|_v\right)(\vartheta) = r \partial_r(\vartheta);$
- $\Theta|_v(\Theta_w(\vartheta)) = (w|v) \partial_r^2(\vartheta);$
- $\Xi|_v(\Xi_w(\vartheta)) = \Theta_w(\vartheta) = \frac{(w|v)}{r} \partial_r(\vartheta);$
- $\Xi|_v(\Delta_V(\vartheta)) = 0;$
- $\Delta_V(\Xi_w(\vartheta)) = \frac{\Omega(w,v)}{2r} \left[\partial_r^3(\vartheta) + \frac{2n-3}{r} \partial_r^2(\vartheta) - \frac{2n-3}{r^2} \partial_r(\vartheta) \right];$
- $\Delta_V^2(\vartheta) = \partial_r^4(\vartheta) + \frac{2(2n-3)}{r} \partial_r^3(\vartheta) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{r^2} \partial_r^2(\vartheta) - \frac{(2n-3)(2n-5)}{r^3} \partial_r(\vartheta).$

Pour $w \in V$, si nous insérons maintenant dans l'équation (2.30) une solution $\vartheta : (a, v, \xi) \in \mathbb{S}' \mapsto \vartheta(a, v, \xi)$ dont la dépendance en la variable $v \in V$ est purement radiale, nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}
0 = & \left[i \xi e^a \left[\left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) r^2 + 2 + 2 i \xi e^{-a} \right] (w|v) \right] \vartheta \\
& - \left[e^a \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \Omega(w, v) \right] \vartheta \\
& - \left[e^a \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \Omega(w, v) \right] \partial_a(\vartheta) \\
& + \left[e^a \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) - \frac{e^{-a}}{r} \right] \Omega(w, v) r \partial_r(\vartheta) \\
& + \left[e^a \left[\left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) r^2 + 2 \right] \right] \frac{\Omega(w, v)}{2r} \partial_r(\vartheta) \\
& - \left[2 e^a \xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \Omega(w, v) \right] \partial_\xi(\vartheta) \\
& - \left[\frac{i e^a}{\xi} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) (w|v) \right] \left(\partial_r^2(\vartheta) + \frac{2n-3}{r} \partial_r(\vartheta) \right) \\
& + \left[\frac{2 i e^a}{\xi} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \right] (w|v) \partial_r^2(\vartheta) \\
& - \left[\frac{2 i e^a}{\xi} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \right] \frac{(w|v)}{r} \partial_r(\vartheta) \\
& - \left[\frac{2 i e^a}{\xi} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \right] \frac{(w|v)}{r} \partial_a(\partial_r(\vartheta)) \\
& - \left[4 i e^a \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right] \frac{(w|v)}{r} \partial_\xi(\partial_r(\vartheta)) \\
& - \left[\frac{e^a}{\xi^2} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \right] \frac{\Omega(w, v)}{2r} \left[\frac{2n-3}{r} \partial_r^2(\vartheta) - \frac{2n-3}{r^2} \partial_r(\vartheta) \right] \\
& - \left[\frac{e^a}{\xi^2} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \right] \frac{\Omega(w, v)}{2r} \partial_r^3(\vartheta).
\end{aligned}$$

Force est de constater que cette indication sur le comportement radial de ϑ en $v \in V$ simplifie miraculeusement notre problème. En effet, nous constatons que le coefficient de chaque opérateur de dérivation de l'équation précédente comprend un et un seul facteur parmi $(w|v)$ et $\Omega(w, v)$, respectivement indiqués en bleu et rouge dans l'équation. De plus, en dehors de ces deux expressions, la variable v n'apparaît nulle part ailleurs dans l'équation. Étant donné que ϑ ne dépend que des variables (a, r, ξ) et doit être solution de cette équation pour tout $w \in V$, l'équation va nécessairement se casser en deux parties admettant respectivement $(w|v)$ et $\Omega(w, v)$ comme facteur mis en évidence.

Après quelques calculs, nous en déduisons qu'une solution $\vartheta = \vartheta(a, v, \xi)$ radiale en $v \in V$ vérifie (2.30) pour tout $w \in V$ si et seulement si elle satisfait aux équations :

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad 0 &= r \xi^2 \left[r^2 \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) + 2 e^{-2a} + 2 \right] \vartheta \\
 &\quad - (2n - 1) \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r (\vartheta) \\
 &\quad + r \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r^2 (\vartheta) \\
 &\quad - 2 \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_a (\partial_r (\vartheta)) \\
 &\quad - 4 \xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \partial_r (\partial_\xi (\vartheta));
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad 0 &= 2 r^3 \xi^2 \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \vartheta \\
 &\quad + 2 r^3 \xi^2 \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_a (\vartheta) \\
 &\quad - ((2n - 3) + r^4 \xi^2) \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r (\vartheta) \\
 &\quad - \left(2 r^2 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} - 2 e^{-2a} + 2 \right) r^2 \xi^2 \partial_r (\vartheta) \\
 &\quad + 4 r^3 \xi^3 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \partial_\xi (\vartheta) \\
 &\quad + (2n - 3) r \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r^2 (\vartheta) \\
 &\quad + r^2 \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r^3 (\vartheta).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Sans affirmer que ces deux équations aux dérivées partielles sont faciles à résoudre, nous sommes quand même relativement loin de la difficulté qu'aurait représenté la résolution abrupte des équations (2.30) et (2.28) en toute généralité. Sans être comprise de façon intrinsèque par rapport à notre problème initial de quantification

par déformation, cette scission de l'équation (2.30) en deux parties (que nous aurions envie d'appeler respectivement *symétrique* et *anti-symétrique*) est clairement reliée à la structure de variété kählérienne de la boule unité de $\mathbb{C}^n$.

Remarque 2.6.12. Soulignons qu'il réside une très grande beauté dans tout ce que nous avons raconté jusqu'à présent dans cette section concernant la résolution de la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles de départ. En effet, nous sommes arrivés à réduire notre problème en deux équations explicitement plus simples sans faire en aucun cas appel à des techniques barbares et inélégantes de résolution d'équations aux dérivées partielles mais essentiellement en utilisant des outils inspirés de la géométrie de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ et de la théorie de Lie sous-jacente au groupe des automorphismes de ce domaine borné symétrique. Comme nous le signalions ci-dessus, l'impact de l'entière de ces aspects n'est toutefois pas encore bien interprété intrinsèquement par rapport à notre problème initial. Enfin, comme nous avons pu le constater maintes fois dans ce chapitre, il existe clairement un lien entre le sous-espace de racine restreinte dans lequel se trouve un élément $X \in \mathfrak{g}$ et la complexité de la forme explicite de l'équations (2.24) associée à X . L'ordre dans lequel nous considérons la résolution de ces équations est primordial dans le succès de notre approche et il est remarquable que cet ordre soit précisément celui dicté par la structure de la décomposition en sous-espaces de racine restreinte du groupe des automorphismes de l'espace sur lequel nous travaillons.

2.6.5 Résolution effective

À la suite des considérations de la sous-section précédente, l'objectif de cette dernière étape dans la résolution de la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles issue du théorème 2.5.10 est limpide. Relativement aux trois variables réelles a , r et ξ , nous allons déterminer d'un point de vue analytiquement formel les solutions $\vartheta = \vartheta(a, r, \xi)$ aux équations (2.31) et (2.32).

De façon cohérente avec l'approche que nous utilisons depuis le début de cette section, nous choisissons de nous attaquer à l'équation semblant la plus simple et d'ordre le moins élevé en premier lieu, à savoir l'équation (2.31). Nous ne présenterons ici que les grandes étapes de cette résolution, ce genre de calcul mêlant changements de variables et transformées de Fourier partielles ayant déjà été plusieurs fois exposés dans ce texte.

Commençons par définir l'application

$$\Phi_r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \left[(\sqrt{2}i\nu)^{-1}, +\infty \right[$$

dont la valeur au point (a, r, ξ) de son domaine de définition est donnée par

$$\left(\text{sign}(\xi) e^{-2a} \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right), r^2 \sqrt{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}, \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}}{2i\nu} \right).$$

Le lecteur vérifiera sans peine qu'il s'agit d'un difféomorphisme à partir duquel nous pouvons définir un changement de variables local s'appliquant à notre équation (2.31). Si nous appelons $(p, x, y) \in \text{im}(\Phi_r)$ les nouvelles variables ainsi définies, après quelques calculs, celui-ci nous livre alors l'équation aux dérivées partielles

$$\left[xy + \frac{1}{i\nu} + \frac{|p|}{4} \left(\frac{1}{i\nu} \right)^3 \frac{1}{y^2} \right] \vartheta = \frac{n}{y} \partial_x (\vartheta) + \partial_x (\partial_y (\vartheta)), \quad (2.33)$$

en ayant préalablement mis le facteur $2i\nu r \xi^2$ en évidence dans l'équation (2.31).

Remarque 2.6.13. Le lecteur est bien entendu en droit de se demander quelles sont les origines d'un tel difféomorphisme. Celui-ci fut en réalité découvert par des méthodes heuristiques s'inspirant à la fois des considérations que nous aborderons à la sous-section 2.7.3 et du travail réalisé dans l'appendice B lorsque nous avons déterminé des solutions à l'équation (2.28). Étant donné que ces deux parties de notre travail, en particulier l'appendice B, détaillent relativement bien ce genre de raisonnements, nous avons choisi de ne pas expliciter ici l'ensemble des méandres calculatoires nous ayant mené à la définition de ce changement de variables afin de ne pas alourdir davantage ce texte.

Pour tout $(p, x, y) \in \text{im}(\Phi_r)$, posons

$$\varpi(p, x, y) := y^n \vartheta(p, x, y).$$

L'équation (2.33) se récrit alors en une équation portant sur $\varpi = \varpi(p, x, y)$ admettant la forme

$$\left[xy + \frac{1}{i\nu} + \frac{|p|}{4} \left(\frac{1}{i\nu} \right)^3 \frac{1}{y^2} \right] \varpi = \partial_x (\partial_y (\varpi)),$$

où le facteur y^{-n} a été mis en évidence. Quitte à considérer une extension adéquate de ϖ pour $x < 0$, nous pouvons appliquer une transformée de Fourier partielle en la variable x en tout point semblable à celle de la définition 2.4.1 aux deux membres

de cette équation. En effectuant cette opération dans l'esprit de la remarque 2.4.2, nous obtenons alors l'équation aux dérivées partielles

$$-i \left[\frac{1}{i\nu} + \frac{|p|}{4} \left(\frac{1}{i\nu} \right)^3 \frac{1}{y^2} \right] \hat{\varpi} = \eta \partial_y (\hat{\varpi}) - y \partial_\eta (\hat{\varpi}), \quad (2.34)$$

où $\hat{\varpi}$ est défini par

$$\hat{\varpi}(p, \eta, y) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\eta} \varpi(p, x, y) dx$$

pour tout triple de réels (p, η, y) tel que cela fasse sens. Nous pouvons alors faire un nouveau changement de variables et travailler en coordonnées polaires $\{(s, \theta)\}$ sur la portion du plan formée par les variables $\{(\eta, y)\}$. Plus précisément, en posant

$$\begin{cases} \eta = s \cos(\theta) \\ y = s \sin(\theta) \end{cases},$$

l'expression de l'équation (2.34) dans les variables (p, s, θ) nous livre

$$\partial_\theta (\hat{\varpi}) = -i \left[\frac{1}{i\nu} + \frac{|p|}{4} \left(\frac{1}{i\nu} \right)^3 \left(\frac{1}{s \sin(\theta)} \right)^2 \right] \hat{\varpi}.$$

Clairement, dans ces nouvelles coordonnées, la solution la plus générale à cette équation s'obtient par simple intégration. Celle-ci est de la forme

$$\hat{\varpi}(p, s, \theta) = f(p, s) \exp \left[-i \left(\frac{\theta}{i\nu} - \frac{|p|}{4} \left(\frac{1}{i\nu} \right)^3 \frac{\cotan(\theta)}{s^2} \right) \right], \quad (2.35)$$

où $f(p, s)$ est arbitraire.

Le mode opératoire décrit ci-dessus afin d'obtenir, dans une certaine mesure, toutes les solutions à l'équation (2.31) n'est bien évidemment pas adapté à l'obtention d'une version particulièrement simplifiée de l'équation (2.32). Toutefois, dans les variables (p, s, θ) , les candidats au titre de solution de notre système d'équations aux dérivées partielles sont donnés sous une forme particulièrement simple via l'expression (2.35). Il est donc logique de tenter de réexprimer l'équation (2.32) dans ces variables et d'y injecter une solution de la forme (2.35) afin de voir s'il est possible de déduire une plus grande spécification de celle-ci.

Après avoir appliqué successivement à l'équation (2.32) le changement de variables issu du difféomorphisme Φ_1 , le changement d'indéterminée $\varpi = y^n \vartheta$, la transformée de Fourier partielle en la variable x et le changement de variables en

coordonnées polaires sur les variables η et y , nous obtenons sans trop de mal la version équivalente de l'équation (2.32) dans les variables (p, s, θ) qui suit :

$$\begin{aligned} & \left[4(n-3)\nu^2 s^2 + 4\nu s^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{|p|}{\nu} \cotan(\theta) + 2(n-1) \right] \hat{\omega} \\ &= 4p \partial_p (\hat{\omega}) \\ &+ 2s(1+2\nu^2 s^2) \partial_s (\hat{\omega}) \\ &- 4\nu^2 s^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \partial_\theta (\hat{\omega}). \end{aligned}$$

Notons que, grâce à la transformée de Fourier partielle en x , nous obtenons une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 alors que celle de laquelle nous sommes partis était d'ordre 3. Ceci est bien évidemment de bonne augure pour la suite. Remplaçons maintenant $\hat{\omega}$ par l'expression donnée en (2.35). Après mise en évidence d'un facteur 2, ceci nous livre l'équation suivante sur $f = f(p, s)$:

$$\left[4\nu^2 s^2 - (n-1)(1+2\nu^2 s^2) \right] f + 2p \partial_p (f) + s(1+2\nu^2 s^2) \partial_s (f) = 0.$$

Quelques calculs nous mènent alors à redéfinir une nouvelle fois notre indéterminée. En effet, si nous posons

$$F(p, s) := \left(\frac{1}{p s^{n-3}} \right) f(p, s),$$

alors nous observons que l'équation que nous avons obtenue ci-dessus se récrit

$$2p \partial_p (F) + s(1+2\nu^2 s^2) \partial_s (F) = 0$$

le facteur $p s^{n-3}$ ayant été mis en évidence dans chaque terme. Un peu de réflexion et un nouveau changement de variables nous permettent alors de constater que la solution générale à cette équation est de la forme

$$F(p, s) = g\left(\left(\frac{1+2\nu^2 s^2}{s^2}\right)p\right)$$

où g est ici arbitraire et dépend d'une variable réelle.

Dès lors, dans les variables (p, s, θ) , nous obtenons la solution générale

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(p, s, \theta) &= g\left(\left(\frac{1+2\nu^2 s^2}{s^2}\right)p\right) s^{n-3} p \\ &\exp\left[-i\left(\frac{\theta}{i\nu} - \frac{|p|}{4}\left(\frac{1}{i\nu}\right)^3 \frac{\cotan(\theta)}{s^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la transformée de Fourier partielle inverse

$$\varpi(p, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\eta} \hat{\varpi}(p, \eta, y) d\eta$$

quand celle-ci est bien définie, pour $(p, x, y) \in \text{im}(\Phi_r)$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \vartheta(p, x, y) &= y^{-n} \varpi(p, x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi y^n} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{ix\eta} g\left(\left(2\nu^2 + \frac{1}{\eta^2 + y^2}\right)p\right) \left(\sqrt{\eta^2 + y^2}\right)^{n-3} p \\ &\quad \exp\left[-\frac{\text{arccotan}\left(\frac{\eta}{y}\right)}{\nu} - \frac{|p|}{4\nu^3} \left(\frac{\eta}{y(\eta^2 + y^2)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Comme $y > 0$, nous pouvons effectuer sans soucis le changement de variable $\gamma = \frac{\eta}{y}$ dans l'intégrale précédente et réexprimer ϑ dans les coordonnées (a, v, ξ) de départ au moyen du changement de variables inverse défini par Φ_r . Enfin, en utilisant la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$ telle qu'introduite à la sous-section 2.4.1, quelques lignes de calculs et l'énoncé du théorème 2.5.10 nous amènent au résultat principal de ce texte.

Théorème 2.6.14. *À redéfinition du paramètre de déformation ν près, pour tout star-produit G -invariant $\sharp_\nu$ sur $\mathbb{S}$, il existe un opérateur linéaire $U \in \text{Op}(*_\nu^\mathbb{S})$ définissant $\mathbb{S}$ -équivalence entre les star-produits $*_\nu^\mathbb{S}$ et $\sharp_\nu$ dont l'inverse est un opérateur de convolution possédant un noyau $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ de la forme*

$$\begin{aligned} v_\nu(a, v, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \nu^2 \text{sign}(\xi) e^{-2a + i\xi z} \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \left(\sqrt{\gamma^2 + 1}\right)^{n-3} \\ &\quad g\left[-4\nu^2 \text{sign}(\xi) e^{-2a} \left(\frac{1}{\gamma^2 + 1} - \cosh^2\left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right)\right)\right] \\ &\quad \exp\left[-\frac{\text{arccotan}(\gamma)}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} \left(\frac{e^{-2a}}{\gamma^2 + 1} + \cosh^2\left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right)(v|v)\right)\right] \end{aligned}$$

où $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})[[\nu]]$ est une série formelle en ν à coefficients dans les distributions sur $\mathbb{R}$ arbitraire. En outre, toute solution $v_\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S})[[\nu]]$ à la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles

$$\{(\rho_\nu^\mathbb{S}(X))(v_\nu) = ([X]_\mathbb{S})^*(v_\nu) : X \in \mathfrak{g}\}$$

est de la forme susmentionnée, et une telle solution est associée à la définition d'un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$ si et seulement si elle constitue le noyau d'un opérateur de convolution $\mathbb{S}$ -équivalent inversible.

À partir de ce théorème nous souhaitons faire deux remarques complémentaires.

Remarque 2.6.15.

- (a) Bien que ce résultat soit complètement explicite, il est donné sous forme brute. Il serait plus qu'intéressant de retravailler les expressions fournies de ces noyaux de telle façon à faire apparaître des solutions particulières pouvant peut-être s'avérer très simples. Par ailleurs, comme maintes fois expliqué dans ce texte, ce résultat est obtenu via une approche formelle. Un travail rigoureux d'analyse fonctionnelle semblable à celui évoqué dans la sous-section 2.4.2 doit être mené afin de déterminer les conditions permettant une définition propre de quantifications par déformations non formelles G -invariantes sur $\mathbb{S}$ à partir de ces expressions.
- (b) Comme nous l'indiquent les propositions 2.6.5 et 2.6.10, l'équation (2.28) admet nécessairement pour solutions la transformée de Fourier partielle en z des noyaux explicités au théorème précédent. Bien qu'étant extrêmement longue et pénible, cette vérification est toutefois indispensable afin de s'assurer de la cohérence des calculs complexes effectués durant ce chapitre. Nous n'allons bien évidemment pas détailler la centaine de pages que cette vérification nécessite dans le présent texte mais simplement souligner qu'elle fut couronnée de succès à la fois au travers de calculs réalisés *à la main*, mais également via un contrôle des résultats par des méthodes numériques.

2.7 Au-delà des équations

Comme expliqué dans la section 2.2, le travail que nous avons exposé jusqu'à présent dans ce chapitre peut se voir comme une généralisation d'une partie des résultats abordés dans l'article [B+09] traitant le cas $n = 1$ associé au disque de Poincaré. Dans cet article, les auteurs utilisent une approche relativement semblable à celle que nous avons exposée. Ils présentent notamment des résultats analogues aux théorèmes centraux 2.5.10 et 2.6.14 que nous avons obtenus. Dans cette section, nous souhaitons initier le lecteur à la question légitime du lien entre notre travail et celui de l'article [B+09]. De façon plus précise, dans une approche comparative avec cet article, nous nous pencherons ici sur l'obtention d'une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles semblables à (2.24) dans le cas $n = 1$ ainsi que sur la résolution de cette dernière.

2.7.1 Lien entre les équations dans le cas $n > 1$ et $n = 1$

Le problème du cas limite $n = 1$ n'est pas aisé à appréhender. En effet, cette limite reste avant tout une limite sur l'espace sur lequel nous travaillons, c'est-à-dire une limite de variétés. Comme nous avons eu l'occasion de nous en rendre compte en long et en large dans la première partie de ce texte, il existe une différence structurelle beaucoup plus importante entre les cas $n = 1$ et $n = 2$ qu'entre les cas $n = 2$ et $n > 2$. Comme il fut évoqué à plusieurs reprises dans la section 1.5, cette différence peut mathématiquement se voir au niveau des coordonnées d'Iwasawa sur le groupe de Lie $\mathbb{S}$ comme la présence d'une coordonnée supplémentaire $v \in V$ lorsque $n > 1$. Au-delà du développement des résultats de la section 2.5, ce sont surtout nos calculs qui, suite à la présence de celle-ci, s'en sont trouvés considérablement plus compliqués. Après avoir réussi à surmonter cet obstacle, il semble donc particulièrement intéressant de nous pencher sur la question du passage du cas $n > 1$ au cas $n = 1$ tout en recoupant nos résultats avec le contenu de l'article [B+09].

Afin d'évoquer la question de ce calcul limite, nous allons utiliser une approche heuristique visant à comparer les objets mathématiques intervenant dans le cas $n = 1$ avec ceux que nous avons calculés pour $n > 1$. Commençons notre étude par une observation issue du premier chapitre de ce texte. Dans la section 1.5, et dans la suite du premier chapitre, nous avons très régulièrement mentionné ce qu'il advenait des expressions associées à la structure de la boule unité $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$ quand nous passions du cas $n > 1$ au cas $n = 1$. Une observation *a posteriori* nous permet de constater que, dans tous les cas, ce passage s'effectue en posant $n = 1$ et $v = 0$ dans les expressions définies pour $n > 1$ dans les coordonnées d'Iwasawa $(a, v, z) \in \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Étant donné que nous avons les identifications

$$\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$$

pour $n = 1$, ceci revient à considérer l'espace vectoriel $V = \mathfrak{g}_1$ comme étant réduit au neutre ce qui est bien évidemment consistant avec la définition de V comme un espace vectoriel de dimension $2(n - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. À partir de ces observations portant sur la géométrie de la boule unité de $\mathbb{C}^n$, la définition suivante semble légitime.

Définition 2.7.1. Pour une application $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ définie sur $\mathbb{S}$ dans les coordonnées d'Iwasawa $(a, v, z) \in \mathbb{S}$ pour $n > 1$ et dont la dépendance en n en tant que paramètre peut être explicite, la *limite pour n tendant vers 1* de f

est une fonction définie dans les coordonnées d'Iwasawa $(a, z) \in \mathbb{S}$ sur le disque de Poincaré $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$ par

$$\left[\lim_{n \rightarrow 1} (f) \right] (a, z) := \left[\lim_{v \rightarrow 0} f(a, v, z) \right] \Big|_{n=1} = f(a, 0, z) \Big|_{n=1} .$$

Bien évidemment, cette notion nous garantit une cohérence entre les fonctions obtenues à la suite des calculs réalisés dans le chapitre 1 pour $n > 1$ et les expressions analogues valides dans le cas $n = 1$.

Comme nous l'avons vu dans notre texte, notre travail n'est pas fait que d'applications définies sur $\mathbb{S}$ mais également d'opérateurs 1-différentiels, et notamment ceux apparaissant dans les équations (2.24). Il faut donc également réfléchir quelque peu à la notion de limite que nous pourrions définir sur de tels opérateurs. En utilisant la notation de la sous-section 2.2.2 consistant à noter $\mathcal{I}$ l'ensemble des indices associés aux coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$, un opérateur 1-différentiel $\mathcal{O}$ défini sur $\mathbb{S}$ s'écrit

$$\mathcal{O}|_{(a,v,z)} = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I}^p \\ p < p_0}} f_I(a, v, z) \partial_I$$

pour tout $(a, v, z) \in \mathbb{S}$, avec $p_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f_I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ quel que soit $I \in \{\mathcal{I}^p : 0 \leq p < p_0\} =: \mathcal{I}^{<p_0}$. Dans ce cas, la notion de limite donnée à la définition 2.7.1 s'applique aux fonctions f_I apparaissant dans cette expression. Tout l'enjeu consiste donc à définir la limite des opérateurs de dérivation ∂_I pour $I \in \mathcal{I}^{<p_0}$. La façon la plus naturelle de procéder consiste tout simplement à considérer la restriction de ceux-ci aux fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ ne dépendant pas de la variable $v \in V$, vu que c'est finalement ce qui se passe dans le cas $n = 1$. Ainsi, pour $I = (i_1, \dots, i_{|I|}) \in \mathcal{I}^{<p_0}$, si nous posons $n_a := |\{k \in \mathbb{N} : i_k = a\}|$ et $n_z := |\{k \in \mathbb{N} : i_k = z\}|$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow 1} (\partial_I) := \begin{cases} \partial_a^{n_a} \partial_z^{n_z} & \text{si } n_a + n_z = |I| \\ 0 \text{ Id} & \text{sinon} \end{cases} .$$

Un peu de réflexion à partir de ce raisonnement heuristique nous mène alors à une définition équivalente et davantage intrinsèque de ce concept de limite d'opérateurs.

Définition 2.7.2. Pour $n > 1$, définissons les applications

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{S} : (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ \text{et } P : \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R} &\simeq \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, v, y) \mapsto (x, y) . \end{aligned}$$

Si $\mathcal{O}$ est opérateur 1-différentiel sur $\mathbb{S}$ pour $n > 1$ dont l'expression dépend potentiellement explicitement de n en tant que paramètre, la *limite pour n tendant vers 1* de $\mathcal{O}$ est l'opérateur 1-différentiel défini sur le disque de Poincaré $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^2$ par

$$\lim_{n \searrow 1} (\mathcal{O}) := [j_0^* \circ \mathcal{O} \circ P^*]|_{n=1}.$$

Notons qu'à travers cette égalité, nous retrouvons d'une certaine façon le contenu de la définition 2.7.1 dans le cas de l'opérateur $f \text{Id}$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$.

Après avoir introduit cette définition mathématiquement propre et heuristiquement justifiée, la question présente dans tous les esprits est celle de son application aux équations issues du théorème 2.5.10 et du lien avec l'article [B+09]. Nous allons ici travailler avec les équations fournies en (2.27) et dans les notations de la définition 2.4.1. Ainsi, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ désignent respectivement la transformée de Fourier partielle en z sur $\mathbb{S}$ et son inverse, les équations dont il est question forment une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles

$$\left\{ \mathcal{O}_X^{(n)}(\vartheta) := [\mathcal{F} \circ (\rho_\nu^{\mathbb{S}}(X) - ([X]_{\mathfrak{s}})^*) \circ \mathcal{F}^{-1}](\vartheta) = 0 : X \in \mathfrak{g} \right\}$$

portant sur ϑ tel que défini en (2.26), où $\rho_\nu^{\mathbb{S}}$ est la représentation de $\mathfrak{g}$ donnée en (2.21) et $[X]_{\mathfrak{s}}$ désigne la composante en $\mathfrak{s}$ de X dans la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$. Comme le précise la remarque 1.5.1, relativement à la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de racine restreinte présentée à la sous-section 1.5.1, pour $n = 1$, nous avons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{m} = \{0\}$. Dès lors, lorsque $n = 1$, étant donné que le lemme 2.6.6 reste d'application et que l'opérateur $\mathcal{O}_X^{(1)}$ est linéaire en $X \in \mathfrak{g}$, la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles susmentionnée se réduit à la seule équation non triviale $\mathcal{O}_F^{(1)}(\vartheta) = 0$. Dans l'article [B+09], les auteurs arrivèrent à des conclusions analogues en fournissant l'expression d'un opérateur semblable à celui défini en (2.25) dans le cas $n > 1$. Dans nos notations et à un facteur -4 près, pour tout $(a, \xi) \in \mathbb{S}'$, celui-ci est très exactement donné par

$$\begin{aligned} \square_k^{\text{BDS}}|_{(a, \xi)} &:= 4i\xi e^{2a} [k + \nu^2] \text{Id} \\ &\quad - 4i e^{2a} [-\nu^2 \xi \partial_a + (2 - 3\nu^2 \xi^2) \partial_\xi] \\ &\quad - 4i e^{2a} \left[-\frac{\nu^2}{4} \xi \partial_a^2 + \xi (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_\xi^2 + (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_a \partial_\xi \right] \end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ est un paramètre défini dans l'article [B+09] et semblable à celui décrit dans les conventions géométriques de la section 2.2.

Pour tout $(a, \xi) \in \mathbb{S}'$, vu que nous avons l'égalité

$$(\mathcal{F} \circ ([F]_{\mathfrak{s}})^* \circ \mathcal{F}^{-1})|_{(a, \xi)} = i \xi e^{-2a} \text{Id},$$

l'équation à considérer relativement à cet opérateur est alors

$$\mathcal{O}_k^{\text{BDS}}(\vartheta) = 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{O}_k^{\text{BDS}}|_{(a, \xi)} := \square_k^{\text{BDS}}|_{(a, \xi)} - i \xi e^{-2a} \text{Id}.$$

Comme nous l'indique le lemme suivant, ces derniers faits, tirés de l'article [B+09] et de l'étude de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, peuvent en réalité complètement se déduire de la notion de limite sur les opérateurs 1-différentiels sur $\mathbb{S}' \simeq \mathbb{S}$ que nous avons introduite à la définition 2.7.2.

Lemme 2.7.3. *Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, si $[X]_F \in \mathbb{R}$ désigne la composante de X dans la direction $F \in \mathfrak{g}_{-2} \subset \mathfrak{g}$ respectivement à la base de $\mathfrak{g}$ issue de sa propre décomposition en sous-espaces de racine restreinte, alors*

$$\lim_{n \rightarrow 1} \left(\mathcal{O}_X^{(n)} \right) = [X]_F \mathcal{O}_{\frac{1}{4}}^{\text{BDS}}.$$

Démonstration. Montrons ce lemme en parcourant un à un les sous-espaces de racine restreinte de $\mathfrak{g}$ tel que nous l'avons fait lors de la section précédente afin d'étudier ces opérateurs.

- (i) Pour $X \in \mathfrak{s}$, l'assertion est triviale en vertu du lemme 2.6.6.
- (ii) Pour $X \in \mathfrak{m}$, nous déduisons du lemme 2.6.7, de l'expression (2.29) et de la définition 2.4.1, l'égalité

$$\mathcal{O}_X^{(n)}|_{(a, v, \xi)} = \sum_{l=1}^{n-1} \left(L_l^1(v) \partial_{v_l^1} - L_l^i(v) \partial_{v_l^i} \right)$$

pour tout $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}'$, où $L_l^1, L_l^i \in V^*$ quel que soit $1 \leq l \leq n-1$. Dès lors, une simple application de la définition 2.7.2 nous permet de constater que la limite de $\mathcal{O}_X^{(n)}$ pour n tendant vers 1 est l'opérateur identiquement nul.

- (iii) Pour $X \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-2}$, la thèse suit d'un calcul direct visant à appliquer la définition 2.7.2 aux expressions explicites des opérateurs $\mathcal{O}_X^{(n)}$ ayant été obtenues aux sous-sections 2.6.1 et 2.6.4.

■

Remarque 2.7.4. Le fait que le paramètre $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ apparaissant dans l'expression de l'opérateur $\mathcal{O}_k^{\text{BDS}}$ se retrouve fixé dans ce lemme n'est pas étrange.

Compte tenu de la définition de celui-ci, il s'agit d'une simple conséquence de la remarque 2.3.15 dans laquelle nous avons fixé préalablement une valeur précise du paramètre similaire que nous avons obtenu dans le cas $n > 1$ afin de faire nos calculs.

Ce lemme a le mérite de dresser un lien mathématiquement clair entre l'équation $\mathcal{O}_k^{\text{BDS}}(\vartheta) = 0$ de l'article [B+09] pour le cas $n = 1$ et la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles apparaissant dans le cas $n > 1$ que nous avons résolue lors de la section précédente. Cette compréhension est bien entendu importante car ces équations gèrent dans les deux cas l'obtention de tous les star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ comme le formulent les résultats 2.5.10 et 2.6.14 ainsi que la référence [B+09, ch.3].

2.7.2 Des équations aux solutions

Dans la sous-section précédente, nous avons établi un concept de limite pour n tendant vers 1 sur l'ensemble des opérateurs 1-différentiels définis sur $\mathbb{S}$. Nous avons également montré la consistance de celui-ci dans la formulation d'un lien entre la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles issues du théorème 2.5.10 dans le cas $n > 1$ et une équation jouant un rôle analogue dans l'article [B+09] dans le cas du disque de Poincaré.

En reprenant exactement les mêmes notations que dans la sous-section précédente, nous souhaiterions revenir brièvement avec le lecteur sur l'un des tout beaux résultats de la section 2.6, à savoir, la proposition 2.6.5. Dans le cas $n > 1$, celle-ci nous garantit qu'une solution ϑ au système d'équations aux dérivées partielles

$$\left\{ \mathcal{O}_X^{(n)}(\vartheta) = 0 : X \in \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \right\} \quad (2.36)$$

est nécessairement solution à l'équation $\mathcal{O}_F^{(n)}(\vartheta) = 0$, et donc, en d'autres termes, solution à l'équation (2.28). En ce sens, le résultat du lemme 2.7.3 est particulièrement remarquable. En effet, il nous affirme que c'est précisément la limite pour n tendant vers 1 de cet opérateur $\mathcal{O}_F^{(n)}$ n'apportant pas d'information spécifique dans le cas $n > 1$ qui définit complètement l'unique équation du cas $n = 1$ tandis que tous les autres opérateurs sont envoyés sur 0 Id. Dès lors, nous pouvons tout doucement nous demander si cette fameuse équation (2.28) ne contiendrait pas plus d'informations que la proposition 2.6.5 pourrait nous laisser le penser. Grâce

au travail effectué dans l'appendice B, nous sommes capables de lever un coin du voile sur ce mystère.

Proposition 2.7.5. *Il existe des solutions ϑ à l'équation (2.28) qui ne sont pas solutions au système d'équations aux dérivées partielles (2.36). Un exemple de telles solutions est donné de façon complètement explicite par*

$$\begin{aligned} \vartheta(a, v, \xi) = \frac{\alpha}{i\nu\xi} \exp \left[(-1)^j \frac{\xi e^{-2a}}{2} + \frac{(-1)^k}{i\nu} (v|v) \cosh^2 \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right. \\ \left. + (-1)^l \left((n-1) - \frac{(-1)^k}{i\nu} \right) \frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right] \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $j, k, l \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Afin de montrer ce lemme, il nous suffit de voir que la solution explicitement proposée ϑ vérifie bien l'équation (2.28) mais ne satisfait pas au système d'équations aux dérivées partielles (2.36). Remarquons tout d'abord que cette solution ϑ est radiale en $v \in V$ et peut donc se récrire uniquement en termes des variables a, r et ξ en posant $(v|v) = r^2$ dans l'expression ci-dessus. Clairement, en utilisant les conclusions obtenues au terme de la sous-section 2.6.4, en vertu des lemmes 2.6.6 et 2.6.9, ϑ satisfait au système d'équations aux dérivées partielles (2.36) si et seulement si $\vartheta = \vartheta(a, r, \xi)$ vérifie les deux équations 2.31 et 2.32. Le reste de la preuve de cette proposition se résume donc à injecter l'expression explicite de ϑ dans

- (i) la version de l'équation (2.28) fournie en début d'appendice B dans le cas d'une indéterminée radiale en v ;
- (ii) les équations 2.31 et 2.32 ;

et à vérifier que l'équation est satisfaite dans le premier cas, mais qu'au moins l'une des deux équations ne l'est pas dans le second. Nous laissons le soin au lecteur de faire ces vérifications dont nous donnons la version numérique en appendice C. ■

Remarque 2.7.6. Si les considérations de l'appendice C ou quelques calculs réalisés *à la main* suffisent à montrer que les solutions exhibées dans l'énoncé de ce lemme satisfont bien l'équation (2.28), aucune de ces preuves ne justifie pleinement l'apparition de solutions aussi simples analytiquement parlant. Comme nous l'avons mentionné plus haut, ces dernières trouvent en réalité leurs origines dans les calculs que nous avons réalisés lors de l'appendice B. Plus précisément, elles furent déduites à partir de combinaisons linéaires des solutions explicitées à

la fin de l'appendice B en considérant des choix adéquats de constantes complexes $\hat{\delta}$, $\hat{\epsilon}$, C_1^I , C_1^K , $C_{2,0}^M$, $C_{2,0}^U$, $C_{2,1}^M$, $C_{2,1}^U$, C_3^P et C_3^Q . Ces choix furent, quant à eux, pleinement dictés par les propriétés des fonctions spéciales entrant en jeu dans ce contexte. Le lecteur vérifiera sans peine que les propriétés suivantes sont précisément celles qui permettent d'obtenir les solutions exposées dans la proposition 2.7.5 selon la méthode proposée.

(a) Les égalités suivantes portant sur les fonctions de Bessel modifiées sont valides :

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh(x) \quad \text{et} \quad I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh(x);$$

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$,

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = K_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x};$$

[O+10, ch.10, eq.10.39.1 & eq.10.39.2].

(b) Quel que soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, les fonctions hypergéométriques confluentes de Kummer satisfont aux relations

$$M(0, n-1, x) = 1 = U(0, n-1, x) \quad \text{et} \quad M(n-1, n-1, x) = e^x;$$

[O+10, ch.13, eq.13.6.1 & eq.13.6.3].

(c) À partir de la remarque 2.4.3(f) et des égalités données à la référence [O+10, ch.14, eq.14.5.15, eq.14.5.16 & eq.14.5.17], nous obtenons les propriétés suivantes des fonctions de Legendre associées :

(i) pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1-\nu^2\xi^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{i\nu|\xi|}} \cosh(\alpha \operatorname{arcsinh}(i\nu|\xi|));$$

$$P_{\alpha-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1-\nu^2\xi^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{i\nu|\xi|}} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \sinh(\alpha \operatorname{arcsinh}(i\nu|\xi|));$$

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-p : p \in \mathbb{N}\}$ et $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1-\nu^2\xi^2}) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{i\nu|\xi|}} e^{-\alpha \operatorname{arcsinh}(i\nu|\xi|)};$$

$$Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{1-\nu^2\xi^2}) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{i\nu|\xi|}} \left(\frac{-1}{\alpha}\right) e^{-\alpha \operatorname{arcsinh}(i\nu|\xi|)}.$$

La proposition 2.7.5 nous apporte donc une donnée nouvelle dans le sens où elle nous précise que l'inclusion de l'ensemble des solutions à la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles (2.36) est en réalité stricte dans l'ensemble des solutions à l'équation (2.28). Même si la proposition 2.6.5 nous laissait supposer ce résultat comme étant relativement plausible, nous n'en aurions probablement pas eu la confirmation si nous n'avions pas résolu préliminairement partiellement l'équation (2.28) dans l'appendice B.

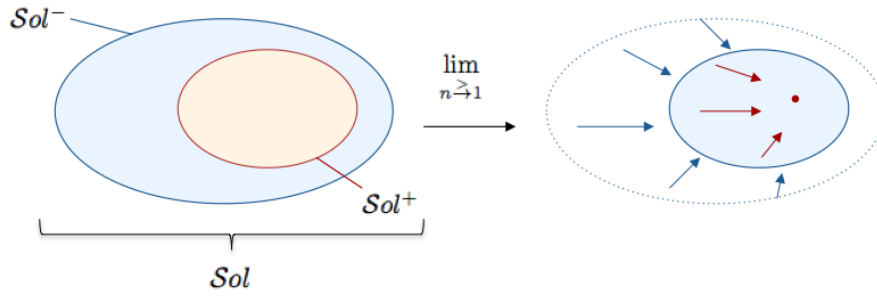
Si nous regardons maintenant au-delà de la connaissance brute de ce fait, la raison nous ayant motivé à nous intéresser à ce problème était avant tout l'étude de la relation entre la proposition 2.6.5 et le lemme 2.7.3. Le résultat obtenu à la proposition 2.7.5 ne nous a pas permis d'éclaircir complètement ce point. Le comportement limite de l'ensemble des solutions à la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles issues du théorème 2.5.10 ne semble donc pas compatible avec notre notion de limite pour n tendant vers 1 des opérateurs 1-différentiels définissant ces équations. Compte tenu d'autres priorités dans nos recherches, la compréhension théorique de ce comportement reste aujourd'hui lacunaire. Nous avons toutefois eu l'occasion d'effectuer quelques calculs à la fois numériques et théoriques dont un exemple est fourni en fin d'appendice C. Ceux-ci semblent converger vers la formulation d'une conjecture. Sans entrer dans les détails relatifs à ces calculs techniques et inachevés, nous souhaitons faire part au lecteur de celle-ci.

Conjecture 2.7.7. *Notons Sol l'ensemble des solutions radiales en $v \in V$ à l'équation (2.28) pour $n > 1$. En vertu de la proposition 2.7.5, cet ensemble peut être partitionné en deux sous-ensembles non vides Sol^+ et Sol^- respectivement définis selon qu'une telle solution $\vartheta \in Sol$ satisfasse ou non au système d'équations aux dérivées partielles (2.36). Pour chaque solution $\vartheta \in Sol$ dont la limite pour n tendant vers 1 est bien définie, il semblerait que nous ayons*

$$\left[\lim_{n \rightarrow 1} \left(\mathcal{O}_F^{(n)} \right) \right] \left(\lim_{n \rightarrow 1} (\vartheta) \right) = \left[\mathcal{O}_{\frac{1}{4}}^{BDS} \right] \left(\lim_{n \rightarrow 1} (\vartheta) \right) \\ \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } \vartheta \in Sol^- \\ \neq 0 & \text{si } \vartheta \in Sol^+ \end{array} \right. .$$

En d'autres termes, comme l'illustre le diagramme suivant, si cette conjecture s'avère vraie, les solutions $\vartheta \in Sol$ dont la limite pour n tendant vers 1 vérifie l'unique équation aux dérivées partielles non triviale apparaissant dans le cas $n = 1$

sont exactement celles qui satisfont à l'équation (2.28) mais qui ne se retrouvent pas associées à l'énoncé du théorème 2.6.14.



2.7.3 Retour sur la résolution de l'article [B+09]

Dans la foulée de cette discussion sur le concept de limite pour n tendant vers 1 des opérateurs et solutions apparaissant au travers du théorème 2.6.14, nous proposons au lecteur de terminer cette section liant notre travail à l'article [B+09] en nous attardant sur une remarque non négligeable spécifiée dans ce dernier. Sauf mention contraire, nous travaillerons ici exclusivement dans le cas $n = 1$ sur l'ensemble des coordonnées $\mathbb{S}' := \{(a, \xi)\} \simeq \mathbb{R}^2$ sur lesquelles sont définies les fonctions ayant subi la transformée de Fourier partielle en la variable z sur $\mathbb{S}$. Dans les notations de la sous-section 2.7.1, pour $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, lors de l'écriture de l'opérateur $\square_k^{\text{BDS}}$ définissant l'unique équation aux dérivées partielles permettant de déterminer tous les star-produits $SU(1, 1)$ -invariants sur le disque de Poincaré, les auteurs de l'article [B+09] relevèrent le fait que le processus de quantification envisagé met à jour l'existence d'une métrique lorentzienne sur $\mathbb{S}'$ canoniquement attachée à la géométrie du disque de Poincaré, laissant son interprétation à clarifier ; [B+09, ch.3, § 2]. Le but de cette sous-section sera précisément de montrer que cette métrique peut être utilisée afin de guider la résolution de l'équation aux dérivées partielles apparaissant dans le cas $n = 1$. Les faits géométriques évoqués ci-dessous seront pour la plupart issus d'adaptations de la référence [KN96a, ch.6].

Commençons par définir clairement les objets avec lesquels nous travaillons. La métrique pseudo-riemannienne susmentionnée, que nous noterons g , est définie de telle façon à ce que la partie d'ordre 2 de l'opérateur de d'Alembert lui étant associée sur $\mathbb{S}'$ corresponde exactement à la partie d'ordre 2 de l'opérateur $\frac{1}{i} \square_k^{\text{BDS}}$.

En d'autres termes, si nous notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des indices associés aux coordonnées a et ξ sur $\mathbb{S}'$, en désignant la matrice inverse de g par $g^{-1} = (g^{i_1 i_2})_{i_1, i_2 \in \mathcal{I}}$, la métrique g est définie par la relation

$$\begin{aligned} & -4e^{2a} \left[-\frac{\nu^2}{4} \xi \partial_a^2 + \xi (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_\xi^2 + (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_a \partial_\xi \right] \\ & = \sum_{i_1, i_2 \in \mathcal{I}} g^{i_1 i_2} \partial_{i_1} \partial_{i_2}. \end{aligned}$$

Nous constatons alors sans peine que cette métrique est donnée explicitement en un point $(a, \xi) \in \mathbb{S}'$ par

$$g_{(a, \xi)} := -\frac{e^{-2a}}{2} \begin{pmatrix} -2\xi & 1 \\ 1 & \frac{\nu^2 \xi}{2(1 - \nu^2 \xi^2)} \end{pmatrix}.$$

Cette construction est standard en analyse harmonique. Désignons maintenant par ∇ la dérivée covariante de Levi-Civita associée à cette métrique sur $\mathbb{S}'$. Pour tout $(a, \xi) \in \mathbb{S}'$, quelques calculs élémentaires nous permettent alors de constater que les symboles de Christoffel de ∇ sont donnés par

$$\begin{aligned} \Gamma_{aa}^a &= -1, \quad \Gamma_{aa}^\xi = 0, \quad \Gamma_{a\xi}^a = \Gamma_{\xi a}^a = 0, \quad \Gamma_{a\xi}^\xi = \Gamma_{\xi a}^\xi = -1, \\ \Gamma_{\xi\xi}^a(a, \xi) &= \frac{1}{4} \frac{\nu^2}{1 - \nu^2 \xi^2} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\xi\xi}^\xi(a, \xi) = \xi \frac{\nu^2}{1 - \nu^2 \xi^2}. \end{aligned}$$

À partir de ces expressions, le calcul du tenseur de courbure de Riemann R^∇ associé à la dérivée covariante ∇ et la proposition 1.1.10 nous amènent à la formulation du lemme suivant.

Lemme 2.7.8. *La variété pseudo-riemannienne $(\mathbb{S}', g)$ est plate. En particulier, il s'agit d'un espace localement symétrique.*

Compte tenu de la géométrie de cet espace, il existe au moins localement un isomorphisme de groupes de Lie

$$\text{Iso}(\mathbb{S}', g) \simeq O(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2 = \text{Iso} \left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Si nous notons $\mathfrak{iso}(\mathbb{S}', g)$ l'algèbre de Lie du groupe des isométries $\text{Iso}(\mathbb{S}', g)$, il existe alors un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{iso}(\mathbb{S}', g) \simeq \mathfrak{so}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2. \quad (2.37)$$

Nous allons expliciter celui-ci. Il est bien connu que le calcul de l'algèbre de Lie $\mathfrak{iso}(\mathbb{S}', g)$ se déduit du calcul de l'ensemble des *champs de vecteurs Killing* sur $(\mathbb{S}', g)$, c'est-à-dire l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \Gamma(T\mathbb{S}')$ tels que la dérivée de Lie de la métrique g dans la direction X soit nulle. Dans la littérature, un tel champ de vecteurs est parfois également appelé *isométrie infinitésimale* de $(\mathbb{S}', g)$. Les conditions définissant la dérivée covariante de Levi-Civita associée à la métrique g nous permettent de montrer sans trop de difficultés que l'ensemble des champs de vecteurs Killing sur $(\mathbb{S}', g)$ est exactement donné par l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \Gamma(T\mathbb{S}')$ satisfaisant l'équation

$$g(\nabla_Y(X), Z) + g(Y, \nabla_Z(X)) = 0 \quad (2.38)$$

pour tout $Y, Z \in \Gamma(T\mathbb{S}')$. Clairement, comme la métrique g est un champ de tenseurs symétriques sur $\mathbb{S}'$, déterminer l'ensemble des champs de vecteurs Killing sur $(\mathbb{S}', g)$ revient à déterminer les champs de vecteurs $X \in \Gamma(T\mathbb{S}')$ satisfaisant (2.38) pour $Y, Z \in \{\partial_a, \partial_\xi\}$. Les calculs permettant cette dernière détermination s'effectuent alors sans peine au moyen de la remarque 2.4.3 et de l'expression des symboles de Christoffel de la dérivée covariante ∇ donnés plus haut. Ces calculs nous livrent le résultat suivant.

Lemme 2.7.9. *L'ensemble des champs de vecteurs Killing sur $(\mathbb{S}', g)$ est un espace vectoriel réel de dimension 3 engendré par les champs de vecteurs $R, C, S \in \Gamma(T\mathbb{S}')$ dont l'expression explicite en un point $(a, \xi) \in \mathbb{S}'$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} (i) \quad R_{(a, \xi)} &= \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} [\partial_a + 2\xi \partial_\xi]; \\ (ii) \quad C_{(a, \xi)} &= e^a \cosh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right) \\ &\quad \left[\frac{1}{\xi} \left(\sinh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right) \right)^2 \partial_a + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \partial_\xi \right]; \\ (iii) \quad S_{(a, \xi)} &= -e^a \sinh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right) \\ &\quad \left[\frac{1}{\xi} \left(\cosh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right) \right)^2 \partial_a + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \partial_\xi \right]. \end{aligned}$$

Le crochet de Lie de deux de ces champs de vecteurs étant donnés par les égalités

$$[R, C] = -C, \quad [R, S] = S \quad \text{et} \quad [C, S] = 0,$$

il s'ensuit l'explicitation suivante de l'isomorphisme d'algèbres de Lie (2.37) :

$$\mathbb{R}R \ltimes (\mathbb{R}C \oplus \mathbb{R}S) \simeq \mathfrak{so}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2.$$

Il existe alors, au moins localement, un difféomorphisme ϕ_I de $\mathbb{S}'$ définissant un nouveau système de coordonnées locales $\{(x, y)\}$ sur $\mathbb{S}'$ tel que

$$\phi_{I*}(C) = -\partial_x, \quad \phi_{I*}(S) = -\partial_y \quad \text{et} \quad (\phi_{I*}(R))_{(x,y)} = x\partial_x - y\partial_y.$$

L'astuce permettant d'expliciter ce difféomorphisme réside dans l'usage de la métrique g comme nous allons le décrire. Pour $(a, \xi) \in \mathbb{S}'$, un calcul direct nous livre les égalités suivantes :

- $g_{(a,\xi)}(R, R) = -\xi e^{-2a}$;
- $g_{(a,\xi)}(R, C) = -\frac{1}{2} e^{-a} \cosh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right)$;
- $g_{(a,\xi)}(R, S) = \frac{1}{2} e^{-a} \sinh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right)$;
- $g(C, C) = 0$;
- $g(S, S) = 0$;
- $g(C, S) = \frac{i\nu}{4}$.

Dès lors, pour tout $(x, y) \in \operatorname{im}(\phi_I)$, avons nous nécessairement :

- $\left((\phi_I^{-1})^* g\right)_{(x,y)}(\partial_x, \partial_x) = g_{\phi_I^{-1}(x,y)}(C, C) = 0$;
- $\left((\phi_I^{-1})^* g\right)_{(x,y)}(\partial_y, \partial_y) = g_{\phi_I^{-1}(x,y)}(S, S) = 0$;
- $\left((\phi_I^{-1})^* g\right)_{(x,y)}(\partial_x, \partial_y) = g_{\phi_I^{-1}(x,y)}(C, S) = \frac{i\nu}{4}$.

Dans les coordonnées $\{(x, y)\} \subset \operatorname{im}(\phi_I)$, la métrique g s'exprime donc comme étant constante. Plus précisément, nous obtenons

$$(\phi_I^{-1})^* g = \frac{i\nu}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

À partir de ce constat, le point fondamental est de remarquer que, dans les coordonnées $\{(x, y)\} \subset \operatorname{im}(\phi_I)$, nous avons

$$\begin{aligned} g_{\phi_I^{-1}(x,y)}(R, C) &= \left((\phi_I^{-1})^* g\right)_{(x,y)}(x\partial_x - y\partial_y, -\partial_x) \\ &= -x \left((\phi_I^{-1})^* g\right)_{(x,y)}(\partial_x, \partial_x) + y \left((\phi_I^{-1})^* g\right)_{(x,y)}(\partial_y, \partial_x) \\ &= y \frac{i\nu}{4} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{\phi_r^{-1}(x,y)}(R, S) &= \left((\phi_r^{-1})^* g \right)_{(x,y)} (x \partial_x - y \partial_y, -\partial_y) \\
&= -x \left((\phi_r^{-1})^* g \right)_{(x,y)} (\partial_x, \partial_y) + y \left((\phi_r^{-1})^* g \right)_{(x,y)} (\partial_y, \partial_y) \\
&= -x \frac{i\nu}{4};
\end{aligned}$$

Nous en tirons alors directement les relations suivantes entre les deux systèmes de coordonnées locales sur $\mathbb{S}'$:

$$\begin{cases} x = \frac{2i}{\nu} e^{-a} \sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \\ y = \frac{2i}{\nu} e^{-a} \cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\nu^2}{4} (x^2 - y^2) \right) \\ \xi = \frac{2i}{\nu} \frac{xy}{x^2 - y^2} \end{cases}.$$

Celles-ci induisent par ailleurs une expression explicite du difféomorphisme local

$$\phi_r : (a, \xi) \mapsto \left(\frac{2i}{\nu} e^{-a} \sinh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right), \frac{2i}{\nu} e^{-a} \cosh \left(\frac{\operatorname{arcsinh}(i\nu\xi)}{2} \right) \right).$$

Dans les notations de la sous-section 2.7.1, nous pouvons injecter le changement de variables issu de ce difféomorphisme dans l'équation au dérivée partielle

$$\Box_{\frac{1}{4}}^{\text{BDS}} \Big|_{(a,\xi)} (\vartheta) = i \xi e^{-2a} \vartheta(a, \xi) \quad (2.39)$$

apparaissant dans le cas $n = 1$ pareillement aux équations du théorème 2.5.10. Après quelques calculs, ceci nous mène alors à l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{8}{\nu} \partial_x (\partial_y (\vartheta)) + \frac{8}{\nu(x^2 - y^2)} (y \partial_x (\vartheta) - x \partial_y (\vartheta)) \\
&\quad - \frac{8xy}{\nu(x^2 - y^2)^2} \left[\frac{1}{\nu^2} + 4 - \left(\frac{\nu}{4} \right)^2 (x^2 - y^2)^2 \right] \vartheta.
\end{aligned}$$

Remarque 2.7.10. Dans les coordonnées $\{(x, y)\}$, la partie d'ordre 2 de l'opérateur de d'Alembert associé à la métrique pseudo-riemannienne $(\phi_r^{-1})^* g$ sur $\mathbb{S}'$ correspond exactement à l'opérateur $\frac{8}{i\nu} \partial_x \partial_y$ constituant, à un facteur $\frac{1}{i}$ près, la partie d'ordre 2 de l'opérateur définissant l'équation ci-dessus. En particulier, l'étude de la métrique g nous a permis de déterminer un changement de variables local sur $\mathbb{S}'$ transformant l'équation (2.39) en une équation dans laquelle les coefficients des dérivées secondes sont constants.

En mettant en évidence un facteur $\frac{8}{\nu} \sqrt{x^2 - y^2}$ dans chaque terme de l'équation et posant

$$\mathcal{W}(x, y) := \frac{\vartheta(x, y)}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

nous obtenons une équation aux dérivées partielles portant sur $\mathcal{W} = \mathcal{W}(x, y)$ dont l'expression explicite est

$$\partial_x(\partial_y(\mathcal{W})) = \frac{xy}{(x^2 - y^2)^2} \left[\frac{1}{\nu^2} + 1 - \left(\frac{\nu}{4}\right)^2 (x^2 - y^2)^2 \right] \mathcal{W}. \quad (2.40)$$

Notons qu'au travers de la fonction $\sqrt{x^2 - y^2}$, nous faisons ici intervenir une jauge mixte complexe dans nos calculs étant donné que nous avons $x^2 - y^2 < 0$ pour tout $(x, y) \in \text{im}(\phi_t)$. Nous réalisons sans peine que l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est, d'une certaine façon, équivalente à l'expression donnée en [B+09, ch.3, eq.90]. L'usage de la métrique lorentzienne pointée par les auteurs de l'article [B+09] nous a donc permis de redévelopper la résolution de l'équation (2.39) en fournissant une interprétation géométrique associée au mystérieux changement de variables apparaissant en [B+09, ch.3, eq.88]. Ceci valide donc à la fois l'intérêt de cette métrique et la voie empruntée par les calculs dans le document [B+09, ch.3, § 4].

Terminons cette étude par deux remarques.

Remarque 2.7.11.

- (a) Le fait essentiel sur lequel nous souhaitons attirer l'attention du lecteur dans cette sous-section étant ainsi formulé, nous ne poursuivrons pas explicitement la résolution de l'équation (2.40) dans ce texte, celle-ci étant présentée dans l'article [B+09]. Notons toutefois qu'il est possible de mettre en avant un autre changement de variables que celui préconisé par les auteurs dans la suite en cherchant un système de coordonnées diagonalisant la métrique pseudo-riemannienne $(\phi_t^{-1})^* g$. Nous pouvons alors en tirer le changement de variables

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \end{cases}$$

et récrire l'équation (2.40) sous la forme

$$\partial_{x'}^2(\mathcal{W}) - \partial_{y'}^2(\mathcal{W}) = \frac{x'^2 - y'^2}{4x'^2 y'^2} \left[\frac{1}{\nu^2} + 1 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 x'^2 y'^2 \right] \mathcal{W}.$$

Tout comme dans l'article [B+09, ch.3, § 4], l'équation obtenue est alors à variables séparables multiplicativement en x' et y' . Notons enfin que les solutions

de la formes

$$\mathcal{W}(x', y') = \mathcal{W}_{x'}(x') \mathcal{W}_{y'}(y')$$

se déduisent de la résolution de deux équations différentielles similaires

$$\mathcal{W}_{x'}''(x') + f_\delta(x') \mathcal{W}_{x'}(x') = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{y'}''(y') + f_\delta(y') \mathcal{W}_{y'}(y') = 0$$

où δ est une constante arbitraire et f_δ est une fonction définie par

$$f_\delta(z) := \left(\frac{\nu}{4}\right)^2 z^2 + \delta + \left(\frac{1}{\nu^2} + 1\right) \frac{1}{4z^2} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (b) Le problème de l'adaptation des présents propos dans le cas $n > 1$ concernant l'équation (2.28) reste ouvert compte tenu des difficultés apparaissant très vite dans les calculs relatifs à la manipulation de la métrique que nous pouvons extraire de la partie d'ordre 2 de l'opérateur $\square$. Il semblerait néanmoins que cette façon de procéder ne s'avère pas du tout intéressante dans ce cas. En effet, pour autant que cette métrique définisse une géométrie conformément plate, le travail que nous avons présenté nous permet de déterminer au moins localement un changement de variables menant à une très nette simplification de la partie d'ordre 2 de l'équation (2.28). Toutefois, ce changement de variables ne garantit en aucun cas un comportement adapté pour les termes comprenant des dérivées d'ordre 3 et 4. L'équation pourrait donc devenir encore plus complexe en utilisant de telles techniques. À défaut d'avoir pu mener à bien cette réflexion sur l'équation (2.28) elle-même, après de nombreux essais numériques et manuscrits, il fut mis en évidence que ce phénomène est exactement celui qui se produit dans le cas d'une équation équivalente exprimée dans les variables (p, q, ζ) définies via les calculs de l'appendice B.

2.8 Symétries, représentations & quantifications

Au travers du théorème 2.6.14, nous avons résolu, du moins en partie, de façon explicite le problème de détermination de l'ensemble des quantifications par déformations G -invariantes sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Toutefois, comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises dans ce document, la détermination d'un cadre fonctionnel adapté afin d'en déduire un résultat analogue d'un point de vue non formel reste pour l'instant absent de nos résultats. Dans cette dernière section de notre travail, nos propos viseront à établir un panorama de nos récentes recherches visant à combler cette absence. En précisant davantage la philosophie de notre

démarche que les détails descriptifs des outils mathématiques que celle-ci met en œuvre, nous nous concentrerons essentiellement sur les dernières avancées obtenues dans ce contexte.

2.8.1 Philosophie mathématique du rétract & applications

Comme il fut exposé à la proposition 1.7.5, puis illustré au cours des sections 1.7 et 2.4, la variété symplectique

$$\left(\mathbb{S}, \left(\frac{2}{n+1} \right) \omega^{\mathbb{S}} \right)$$

définie à la sous-section 1.5.3 à partir de la structure de la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$, admet deux structures symétriques engendrant des géométries affines complètement différentes l'une de l'autre. D'une part, nous avons la structure symétrique $s^{\mathbb{S}}$ déduite de la structure d'espace hermitien symétrique sur $\mathbb{D} \simeq \mathbb{S}$, et d'autre part, nous avons la structure symétrique s^{ana} définie à la proposition 1.7.3 et issue de la structure symétrique de type groupe sur $\mathbb{S}$ telle que donnée en (1.1). L'une est compatible avec la structure d'espace hermitien symétrique de $\mathbb{D}$ et admet un groupe des transvections simple, l'autre définit un espace symétrique symplectique non métrique dont le groupe des transvections est résoluble. Géométriquement, le second est une contraction de courbure du premier. De plus, nous avons les inclusions

$$\mathbb{S} \subset G(\mathbb{S}, s^{\mathbb{S}}) = \text{Aut}(\mathbb{D}) = G \quad \text{et} \quad \mathbb{S} \subset \text{Aut}\left(\mathbb{S}, s^{\text{ana}}, \left(\frac{2}{n+1}\right) \omega^{\mathbb{S}}\right) =: G_{\text{ana}}.$$

Par ailleurs, comme mentionné à l'issue du théorème 2.4.7, les résultats obtenus dans les articles [BM01], [Bi08] et [BG14] permettent aujourd'hui une connaissance très complète de l'ensemble des quantifications par déformations à la fois formelles et non formelles G_{ana} -invariantes sur $\mathbb{S}$. D'une certaine façon, dans notre travail, nous avons choisi l'une de ces quantifications par déformations G_{ana} -invariantes et avons cherché à la transformer de toutes les manières possibles d'un point de vue formel en un star-produit G -invariant sur $\mathbb{S}$ au moyen d'un opérateur U définissant une $\mathbb{S}$ -équivalence entre star-produits $\mathbb{S}$ -invariants. C'est grâce à cette dernière condition que nous avons pu en déduire la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles apparaissant au théorème 2.5.10 et résoudre ainsi le problème. Nous avons donc utilisé un groupe commun de symétries (le groupe de Lie $\mathbb{S}$) entre deux objets mathématiques (deux star-produits respectivement G_{ana} -invariant et G -invariant

sur $\mathbb{S}$) afin d'en déduire une transformation appliquant l'un de ces objets sur l'autre tout en conservant leurs symétries communes. Une telle transformation fait partie d'une philosophie mathématique qui dépasse largement le cadre qui nous concerne. Dans des documents récents encore non publiés, le nom de *rétract* lui fut donné par Pierre Bieliavsky.

Ce recul philosophique peut alors logiquement nous amener à nous interroger sur la possibilité d'obtenir une quantification par déformation non formelle G -invariante sur $\mathbb{S}$ par un rétract exploitant directement l'impressionnant travail analytique mené par Bieliavsky et Gayral dans l'article [BG14], plutôt que de se lancer dans une nouvelle étude d'un cadre fonctionnel adéquat associé aux résultats du théorème 2.6.14. Au travers d'un document privé nommé *A primer in geometric quantization of co-adjoint orbits*, mais également via des communications scientifiques internationales diverses, Bieliavsky développa avec succès cette idée dans le cas du disque de Poincaré. Il retrouva ainsi une solution particulière à l'équation (2.39) apparaissant dans l'article [B+09] sans s'attaquer explicitement à la résolution de celle-ci, fournissant cette fois un cadre fonctionnel adéquat à la définition d'une quantification par déformation non formelle $SU(1, 1)$ -invariante sur le disque de Poincaré. Étant donné que ce travail spécifique n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie dans le cadre de cette thèse, nous ne souhaitons pas y consacrer de développements trop importants. Exposons toutefois un peu plus concrètement les grandes idées que nous avons pu en retirer dans le cas du disque de Poincaré, celles-ci s'avérant déterminantes afin de motiver et d'orienter notre démarche dans la suite.

- (i) SYMÉTRIES. Le rétract à définir est associé aux deux géométries présentées sur $\mathbb{S} \simeq \mathbb{D}$. Or, celles-ci sont déterminées par les structures symétriques $s^{\mathbb{S}}$ et s^{ana} . Une transformation permettant un passage d'une quantification par déformation $\mathbb{S} \subset G_{\text{ana}}$ -invariante à une quantification par déformation G -invariante peut donc d'une certaine façon être vue comme associée à un changement de symétries basé sur $\mathbb{S}$.
- (ii) REPRÉSENTATIONS. Il existe une représentation unitaire du groupe de Lie G sur un sous-espace $\mathcal{H}$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ ainsi qu'une représentation unitaire d'une extension centrale $\tilde{G}$ du groupe des transvections $G(\mathbb{S}, s^{\text{ana}})$ sur $L^2(Q \simeq \mathbb{R}, dL)$ où $Q \subset \mathbb{S}$. Les restrictions de ces deux représentations au groupe $\mathbb{S}$ sont équivalentes et leur entrelacement peut s'écrire explicitement. Par ailleurs, par la proposition 1.1.5, la donnée des structures symétriques $s^{\mathbb{S}}$ et s^{ana} en un point de base sur $\mathbb{S}$ encode ces dernières et

induit alors des opérateurs unitaires involutifs noté respectivement $\Sigma_{\mathcal{H}}$ et Σ_{L^2} sur chacun des espaces de représentations. En s'inspirant du premier point, l'entrelacement de l'opérateur $\Sigma_{\mathcal{H}}$ associé à la symétrie $s^{\mathbb{S}}$, par l'équivalence entre les deux représentations susmentionnées est considéré. Celui-ci livre un nouvel opérateur unitaire involutif Σ' sur $L^2(\mathbb{R}, dL)$.

- (iii) QUANTIFICATIONS. Au travers de la référence [BG14, ch.5 & ch.6], les auteurs introduisent une représentation de l'espace symétrique $(\mathbb{S}, s_{\text{ana}})$ en entrelaçant l'opérateur unitaire involutif Σ_{L^2} par la représentation unitaire du groupe $\tilde{G}$. Ils en déduisent alors une application explicite $\Omega_{\hbar}$, dite de quantification, définie sur $L^2(\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^2, dL)$ et à valeurs dans les opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}, dL)$, à laquelle est associée une quantification par déformation à la fois formelle et non formelle G_{ana} -invariante $*_{\hbar}$ sur $\mathbb{S}$ par une formule du type

$$\Omega_{\hbar}(f *_{\hbar} g) = \Omega_{\hbar}(f) \circ \Omega_{\hbar}(g)$$

pour $f, g \in L^2(\mathbb{S}, dL)$. Relativement aux résultats de l'article [B+09], il est alors légitime de rechercher des star-produits G -invariants sur $\mathbb{S}$ en considérant une telle application de quantification de la forme $\Omega_{\hbar} \circ T$ où T est un opérateur de convolution défini sur $L^2(\mathbb{S}, dL)$. À partir de ce point, pour $\Omega'_{\hbar}$ une nouvelle application de quantification définie semblablement à $\Omega_{\hbar}$ à partir de l'involution Σ' , il fut montré que la relation $\Omega'_{\hbar} = \Omega_{\hbar} \circ T$ induisait une expression explicite du noyau de l'opérateur de convolution T comme solution à l'équation (2.39).

Le succès du travail réalisé par Bieliavsky dans le cas $n = 1$ soulève donc la question légitime de son adaptation dans le cas $n > 1$, ce qui sera tout l'objet des considérations à venir. Dans cet esprit, il est important de souligner que de nombreux faits évoqués ci-dessus s'étendent dans un cadre bien plus vaste que celui du disque de Poincaré et font appel à de très nombreuses notions et théories établies que nous n'avons que très brièvement effleurées comme la théorie des représentations, la théorie des opérateurs bornés ou encore la quantification des espaces symétriques symplectiques dits polarisés ; [BG14].

2.8.2 Entre deux représentations

Dans les deux prochaines sous-sections, nous allons initier une adaptation pour $n > 1$ des idées exposées lors de la sous-section précédente. Au vu de cette dernière,

l'objectif avoué de cette démarche est bien entendu de tenter de retrouver au moins l'une des solutions explicites fournies au sein du théorème 2.6.14 sans passer par la résolution de la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles issue du théorème 2.5.10, tout en visant à terme un traitement analytique plus aisé du cadre fonctionnel associé à nos star-produits G -invariants au moyen du travail réalisé dans l'article [BG14]. Ce projet n'étant pas complètement achevé et les impacts de celui-ci n'étant pas encore totalement acquis, nous ne présenterons dans la suite que les grandes étapes menant aux résultats que nous avons obtenus. Par ailleurs, nous renvoyons à la référence [Kn01, ch.1] pour tout ce qui concerne la théorie de base des représentations des groupes de Lie préliminaire à cette sous-section.

De façon plus précise, notre présente contribution dans cette sous-section consistera en l'apport d'une généralisation complète au cas $n > 1$ du point (ii) de la démarche exposée à la sous-section 2.8.1. Pour ce faire nous allons tout d'abord commencer par introduire la restriction au groupe de Lie $\mathbb{S}$ des deux représentations entrant ici en jeu. Notons que nous travaillerons dans la suite en permanence avec les coordonnées d'Iwasawa

$$(a, v = x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_{n-1} + iy_{n-1}), z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

sur $\mathbb{S}$ telles que définies à la remarque 1.5.6.

Considérons

$$Q := \{(a, x, 0) : a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{C}^{n-1}\} \subset \mathbb{S}.$$

Il est direct de vérifier qu'il s'agit d'un sous-groupe de Lie de $\mathbb{S}$. Pareillement aux coordonnées d'Iwasawa sur $\mathbb{S}$, nous désignerons un point de Q via un couple

$$(a, x) := (a, x, 0) \in Q \subset \mathbb{S}$$

pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Semblablement au constat fait lors de la remarque 2.4.4, la mesure de Lebesgue $dL = da dx_1 \dots dx_{n-1}$ définit une mesure de Haar invariante à gauche sur $Q \simeq \mathbb{R}^n$. Nous pouvons en outre considérer l'espace $L^2(Q, dL)$ obtenu par complétion hilbertienne des fonctions lisses à support compact sur Q relativement au produit scalaire hermitien

$$\langle -, - \rangle_{L^2(Q, dL)} : (u_1, u_2) \in L^2(Q, dL) \times L^2(Q, dL) \mapsto \int_Q \overline{u_1(q)} u_2(q) dL(q).$$

Cet espace constitue alors un espace de Hilbert sur lequel, pour chaque $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nous pouvons introduire une représentation unitaire U^m du groupe de Lie $\mathbb{S}$. Pour

$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u \in L^2(Q, dL)$, $(a_0, x_0) \in Q$ et $s = (a, x + iy, z) \in \mathbb{S}$, celle-ci est définie par l'égalité

$$(U_s^m(u))(a_0, q_0) := \exp \left[im \left(e^{2(a-a_0)} z + \Omega \left(\frac{e^{a-a_0}}{2} x - x_0, i e^{a-a_0} y \right) \right) \right] u(a_0 - a, x_0 - e^{a-a_0} x),$$

où Ω est identifié avec $\iota^* \Omega$ tel que donné à la remarque 1.5.3(a); [BG14, ch.5, § 2 & ch.6, § 2]. La définition de cette représentation est issue d'une variante de la méthode des orbites de Kirillov telle qu'exposée dans la référence [Ki04] où l'espace symétrique symplectique (2.19) est vu comme orbite coadjointe d'une extension centrale de son groupe des transvections; [BG14, ch.5, § 1 & § 2].

À partir de la référence [Kn01, ch.6], nous remarquons dans un contexte plus vaste qu'il est également possible de définir des représentations particulières du groupe $G = SU(1, n)$ appelées *séries discrètes holomorphes*. Pour cela, nous considérons comme espace de représentation

$$\mathcal{H}_N := \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe} : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - \bar{z}^t z)^{N+n+1} d\mu(z) < \infty \right\}$$

où N est un naturel arbitraire et $d\mu$ est la mesure G -invariante sur $\mathbb{D}$ définie à la proposition 1.3.9. Muni du produit scalaire hermitien

$$\langle -, - \rangle_{\mathcal{H}_N} : (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_N \times \mathcal{H}_N \mapsto \int_{\mathbb{D}} \overline{f_1(z)} f_2(z) (1 - \bar{z}^t z)^{N+n+1} d\mu(z)$$

celui-ci constitue un espace de Hilbert. En utilisant les notations de la sous-section 1.2.4, la série discrète holomorphe de G associée à $N \in \mathbb{N}$ est notée $U^{\text{sdh}, N}$ et définie comme étant la représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}_N$ donnée pour chaque $f \in \mathcal{H}_N$, $z \in \mathbb{D}$ et

$$g = \begin{pmatrix} a & b^t \\ c & D \end{pmatrix} \in G,$$

par l'égalité

$$\begin{aligned} (U_g^{\text{sdh}, N}(f))(z) &:= \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{c}^t z} \right)^{N+n+1} f(\tau_{g^{-1}}(z)) \\ &= \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{c}^t z} \right)^{N+n+1} f\left(\frac{-\bar{b} + \bar{D}^t z}{\bar{a} - \bar{c}^t z} \right). \end{aligned}$$

La preuve de ce fait peut être associée aux propos tenus à la référence [Kn01, ch.6] ou déduite de calculs relativement directs, la preuve de l'unitarité de la représentation faisant intervenir la proposition 1.3.9 ainsi que des raisonnements semblables

à ceux de la sous-section 1.3.1. La restriction des séries discrètes holomorphes de G à $\mathbb{S}$ fournit alors des représentations unitaires de $\mathbb{S}$ notées également $U^{\text{sdh},N}$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Nous obtenons donc deux représentations du groupe de Lie $\mathbb{S}$ issues de considérations concernant deux groupes de symétries différents, chacun associé à une structure symétrique différente sur $\mathbb{S}$. Dans une telle situation, Bieliavsky remarqua dans un document non publié qu'il était alors possible de définir formellement un entrelacement $T : L^2(Q, dL) \rightarrow \mathcal{H}_N$ entre ces représentations. Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $N \in \mathbb{N}$, $u_0 \in L^2(Q, dL)$ et $f_0 \in \mathcal{H}_N$ fixés, celui-ci se définit par l'expression

$$T : u \in L^2(Q, dL) \mapsto \int_{\mathbb{S}} \langle U_s^m(u_0), u \rangle_{L^2(Q, dL)} U_s^{\text{sdh},N}(f_0) dL(s).$$

Nous allons maintenant étudier de manière plus approfondie ce qu'il se cache derrière un tel opérateur d'entrelacement formel entre ces représentations dans notre cas. Afin de faciliter les calculs dans la suite, nous allons nous concentrer exclusivement sur le cas où la fonction holomorphe f_0 intervenant dans la définition de l'opérateur T est identiquement égale à 1. Fixons alors $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $N \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in L^2(Q, dL)$ et tentons de donner une expression explicite d'un tel opérateur d'entrelacement. En utilisant l'expression (1.33) ainsi que les définitions susmentionnées sous-jacentes aux représentations U^m et $U^{\text{sdh},N}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (T(u))(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} da_0 dx_0 da dx dy dz \overline{u_0(a_0 - a, x_0 - e^{a-a_0}x)} u(a_0, x_0) \\ &\quad \exp \left[-im \left(e^{2(a-a_0)}z + \Omega \left(\frac{e^{a-a_0}}{2}x - x_0, ie^{a-a_0}y \right) \right) \right] \\ &\quad \left(\frac{e^{-a}}{1 - \zeta_1} \right)^{N+n+1} \left(\frac{1}{\alpha - iz} \right)^{N+n+1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

pour tout $u \in L^2(Q, dL)$ et $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^t \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, avec

$$\alpha := \frac{\cosh(a) - \zeta_1 \sinh(a) + \frac{e^a}{2}(1 - \zeta_1)(|x|^2 + |y|^2) - \sum_{l=1}^{n-1} (x_l + iy_l)\zeta_{l+1}}{e^a(1 - \zeta_1)},$$

la notation $|\cdot|$ étant utilisée ici et dans la suite pour désigner la norme euclidienne d'un vecteur de nombres réels ou complexes. Bien entendu, une telle expression n'est pas très maniable. Nous allons donc la simplifier. Pour cela nous utiliserons les résultats suivants.

Lemme 2.8.1. *Dans le contexte exposé ci-dessus, $\text{Re}(\alpha) > 0$ quels que soient $a \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{D}$ et $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$.*

Démonstration. En posant $v = x + iy \in \mathbb{C}^{n-1}$, nous observons sans peine l'égalité

$$\operatorname{Re}(2\alpha) = 1 + |v|^2 + e^{-2a} \left(\frac{1 - |\zeta_1|^2}{|1 - \zeta_1|^2} \right) - 2e^{-a} \operatorname{Re} \left(\sum_{l=1}^{n-1} v_l \left(\frac{\zeta_{l+1}}{1 - \zeta_1} \right) \right).$$

Par ailleurs, un usage de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous livre

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\sum_{l=1}^{n-1} v_l \left(\frac{\zeta_{l+1}}{1 - \zeta_1} \right) \right) &\leq \left| \sum_{l=1}^{n-1} v_l \left(\frac{\zeta_{l+1}}{1 - \zeta_1} \right) \right| \\ &\leq |v| \sqrt{\sum_{l=1}^{n-1} \frac{|\zeta_{l+1}|^2}{|1 - \zeta_1|^2}} \\ &= |v| \sqrt{\left(\frac{1}{|1 - \zeta_1|^2} \right) (|\zeta|^2 - |\zeta_1|^2)} \\ &< |v| \sqrt{\frac{1 - |\zeta_1|^2}{|1 - \zeta_1|^2}}, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité découlant directement du fait que $|\zeta| < 1$. En posant

$$\gamma := e^{-a} \sqrt{\frac{1 - |\zeta_1|^2}{|1 - \zeta_1|^2}} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

nous obtenons l'inégalité

$$\operatorname{Re}(2\alpha) > \gamma^2 - 2|v|\gamma + |v|^2 + 1.$$

Clairement, le membre de droite de cette inégalité est une parabole en γ n'admettant pas de racine étant donné que son discriminant vaut -4 . La thèse s'en suit alors. ■

Soulignons que cette jolie preuve fut établie en collaboration avec Jérémy Haut. Le second résultat fait appel à un retour des transformées de Fourier. Nous les aborderons cependant cette fois sous un autre angle par rapport à la section 2.4. Il ne s'agit plus de discuter du point de vue formel ou non de celles-ci, mais d'utiliser des expressions explicites de transformées de Fourier de fonctions bien définies.

Lemme 2.8.2. *Pour $k_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(\alpha_0) > 0$ fixés, considérons les fonctions d'une variable réelle f et g définie en $r \in \mathbb{R}$ par*

$$f(r) := e^{-m_0 r^2} \quad \text{et} \quad g(r) := \frac{r^{k_0}}{k_0!} e^{-\alpha_0 r} H(r)$$

où H est la fonction de Heaviside correspondant à la fonction indicatrice sur les réels strictement positifs. Alors, les transformées de Fourier de ces deux fonctions sont données par

$$\mathcal{F}(f) : \xi \in \mathbb{C} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir\xi} f(r) dr = \sqrt{\frac{\pi}{m_0}} e^{-\frac{\xi^2}{4m_0}}$$

et $\mathcal{F}(g) : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir\xi} g(r) dr = \left(\frac{1}{\alpha_0 + i\xi} \right)^{k_0+1}.$

L'assertion pour la fonction f est hautement standard, celle-ci étant une gaussienne; [O+10, ch.1, § 14]. La seconde suit directement des égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\xi) &:= \left(\frac{i^{k_0}}{k_0!} \right) \partial_\xi^{k_0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(r) e^{-r(\alpha_0 + i\xi)} dr \right] \\ &:= \left(\frac{i^{k_0}}{k_0!} \right) \partial_\xi^{k_0} \left[\frac{1}{\alpha_0 + i\xi} \right] \end{aligned}$$

valables pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ étant donné l'hypothèse $\operatorname{Re}(\alpha_0) > 0$. En particulier, dans les conditions de ce lemme, la théorie des transformées de Fourier inverse nous permet d'en tirer l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ir\xi} \left(\frac{1}{\alpha_0 + i\xi} \right)^{k_0+1} d\xi = g(r) \quad (2.42)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}$; [O+10, ch.1, § 14].

Dans le cadre de cette sous-section, nous avons maintenant les ingrédients afin de simplifier l'expression de l'entrelacement T pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $N \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in L^2(Q, dL)$ fixés. Nous expliquons au lecteur la marche à suivre à partir de l'expression (2.41).

- (i) Nous effectuons le changement de variable $z' = -z$.
- (ii) Grâce au lemme 2.8.1, nous pouvons directement appliquer la formule (2.42) afin de calculer explicitement l'intégrale en la variable z' .
- (iii) Ceci étant fait, nous appliquons le théorème du changement de variables à partir du difféomorphisme de la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ sur elle-même qui à (a, x, y) associe $(a_0 - a, x_0 - e^{a-a_0}x, e^{a-a_0}y)$. Celui-ci est bien sûr inspiré de l'expression de l'argument de la fonction u_0 . Nous notons respectivement a' , x' et y' les nouvelles variables apparaissant à la suite de cette manipulation.
- (iv) À partir de l'expression de la transformée de Fourier d'une gaussienne donnée au lemme 2.8.2, nous calculons explicitement l'intégrale en la variable y' .

Après avoir effectué ces diverses manipulations, pour tout $u \in L^2(Q, dL)$ et $\zeta \in \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, nous obtenons

$$(T(u))(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 0 \\ C (T_{m,N}(u))(\zeta) & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

où C est une constante dépendant de m , N et u_0 définie très exactement par

$$C := \left(\sqrt{\frac{2\pi}{m}} \right)^{n-1} \left(\frac{2\pi m^{N+n}}{(N+n)!} \right) \int_{\mathbb{R}^n} da' dx' \overline{u_0(a', x')} \exp((n-N-1)a') \exp\left(-\frac{m}{2} \left(e^{-2a'} + 2|x'|^2 \right)\right),$$

et où $(T_{m,N}(u))(\zeta)$ correspond à l'expression

$$\int_{\mathbb{R}} da_0 \left(\frac{e^{-a_0}}{1-\zeta_1} \right)^{N+n+1} \exp\left(-\frac{m}{2} e^{-2a_0} \left(\frac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1} \right)\right) \exp\left(\frac{m}{2} \sum_{l=1}^{n-1} (\zeta'_l(a_0))^2\right) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_0 \exp\left(-m \sum_{l=1}^{n-1} (x_0 - \zeta'_l(a_0))^2\right) u(a_0, x_0)$$

avec $\zeta'(a_0) := (\zeta'_1(a_0), \dots, \zeta'_{n-1}(a_0))^t \in \mathbb{C}^{n-1}$ défini par l'égalité

$$\zeta'_l(a_0) := \left(\frac{e^{-a_0}}{1-\zeta_1} \right) \zeta_{l+1}$$

pour tout $1 \leq l \leq n-1$.

Remarque 2.8.3. Le fait que cette expression soit nulle pour m négatif est dû à l'apparition de la fonction de Heaviside dans l'expression (2.42). Dans la suite, afin d'obtenir un véritable entrelacement non trivial entre les représentations U^m et $U^{\text{sdh}, N}$, nous supposons $m > 0$ et $u_0 \neq 0$.

Au travers de cette dernière expression, nous avons défini un opérateur

$$T_{m,N} : L^2(Q, dL) \rightarrow \mathcal{H}_N$$

indépendant de la fonction u_0 et encodant complètement, à une constante près, la donnée de notre entrelacement T . Une analyse approfondie de celui-ci nous a permis d'obtenir l'importante proposition suivante.

Proposition 2.8.4. *Dans le contexte susmentionné, l'entrelacement T vérifie*

$$T := \mathcal{M}_1^\zeta \circ \mathcal{Z}^* \circ \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{M}_1^C \circ \left((\psi_0)^{-1} \right)^* \circ (\varphi_0)^* \circ (\phi_m)^* \circ \mathcal{W} \circ \left((\phi_m)^{-1} \right)^*$$

où les opérateurs apparaissant dans cette décomposition sont définis comme suit :

- $\mathcal{M}_1^\zeta$ est un opérateur de multiplication qui à une fonction f définie sur $\mathbb{D}$ associe la fonction

$$\mathcal{M}_1^\zeta(f) : \zeta \in \mathbb{D} \mapsto \left(\frac{1}{1 - \zeta_1} \right)^{N+n+1} f(\zeta) ;$$

- $\mathcal{Z}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ sur son image $\text{im}(\mathcal{Z}) \subset \mathbb{C}^n$ défini au point $\zeta \in \mathbb{D}$ par

$$(\mathcal{Z}(\zeta))_1 := \frac{m}{2(1 - \zeta_1)^2} \left(1 - \sum_{k=1}^n (\zeta_k)^2 \right) \quad \text{et} \quad (\mathcal{Z}(\zeta))_{l+1} := \frac{\zeta_{l+1}}{1 - \zeta_1},$$

pour tout $1 \leq l \leq n - 1$;

- $\mathcal{L}_1$ est la transformation intégrale qui à une fonction f de n variables réelles ou complexes associe la fonction

$$\mathcal{L}_1(f) : \zeta \in \mathbb{C}^n \mapsto \int_0^{+\infty} f(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) e^{-r\zeta_1} dr$$

lorsque cette expression fait sens ;

- $\mathcal{M}_1^C$ est un opérateur de multiplication qui à une fonction f définie sur un ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^{n-1}$ associe la fonction

$$\mathcal{M}_1^C(f) : (r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathcal{O} \mapsto \frac{C}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{m}} \right)^{n-1} (\sqrt{r})^{N+n-1} f(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) ;$$

- ψ_0 est un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^{n-1}$ dont la valeur au point $(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$ est donnée par

$$\psi_0(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) := (e^{-2r}, \zeta_2, \dots, \zeta_n) ;$$

- φ_0 est un difféomorphisme de la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$ sur elle-même défini au point $(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ par l'égalité

$$\varphi_0(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) := (r, e^{-r}\zeta_2, \dots, e^{-r}\zeta_n) ;$$

- ϕ_m est un difféomorphisme de la variété $\mathbb{R}^n$ sur elle-même défini au point $(a, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\phi_m(a, x_1, \dots, x_{n-1}) := (a, 2\sqrt{m}x_1, \dots, 2\sqrt{m}x_{n-1}) ;$$

- $\mathcal{W} := \mathcal{W}_2 \circ \dots \circ \mathcal{W}_n$ où, pour $1 \leq l \leq n-1$, $\mathcal{W}_{l+1}$ est la transformation intégrale qui à une fonction f de n variables réelles associe la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{l+1}(f) : (a, x_1, \dots, x_{l-1}, \zeta, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}) &\in \mathbb{R}^l \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-l-1} \\ &\mapsto \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-\frac{1}{4}(\zeta - x_l)^2} dx_l \end{aligned}$$

lorsque cette expression fait sens.

La grosse difficulté dans l'obtention de ce résultat est essentiellement de réussir à définir une telle décomposition. Une fois celle-ci donnée, la preuve de cette proposition devient un jeu d'enfant que nous laissons à l'appréciation du lecteur. Par ailleurs, nous pouvons logiquement nous interroger sur l'intérêt de ce résultat. Celui-ci réside dans le fait d'obtenir une explicitation de notre entrelacement T comme composition d'opérateurs de multiplication, de changements de variables et de transformations intégrales sur lesquels notre maîtrise est bien meilleure en comparaison à l'expression initiale (2.41). En effet, d'une part, le contexte analytique sous-jacent à la définition des opérateurs de multiplication, des différents difféomorphismes précédemment définis, ainsi que de leurs inverses respectifs est limpide. D'autre part, si le cadre fonctionnel adapté à la définition des transformations intégrales $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{W}$ semble moins clair, il se trouve que celles-ci ne sont pas des inconnues de la littérature mathématique :

- (i) l'opérateur $\mathcal{L}_1$ est appelé *transformée de Laplace*, ou plus précisément dans notre cas, transformée de Laplace partielle en la première variable ;
- (ii) pour chaque $1 \leq l \leq n-1$, l'opérateur $\mathcal{W}_{l+1}$ est appelé *transformée de Weierstrass*, ou plus précisément dans ce cas, transformée de Weierstrass partielle en la $(l+1)$ -ième variable.

Si la première transformation intégrale est davantage célèbre que la seconde, celles-ci ont toutes deux fait l'objet d'études spécifiques. En particulier, dans les deux cas, des formules d'inversion ont été développées relativement à ces transformations. Compte tenu du cadre analytique dans lequel nous appliquerons ces dernières, nous nous contenterons ici d'en fournir les expressions suivantes.

- (a) Si f est une fonction régulière de n variables réelles ou complexes à croissance au plus exponentielle relativement à sa première variable et telle que sa transformée de Laplace partielle en la première variable soit bien définie et analytique au voisinage d'un point de première composante $\sigma \in \mathbb{R}$, alors

$$f(r, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma + i\mathbb{R}} (\mathcal{L}_1(f))(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) e^{r\zeta_1} d\zeta_1$$

pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $\zeta_2, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ tels que cette expression fasse sens relativement au domaine de définition de f ; [O+10, ch.1, eq.1.14.20].

- (b) Pour $1 \leq l \leq n-1$, si f est une fonction régulière de n variables réelles telle que sa transformée de Weierstrass partielle en la $(l+1)$ -ième variable soit bien définie et analytique au voisinage d'un point de première composante $\sigma \in \mathbb{R}$, alors nous avons

$$\begin{aligned} & f(a, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{4\pi}} \int_{\sigma+i\mathbb{R}} (\mathcal{W}_{l+1}(f))(a, x_1, \dots, x_{l-1}, \zeta, x_{l+1}, \dots, x_{n-1}) e^{\frac{1}{4}(\zeta-x_l)^2} d\zeta \end{aligned}$$

pour tout $a, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$; [Ze68, ch.7, thm.7.3.3].

Ce texte ne pouvant être infini, nous n'entrerons malheureusement pas davantage dans les détails très riches et intéressants concernant la théorie sous-jacente à ces transformations intégrales de même qu'à leurs inverses. Citons toutefois les références [Ze68, ch.3 & ch.7], [Sc98, ch.6] et [O+10, ch.1, § 14] comme ingrédients essentiels nous ayant permis de mener à terme nos objectifs dans cette section.

2.8.3 Transport de la symétrie

Grâce au travail effectué dans la sous-section précédente, nous avons obtenu un entrelacement explicite $T : L^2(Q, dL) \rightarrow \mathcal{H}_N$ entre les représentations unitaires U^m et $U^{\text{sdh}, N}$ du groupe de Lie $\mathbb{S}$ sous une forme maniable et inversible. En poursuivant maintenant le programme motivé lors de la sous-section 2.8.1, nous allons entrelacer par T l'opérateur Σ_N encodant la structure symétrique $s^{\mathbb{S}}$ au travers de la représentation $U^{\text{sdh}, N}$. En vertu de la remarque 1.2.11 (c), ce dernier est défini via l'évaluation de la série discrète holomorphe $U^{\text{sdh}, N}$ au point $\exp(\pi Z_0) \in G$ où Z_0 est défini en (1.19). En utilisant l'expression explicite de la représentation $U^{\text{sdh}, N}$ donnée à la sous-section précédente, nous obtenons

$$\Sigma_N : f \in \mathcal{H}_N \mapsto \exp\left(-\frac{in\pi}{n+1}(N+n+1)\right) (-\text{Id}_{\mathbb{D}})^*(f).$$

Clairement, le calcul de l'entrelacement de cet opérateur unitaire (et involutif si N est un multiple naturel de $(n+1)$) revient à calculer

$$\Sigma_T := T^{-1} \circ (-\text{Id}_{\mathbb{D}})^* \circ T : L^2(Q, dL) \rightarrow L^2(Q, dL).$$

En vertu de la proposition 2.8.4 et des considérations qui s'en sont suivies lors de la sous-section précédente, l'opérateur Σ_T peut se voir comme la composition

de 19 opérateurs dont nous connaissons les expressions explicites sous certaines hypothèses. Ainsi, après quelques pages de calculs visant essentiellement à composer ces opérateurs, pour $u \in L^2(Q, dL)$ et $(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \in Q \simeq \mathbb{R}^n$, nous en tirons l'égalité

$$\begin{aligned}
& (\Sigma_T(u))(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \\
&= \int_{\sigma_2 + i\mathbb{R}} dz_2 \dots \int_{\sigma_n + i\mathbb{R}} dz_n \int_0^{+\infty} dr \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\sigma + i\mathbb{R}} d\gamma \\
&\quad \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{m}{i\pi}\right)^{n-1} u\left(\ln\left(\frac{m}{r}\right) - s, x_1, \dots, x_{n-1}\right) \exp\left(\frac{r}{2} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\right) \\
&\quad \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{N+n+1} \exp\left(\frac{m}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \sum_{l=1}^{n-1} z_{l+1}^2\right) \exp\left(m \sum_{l=1}^{n-1} (y_l^2 - x_l^2)\right) \\
&\quad \exp\left(-2m \sum_{l=1}^{n-1} z_{l+1} \left(\frac{x_l}{\gamma} + y_l\right)\right)
\end{aligned}$$

pour des réels $\sigma, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ tels que cette expression soit bien définie. Après beaucoup de réflexion sur le comportement à adopter face à cette intégrale multiple peu pratique, nous avons obtenu le lemme suivant nous simplifiant quelque peu cette expression.

Lemme 2.8.5. *Dans ces notations, nous avons*

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma + i\mathbb{R}} d\gamma \frac{\exp\left(\frac{r}{2} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\right)}{\gamma^{N+n+1}} \exp\left(-\frac{m}{2\gamma^2} \sum_{l=1}^{n-1} z_{l+1}^2\right) \exp\left(-\frac{2m}{\gamma} \sum_{l=1}^{n-1} z_{l+1} x_l\right) \\
&= 2i\pi \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[J_{N+n+k}(r) \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{N} \\ p_1 + \dots + p_{n-1} = k}} \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{(-\sqrt{\frac{m}{2}} z_{l+1})^{p_l}}{p_l!} H_{p_l}(\sqrt{2m} x_l) \right) \right]
\end{aligned}$$

où J_{N+n+k} désigne une fonction de Bessel de première espèce et H_{p_l} le p_l -ième polynôme d'Hermite.

Remarque 2.8.6. Le lecteur non averti pourra sans peine consulter les bases relatives à la théorie des fonctions de Bessel ou des polynômes orthogonaux classiques au travers des références [Wa66] et [O+10, ch.18].

Les experts de l'analyse complexe auront peut-être flairé ici le nouveau chef-d'œuvre de l'artiste magnifique qu'est le théorème des résidus. Sans nous lancer dans plusieurs pages de calculs, expliquons ici les grandes étapes constituant la preuve de ce lemme.

- (i) Tout d'abord pour des paramètres $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{C}$, nous calculons par le théorème des résidus l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma+i\mathbb{R}} f(\gamma) d\gamma \quad \text{où} \quad f(\gamma) = \gamma^{-(N+n+1)} \exp\left(r\gamma + \frac{b}{\gamma} + \frac{c}{\gamma^2}\right).$$

Celle-ci correspond exactement au résidu de la fonction f en l'origine.

- (ii) Après un peu de lecture mathématique, nous prenons acte des développements en série

$$\exp\left(\frac{r}{2}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma^k J_k(r)$$

$$\text{et} \quad \exp(2xt - t^2) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} H_k(x)$$

généreusement fournis par la référence [O+10, ch.10, § 12 & ch.18, § 12] pour tout réel x et pour tout complexes $r, \gamma \neq 0$ et t .

- (iii) Nous appliquons le point précédent à la fonction que nous souhaitons intégrer afin d'en déduire un développement en série en γ . Celui-ci, combiné au premier point, nous livre alors le résultat souhaité.

En utilisant le test de convergence de la racine de Cauchy et les définitions des fonctions de Bessel et polynômes d'Hermite intervenant dans l'expression de la série apparaissant dans l'énoncé du lemme 2.8.5, il peut être montré sans trop de difficulté que celle-ci définit une fonction entière $S(z_2, \dots, z_n)$ en chacune des variables z_{l+1} pour $1 \leq l \leq n-1$. Dès lors, après avoir réussi à expliciter l'intégrale en γ dans l'expression de $\Sigma_T(u)(s, y_1, \dots, y_{n-1})$ donnée ci-dessus pour $u \in L^2(Q, dL)$ et $(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \in Q \simeq \mathbb{R}^n$, il semble légitime de chercher à calculer

$$\int_{\sigma_2+i\mathbb{R}} dz_2 \dots \int_{\sigma_n+i\mathbb{R}} dz_n S(z_2, \dots, z_n) \exp\left(\sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{m}{2} z_{l+1}^2 - 2m z_{l+1} y_l\right)\right).$$

Afin d'atteindre cet objectif, le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 2.8.7. *Dans les notations de cette sous-section, pour tout $1 \leq l \leq n-1$ et $p_l \in \mathbb{N}$, nous avons l'égalité*

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_{l+1}+i\mathbb{R}} dz_{l+1} \left(-\sqrt{\frac{m}{2}} z_{l+1}\right)^{p_l} \exp\left(\frac{m}{2} z_{l+1}^2 - 2m z_{l+1} y_l\right) \\ &= i \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \left(\frac{1}{2}\right)^{p_l} \exp(-2m y_l^2) H_{p_l}\left(-\sqrt{2m} y_l\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $1 \leq l \leq n-1$ et $p_l \in \mathbb{N}$. Posons

$$y := -\sqrt{2m} y_l \quad \text{et} \quad \sigma(y) := \exp\left(\frac{m}{2} \sigma_{l+1}^2 + \sqrt{2m} y \sigma_{l+1}\right).$$

La preuve se conclut alors au travers des égalités

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_{l+1} + i\mathbb{R}} dz_{l+1} \left(-\sqrt{\frac{m}{2}} z_{l+1}\right)^{p_l} \exp\left(\frac{m}{2} z_{l+1}^2 + \sqrt{2m} z_{l+1} y\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{p_l} \partial_y^{p_l} \left(\int_{\sigma_{l+1} + i\mathbb{R}} dz_{l+1} \exp\left(\frac{m}{2} z_{l+1}^2 + \sqrt{2m} z_{l+1} y\right) \right) \\ &= i \left(-\frac{1}{2}\right)^{p_l} \partial_y^{p_l} \left[\sigma(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-\frac{m}{2} t^2 + it(m\sigma_{l+1} + \sqrt{2m} y)\right) \right] \\ &= i \left(-\frac{1}{2}\right)^{p_l} \partial_y^{p_l} \left[\sigma(y) \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \exp\left(-\frac{(m\sigma_{l+1} + \sqrt{2m} y)^2}{2m}\right) \right] \\ &= i \left(-\frac{1}{2}\right)^{p_l} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \partial_y^{p_l} (e^{-y^2}) \\ &= i \left(-\frac{1}{2}\right)^{p_l} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} (-1)^{p_l} e^{-y^2} H_{p_l}(y), \end{aligned}$$

la troisième et la cinquième égalité étant respectivement obtenues au moyen du lemme 2.8.2 et de la formule de Rodrigues pour les polynômes d'Hermite ; [O+10, ch.18, § 5, eq.18.5.5]. ■

Grâce à une application du théorème de Fubini et du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, le résultat implémenté ci-dessus nous permet alors d'explicitier l'intégrale susmentionnée. Quelques calculs élémentaires nous permettent alors d'obtenir l'élégant théorème suivant.

Théorème 2.8.8. Pour $u \in L^2(Q, dL)$ et $(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \in Q \simeq \mathbb{R}^n$, l'opérateur unitaire involutif Σ_T satisfait l'égalité

$$\begin{aligned} & (\Sigma_T(u))(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= \int_0^\infty dr \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} (\sqrt{2m})^{n-1} u\left(\ln\left(\frac{m}{r}\right) - s, x_1, \dots, x_{n-1}\right) \\ & \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} J_{N+n+k}(r) \left(\sum_{\substack{p_1, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{N} \\ p_1 + \dots + p_{n-1} = k}} \prod_{l=1}^{n-1} \varphi_{p_l}(\sqrt{2m} x_l) \varphi_{p_l}(-\sqrt{2m} y_l) \right) \end{aligned}$$

où la fonction φ_{p_l} désigne la p_l -ième fonction d'Hermite pour $p_l \in \mathbb{N}$.

Pour rappel, pour $p_l \in \mathbb{N}$, la p_l -ième *fonction d'Hermite* φ_{p_l} est définie au point $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_{p_l}(x) := \frac{H_{p_l}(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{p_l! 2^{p_l} \sqrt{\pi}}}.$$

L'ensemble de ces fonctions constituent une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, dL)$; [O+10, ch.18, § 18]. Par ailleurs, pour $u \in L^2(Q, dL)$ et $(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \in Q \simeq \mathbb{R}^n$ tels que le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique à l'expression obtenue dans le théorème 2.8.8, nous obtenons la reformulation de ce dernier en l'égalité

$$\begin{aligned} & (\Sigma_T(u))(s, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{N}} \left[\left(\prod_{l=1}^{n-1} \varphi_{p_l}(-\sqrt{2m} y_l) \right) \right. \\ & \quad \left. \int_0^\infty dr J_{N+n+p_1+\dots+p_{n-1}}(r) c_{p_1, \dots, p_{n-1}}(r) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c_{p_1, \dots, p_{n-1}}(r) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \left(\prod_{l=1}^{n-1} \varphi_{p_l}(x_l) \right) \\ & \quad u\left(\ln\left(\frac{m}{r}\right) - s, \frac{x_1}{\sqrt{2m}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{2m}}\right). \end{aligned}$$

L'opérateur Σ_T appliqué à une fonction $u \in L^2(Q, dL)$ peut donc, d'une certaine façon, se voir comme étant la succession de la généralisation à plusieurs variables des opérations suivantes décrites pour $n = 2$ sur une fonction associée à u :

- (i) une décomposition dans la base des fonctions d'Hermite relativement à la seconde variable ;
- (ii) une transformée de Hankel relativement à la première variable sur les coefficients obtenus suite à la décomposition décrite au premier point ;
- (iii) une recomposition de la fonction dont les coefficients de la décomposition selon l'opposé de la seconde variable dans la base des fonctions d'Hermite sont ceux obtenus au point précédent.

En particulier, dans le cas $n = 1$, nous retrouvons le résultat obtenu par Bieliavsky, à savoir, une transformée de Hankel. Les développements dans ce cas spécifique sont également associés à des calculs apparentés réalisés par André et Julianne Unterberger dans l'article [UU84].

Conclusions & perspectives

Au terme de notre parcours sinueux au sein de très nombreux domaines des mathématiques, il est maintenant temps de conclure ce travail. Entre physique quantique et géométrie différentielle, nous avons tenté d'amener progressivement le lecteur à situer et comprendre l'essence des recherches que nous avons développées durant ces quatre dernières années. Le résultat majeur que nous avons ainsi obtenu réside sans aucun doute dans le théorème 2.6.14 nous donnant une réalisation de l'ensemble de toutes les quantifications par déformations formelles sur la boule unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$ qui soient invariantes sous le groupe des automorphismes de ce domaine borné symétrique. Ce résultat fut obtenu au travers d'une construction complètement explicite s'appuyant sur la résolution d'une hiérarchie d'équations aux dérivées partielles obtenue au théorème 2.5.10 à l'issue de diverses considérations portant notamment sur le concept d'application moment quantique. D'une certaine façon, cette hiérarchie d'équations aux dérivées partielles encode au niveau quantique une décontraction de courbure basée sur le domaine $\mathbb{D}$, associant certaines de ses solutions à la définition d'opérateurs de convolution entrelaçant la théorie des déformations quantiques au niveau contracté avec celle de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Tant pour leur rôle prépondérant dans le succès de notre approche que pour leurs liens intimes avec la structure du groupe des automorphismes de $\mathbb{D}$ ou leur présence dans l'établissement d'un trait d'union entre les situations pour $n > 1$ et $n = 1$, ces équations constituent un objet mathématique fondamental dans notre travail. Bien que non conclue dans ce texte, la réalisation de nos objectifs du point de vue non formel paraît également sur de bonnes voies grâce à l'élégante réexpression de la structure symétrique de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ comme opérateur unitaire involutif sur un espace de Hilbert obtenue au théorème 2.8.8 et dont l'exploitation dans l'esprit de la sous-section 2.8.1 semble prometteuse.

Ce texte n'est bien entendu pas une fin en soi. Il ne fait que matérialiser notre thèse, celle-ci ne consistant qu'une minuscule fenêtre ouverte sur l'immensité de l'univers mathématique. Ainsi, tant dans la continuité directe de notre travail que dans un contexte plus large, de très nombreuses questions et autres projets parfois de longue haleine restent à ce jour en suspens. Nous en dressons une liste non exhaustive ci-dessous.

- (a) La réalisation complète des objectifs présentés à la section 2.2 via la détermination d'un cadre fonctionnel adéquat permettant une définition propre de quantifications par déformations non formelles $SU(1, n)$ -invariantes sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ à partir des résultats obtenus au théorème 2.6.14. En particulier, à ces fins, la poursuite du travail initié à la section 2.8 sur base du résultat obtenu au théorème 2.8.8 dans l'esprit brièvement abordé à la sous-section 2.8.1 pourra s'avérer spécialement utile.
- (b) Le point susmentionné résolu, la question de la détermination de quantifications par déformations strictes dans un contexte C^* -algébrique survient naturellement. À terme, la question de l'établissement de formules de déformations universelles pour des actions de groupes semi-simples tels que $SU(1, n)$ s'avère également pertinente au regard des résultats obtenus dans l'article [BG14].
- (c) Les résultats dus à Pyatetskii-Shapiro exposés à la sous-section 1.4.1 nous ont permis de réaliser l'importance que revêt l'étude de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ comme domaine borné homogène élémentaire. Le travail réalisé dans cette thèse se situe dès lors directement dans un objectif beaucoup plus vaste, à savoir l'obtention de l'ensemble des quantifications par déformations à la fois formelles et non formelles sur un domaine borné symétrique arbitraire qui soient invariantes sous le groupe des automorphismes de ce domaine. Le lemme 1.4.4 et la remarque 1.4.5 consistent des faits importants dans cette optique.
- (d) L'énoncé du théorème 2.6.14 laisse apparaître un unique degré de liberté $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})[[\nu]]$ dans l'ensemble des solutions à notre hiérarchie d'équations aux dérivées partielles. Vu que tout star-produit $SU(1, n)$ -invariant sur $\mathbb{D}$ correspond à la donnée d'une certaine série formelle g en le paramètre de déformation ν à coefficients dans les distributions sur $\mathbb{R}$, la question de la détermination de conditions sur g afin de retrouver des star-produits particuliers sur $\mathbb{D}$ est complètement légitime, notamment afin d'obtenir l'ensemble des star-produits à séparation des variables sur $\mathbb{D}$ ou encore de retrouver le star-produit issu de la construction de Fedosov évoquée aux sous-sections 2.1.2 et 2.1.3 ; [Fe94], [Bo05], [Sc12], [BW14].

- (e) De petites généralisations peuvent être envisagées dans le texte. Nous pouvons notamment sans problème ne pas tenir compte de la remarque 2.3.15 et laisser le paramètre k arbitraire, ou voir ce qu'advindraient nos calculs à partir de la section 2.5 en travaillant avec une quantification par déformation $\mathbb{S}$ -invariante plus générale que celle issue du théorème 2.4.7 et dépendant d'un paramètre supplémentaire tel qu'exposé à la référence [Bi08, ch.3, thm.3.2].
- (f) Relativement à la section 2.7, la conjecture 2.7.7 occupe bien entendu notre esprit. Nous pouvons également nous interroger sur une adaptation du contenu de la sous-section 2.7.3 dans le contexte beaucoup plus général de la résolution des équations aux dérivées partielles d'ordre 2.
- (g) Relativement aux considérations de la sous-section 2.4.3, nous pouvons nous interroger sur l'interprétation géométrique concernant la forme des noyaux intégraux intervenant dans les expressions de potentielles quantifications par déformations non formelles associées à l'énoncé du théorème 2.6.14 ; [We94a], [Bi02], [B+09], [Vo11].
- (h) Un problème intéressant à étudier est très certainement d'établir le lien entre les calculs réalisés lors de la section 2.8 adaptés au cas $n = 1$ et ceux d'André et Julianne Unterberger dont nous faisons mention relativement à l'article [UU84]. En particulier, la possibilité d'étude d'une extension de ces résultats pour $n > 1$ est envisageable.
- (i) Dans l'article [B+14], les auteurs ont introduit et étudié un concept de transformée de Fourier dite adaptée sur un j -groupe normal élémentaire arbitraire $\mathbb{S}$ défini à partir de star-produits $\mathbb{S}$ -invariants issus de l'article [BG14]. Un problème, certes imprécis mais intéressant, serait de voir s'il existe un lien entre ce travail et le nôtre. Nous pouvons notamment nous demander si cette transformée de Fourier adaptée à la symétrie du groupe $\mathbb{S}$ ne pourrait pas davantage simplifier les calculs que nous avons réalisés relativement à l'obtention et à la résolution de notre hiérarchie d'équations aux dérivées partielles. La question de la définition d'une nouvelle transformée de Fourier adaptée à partir des star-produits $SU(1, n)$ -invariants obtenus au théorème 2.6.14 peut également être abordée dans cet esprit.
- (j) Semblablement au cas du disque de Poincaré traité dans l'article [B+09], il est également intéressant de s'attaquer à une reformulation de notre travail au niveau des homotopies de systèmes triples de Jordan, notamment au travers de l'étude du transport de star-produits invariants sur les espaces symétriques jordanien associés à une même variété de structure ; [Be00], [BB12a], [BB12b].

Dans ce contexte, notons que la contraction de courbure évoquée précédemment, la hiérarchie d'équations aux dérivées partielles apparaissant dans notre travail, et ce concept d'homotopie entre systèmes triples de Jordan, sont des manifestations à des niveaux respectivement géométriques, analytiques et algébriques de phénomènes intimement liés au travers d'un processus de quantification. L'étude de situations aussi riches est ainsi très certainement alléchante et prometteuse de beaux résultats pour l'avenir ...

Appendices

Appendice A

Structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{su}(1, n)$

Nous présentons dans ce premier appendice la structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé. Cet exposé est ici réalisé dans les notations de la sous-section 1.5.1.

$$\begin{array}{l}
 \mathfrak{g}_0 := \left[\begin{array}{l} \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} := \boxed{\mathbb{R} H} \\ \left[\begin{array}{l} \left(\bigoplus_{l=1}^{n-1} \mathbb{R} J_l \right) \\ \oplus \left(\bigoplus_{p=2}^{n-1} \bigoplus_{q=p}^{n-1} \mathbb{R} e_{p,q}^1 \right) \\ \oplus \left(\bigoplus_{p=2}^{n-1} \bigoplus_{q=p}^{n-1} \mathbb{R} e_{p,q}^i \right) \end{array} \right] =: \mathfrak{m} \subset \mathfrak{k} \end{array} \right] \\
 \mathfrak{n} := \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left(\bigoplus_{l=1}^{n-1} \mathbb{R} b_l^1 \right) \\ \oplus \left(\bigoplus_{l=1}^{n-1} \mathbb{R} b_l^i \right) \end{array} \right] =: \mathfrak{g}_1 =: V \\ \boxed{\mathbb{R} E} =: \mathfrak{g}_2 \end{array} \right] \\
 \mathfrak{s} := \left[\begin{array}{l} \mathfrak{g}_{-1} := \left[\begin{array}{l} \left(\bigoplus_{l=1}^{n-1} \mathbb{R} c_l^1 \right) \\ \oplus \left(\bigoplus_{l=1}^{n-1} \mathbb{R} c_l^i \right) \end{array} \right] \\ \mathfrak{g}_{-2} := \boxed{\mathbb{R} F} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Les différents éléments de la base de $\mathfrak{g}$ définie à partir de sa décomposition en sous-espaces de racine restreinte sont complètement repris à travers le schéma illustré ci-dessus. Nous allons exploiter les propriétés des sous-espaces de racine de $\mathfrak{g}$ restreinte relativement à α afin de grouper les crochets de Lie des éléments de $\mathfrak{g}$ en différentes classes.

Dans la suite, nous utiliserons également une notation inspirée du bien connu symbole de Kronecker. Si x et y sont deux nombres réels, nous définissons

$$\delta_{x < y} := \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \\ 0 & \text{si } x \geq y \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta_{x > y} := \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ 0 & \text{si } x \leq y \end{cases}.$$

Les indices j, j', l, l', p, p', q et q' seront toujours des nombres naturels vérifiant les relations $1 \leq j \leq n-1$, $1 \leq j' \leq n-1$, $1 \leq l \leq n-1$, $1 \leq l' \leq n-1$, $2 \leq p \leq q \leq n-1$ et $2 \leq p' \leq q' \leq n-1$.

• Crochets de Lie du type $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$

$$[H, b_l^1] = b_l^1;$$

$$[H, b_l^i] = b_l^i;$$

$$[H, E] = 2E;$$

$$[E, b_l^1] = 0;$$

$$[E, b_l^i] = 0;$$

$$[b_l^1, b_{l'}^1] = 0;$$

$$[b_l^1, b_{l'}^i] = -2\delta_{l,l'}E;$$

$$[b_l^i, b_{l'}^i] = 0.$$

• Crochets de Lie du type $[\mathfrak{s}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{s}$

$$[H, J_j] = 0;$$

$$[H, e_{p,q}^1] = 0;$$

$$[H, e_{p,q}^i] = 0;$$

$$[E, J_j] = 0;$$

$$[E, e_{p,q}^1] = 0;$$

$$\begin{aligned}
[E, e_{p,q}^i] &= 0; \\
[b_l^1, J_j] &= -(1 + 2\delta_{l,j}) b_l^i; \\
[b_l^i, J_j] &= (1 + 2\delta_{l,j}) b_l^1; \\
[b_l^1, e_{p,q}^1] &= \delta_{p,l+1} b_q^1 - \delta_{q,l} b_{p-1}^1; \\
[b_l^1, e_{p,q}^i] &= \delta_{p,l+1} b_q^i + \delta_{q,l} b_{p-1}^i; \\
[b_l^i, e_{p,q}^1] &= \delta_{p,l+1} b_q^i - \delta_{q,l} b_{p-1}^i; \\
[b_l^i, e_{p,q}^i] &= -(\delta_{p,l+1} b_q^1 + \delta_{q,l} b_{p-1}^1).
\end{aligned}$$

• Crochets de Lie du type $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
[J_j, J_{j'}] &= 0; \\
[J_j, e_{p,q}^1] &= -2(\delta_{p,j+1} - \delta_{q,j}) e_{p,q}^i; \\
[J_j, e_{p,q}^i] &= 2(\delta_{p,j+1} - \delta_{q,j}) e_{p,q}^1; \\
[e_{p,q}^1, e_{p',q'}^1] &= \delta_{p,p'} (\delta_{q>q'} e_{q'+1,q}^1 - \delta_{q<q'} e_{q+1,q'}^1) \\
&\quad + \delta_{q,q'} (\delta_{p>p'} e_{p',p-1}^1 - \delta_{p<p'} e_{p,p'-1}^1) \\
&\quad - \delta_{p,q'+1} e_{p',q}^1 + \delta_{p',q+1} e_{p,q'}^1; \\
[e_{p,q}^1, e_{p',q'}^i] &= -\delta_{p,p'} (\delta_{q>q'} e_{q'+1,q}^i + \delta_{q<q'} e_{q+1,q'}^i) \\
&\quad + \delta_{q,q'} (\delta_{p>p'} e_{p',p-1}^i + \delta_{p<p'} e_{p,p'-1}^i) \\
&\quad - \delta_{p,q'+1} e_{p',q}^i + \delta_{p',q+1} e_{p,q'}^i + \delta_{p,p'} \delta_{q,q'} (J_q - J_{p-1}); \\
[e_{p,q}^i, e_{p',q'}^1] &= \delta_{p,p'} (\delta_{q>q'} e_{q'+1,q}^1 - \delta_{q<q'} e_{q+1,q'}^1) \\
&\quad + \delta_{q,q'} (\delta_{p>p'} e_{p',p-1}^1 - \delta_{p<p'} e_{p,p'-1}^1) \\
&\quad + \delta_{p,q'+1} e_{p',q}^1 - \delta_{p',q+1} e_{p,q'}^1.
\end{aligned}$$

• Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_1$

$$\begin{aligned}
[E, c_l^1] &= 2b_l^i; \\
[E, c_l^i] &= -2b_l^1.
\end{aligned}$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_0$

$$[b_l^1, c_{l'}^1] = 2 \left(\delta_{l,l'} H - \delta_{l>l'} e_{l'+1,l}^1 + \delta_{l<l'} e_{l+1,l'}^1 \right);$$

$$[b_l^1, c_{l'}^i] = -2 \left(\delta_{l,l'} J_l - \delta_{l>l'} e_{l'+1,l}^i - \delta_{l<l'} e_{l+1,l'}^i \right);$$

$$[b_l^i, c_{l'}^1] = 2 \left(\delta_{l,l'} J_l - \delta_{l>l'} e_{l'+1,l}^i - \delta_{l<l'} e_{l+1,l'}^i \right);$$

$$[b_l^i, c_{l'}^i] = 2 \left(\delta_{l,l'} H - \delta_{l>l'} e_{l'+1,l}^1 + \delta_{l<l'} e_{l+1,l'}^1 \right).$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_{-1}$

$$[H, c_l^1] = -c_l^1;$$

$$[H, c_l^i] = -c_l^i;$$

$$[J_j, c_l^1] = (1 + 2\delta_{j,l}) c_l^1;$$

$$[J_j, c_l^i] = -(1 + 2\delta_{j,l}) c_l^i;$$

$$[e_{p,q}^1, c_l^1] = -(\delta_{p,l+1} c_q^1 - \delta_{q,l} c_{p-1}^1);$$

$$[e_{p,q}^1, c_l^i] = -(\delta_{p,l+1} c_q^i - \delta_{q,l} c_{p-1}^i);$$

$$[e_{p,q}^i, c_l^1] = -(\delta_{p,l+1} c_q^i + \delta_{q,l} c_{p-1}^i);$$

$$[e_{p,q}^i, c_l^i] = \delta_{p,l+1} c_q^1 + \delta_{q,l} c_{p-1}^1.$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_{-2}$

$$[c_l^1, c_{l'}^1] = 0;$$

$$[c_l^1, c_{l'}^i] = -2\delta_{l,l'} F;$$

$$[c_l^i, c_{l'}^i] = 0.$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_{-2}] \subset \mathfrak{g}_0$

$$[E, F] = -4H.$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-2}] \subset \mathfrak{g}_{-1}$

$$[b_l^1, F] = -2c_l^i;$$

$$[b_l^i, F] = 2c_l^1.$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{-2}] \subset \mathfrak{g}_{-2}$

$$[H, F] = -2F;$$

$$[J_j, F] = 0;$$

$$[e_{p,q}^1, F] = 0;$$

$$[e_{p,q}^i, F] = 0.$$

- Crochets de Lie du type $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-2}] = 0$

$$[c_l^1, F] = 0;$$

$$[c_l^i, F] = 0.$$

Appendice B

Résolution de l'équation (2.28)

Dans la foulée et les notations de la sous-section 2.6.1, ce second appendice a pour but de présenter la résolution de l'équation (2.28). Si cette résolution n'est pas indispensable à la réussite de notre projet comme nous l'avons vu à la proposition 2.6.5, elle a néanmoins joué un impact non négligeable dans notre approche des travaux exposés aux sous-sections 2.6.5 et 2.7.2. Il nous semblait donc intéressant de faire part au lecteur des résultats que nous avons obtenus dans ce cadre après plusieurs centaines de pages de calculs de très nombreux mois de travail.

Parmi le grand nombre de techniques qui furent étudiées afin de tenter d'apporter une solution à l'équation (2.28), l'une d'elle consista à réduire le nombre de variables sous-jacentes au problème en cherchant exclusivement des solutions $\vartheta(a, v, \xi)$ qui soient radiales en la variable $v \in V$. Cette approche ne fut en aucun cas formulée comme déduction du lemme 2.6.9 mais bien en tant qu'*ansatz* fait antérieurement aux travaux nous ayant conduit à l'exposé de la section 2.6, ce qui est donc assez remarquable.

Dans la suite, comme lors de la sous-section 2.6.4, nous noterons $r = \sqrt{(v|v)}$ la variable radiale relativement à $v \in V$. En utilisant le lemme 2.6.11 et l'expression explicite de l'équation (2.28) fournie à la sous-section 2.6.1, quelques calculs nous permettent de constater que la recherche de solutions à l'équation (2.28) dont la

dépendance en la variable $v \in V$ soit purement radiale revient à la détermination des solutions $\vartheta = \vartheta(a, r, \xi)$ à l'équation

$$\begin{aligned}
0 = & r^3 \xi^4 \left[\left[r^2 \left(1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) + 2 \right]^2 + 4(n+3) \nu^2 - 4e^{-4a} \right] \vartheta \\
& + 16 \nu^2 r^3 \xi^4 \partial_a (\vartheta) \\
& + \left[2(2n-7) \nu^2 r^4 \xi^4 - (2n-3)(2n-5) \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right)^2 \right] \partial_r (\vartheta) \\
& - 4(2n-3) r^2 \xi^2 \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r (\vartheta) \\
& - 16 r^3 \xi^3 (2 - 3 \nu^2 \xi^2) \partial_\xi (\vartheta) \\
& + 4 \nu^2 r^3 \xi^4 \partial_a^2 (\vartheta) \\
& + \left[6 \nu^2 r^5 \xi^4 + (2n-3)(2n-5) r \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right)^2 \right] \partial_r^2 (\vartheta) \\
& + 4 r^3 \xi^2 (2 r^2 - 1) \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r^2 (\vartheta) \\
& - 16 r^3 \xi^4 (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_\xi^2 (\vartheta) \\
& + 8 r^4 \xi^2 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_a (\partial_r (\vartheta)) \\
& - 16 r^3 \xi^3 (1 - \nu^2 \xi^2) \partial_a (\partial_\xi (\vartheta)) \\
& + 16 r^4 \xi^3 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) \partial_r (\partial_\xi (\vartheta)) \\
& + 2(2n-3) r^2 \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right)^2 \partial_r^3 (\vartheta) \\
& + r^3 \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right)^2 \partial_r^4 (\vartheta),
\end{aligned}$$

dans laquelle un facteur $\frac{i e^{2a}}{4 r^3 \xi^3}$ a été mis en évidence.

Comparativement à l'approche utilisée par les auteurs dans l'article [B+09] dans le cas $n = 1$, nous allons maintenant essayer d'exhiber, au moins localement, un changement de variables visant à éliminer les dérivées croisées de cette équation. Appelons p , q et ζ les nouvelles variables issues de celui-ci et commençons tout d'abord par déterminer s'il existe un tel changement de variables de la forme

$$\begin{cases} p = f(a) g(\xi) h(r) \\ q = \alpha(a) \beta(\xi) \gamma(r) \\ \zeta = \varphi(a) \phi(\xi) \psi(r) \end{cases},$$

pour des fonctions différentiables f , g , h , α , β , γ , φ , ϕ et ψ .

Comme nous souhaiterions que celui-ci livre une équation dont les facteurs multiplicatifs des opérateurs de dérivation $\partial_p \partial_q$, $\partial_p \partial_\xi$ et $\partial_q \partial_\xi$ soient nuls, au vu des deux derniers termes de l'équation, ceux-ci étant les seuls à faire intervenir des dérivées d'ordre strictement supérieur à deux, il paraît raisonnable d'imposer préalablement que les expressions de deux de ces nouvelles variables ne dépendent pas de la variable radiale r . Posons donc $h = \psi = 1$. Le système d'équations différentielles suivant doit alors nécessairement être vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 8\nu^2 r^3 \xi^4 f' g \alpha' \beta \gamma - 32 r^3 \xi^4 (1 - \nu^2 \xi^2) f g' \alpha \beta' \gamma \\ \quad + 8 r^4 \xi^2 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) f' g \alpha \beta \gamma' \\ \quad + 16 r^4 \xi^3 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) f g' \alpha \beta \gamma' \\ \quad - 16 r^3 \xi^3 (1 - \nu^2 \xi^2) (f' g \alpha \beta' \gamma + f g' \alpha' \beta \gamma) \\ 0 = 8\nu^2 r^3 \xi^4 f' g \varphi' \phi - 32 r^3 \xi^4 (1 - \nu^2 \xi^2) f g' \varphi \phi' \\ \quad - 16 r^3 \xi^3 (1 - \nu^2 \xi^2) (f' g \varphi \phi' + f g' \varphi' \phi) \\ 0 = 8\nu^2 r^3 \xi^4 \alpha' \beta \gamma \varphi' \phi - 32 r^3 \xi^4 (1 - \nu^2 \xi^2) \alpha \beta' \gamma \varphi \phi' \\ \quad + 8 r^4 \xi^2 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \alpha \beta \gamma' \varphi' \phi \\ \quad + 16 r^4 \xi^3 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \alpha \beta \gamma' \varphi \phi' \\ \quad - 16 r^3 \xi^3 (1 - \nu^2 \xi^2) (\alpha' \beta \gamma \varphi \phi' + \alpha \beta' \gamma \varphi' \phi) \end{array} \right. .$$

Afin de simplifier la résolution de ces équations, tentons d'observer s'il existe de telles fonctions dans le cas où la dépendance en la variable a est contenue uniquement dans l'expression de la variable p . Dans ce cas, d'une part, nous pouvons supposer les égalités $\alpha = \varphi = 1$, et d'autre part, pour garder un changement de variables valide, nous devons nécessairement avoir $f' \neq 0$, $\gamma' \neq 0$ et $\phi' \neq 0$. Le système d'équations peut alors se récrire

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -4 \xi^2 \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} f g' \beta' \gamma + r (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) f' g \beta \gamma' \\ \quad + 2 r \xi (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) f g' \beta \gamma' - 2 \xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} f' g \beta' \gamma \\ 0 = 2 \xi f g' + f' g \\ 0 = -2 \xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \beta' \gamma + r (-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}) \beta \gamma' \end{array} \right. .$$

Notons qu'un raisonnement semblable ne serait pas possible en remplaçant la variable a par la variable ξ compte tenu de la forme du système d'équations dans

lequel tous les termes dépendent explicitement de cette dernière variable. À la suite de ces calculs, nous pouvons maintenant directement remarquer que la première équation est une conséquence de la deuxième et que les deux autres équations se séparent chacune en deux équations différentielles d'ordre 1 ne dépendant que d'une seule variable. Plus précisément, nous obtenons :

- $f'(a) = c_1 f(a)$;
- $-2\xi g'(\xi) = c_1 g(\xi)$;
- $2\xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \beta'(\xi) = c_2 \left(-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}\right) \beta(\xi)$;
- $r \gamma'(r) = c_2 \gamma(r)$;

pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes quelconques. Étant donné que nous recherchons un changement de variables local sous une forme espérée simple, le choix des valeurs $c_1 = -2$ et $c_2 = 1$ paraît judicieux. Celui-ci nous livre directement

$$f(a) = e^{-2a}, \quad g(\xi) = \xi \quad \text{et} \quad \gamma(r) = r.$$

Un bref calcul nous permet alors d'en déduire

$$\beta(\xi) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}} = \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\operatorname{arcsinh}(\nu \xi)}{2}\right).$$

Ces solutions ne sont bien évidemment données qu'à une constante multiplicative près. Dès lors, si $c_p, c_q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont deux telles constantes non fixées, un changement de variables local valide peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{cases} p = c_p \xi e^{-2a} \\ q = c_q \sqrt{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}} r \\ \zeta = \phi(\xi) \end{cases}.$$

Si nous posons

$$c_p = 1, \quad c_q = \frac{1}{\sqrt{i\nu}} \quad \text{et} \quad \phi(\xi) = \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2},$$

nous en tirons alors un difféomorphisme

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times]1, +\infty[$$

qui à un point (a, r, ξ) de son domaine de définition associe

$$\Phi(a, r, \xi) := \left(\xi e^{-2a}, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{i\nu}} r, \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right).$$

Son inverse est l'application

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

dont la valeur au point (p, q, ζ) de son domaine de définition est donnée par

$$\left(-\frac{1}{2} \ln \left(|p| \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \right), q \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}}, \text{sign}(p) \sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \sqrt{\frac{\zeta-1}{i\nu}} \right).$$

Le choix de la fonction $\phi(\xi)$ et de la constante c_q est notamment basé sur l'expression agréable de cette application inverse Φ^{-1} que nous obtenons, celle-ci faisant apparaître régulièrement les mêmes fonctions

$$\sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\zeta-1}{i\nu}},$$

ce qui nous laisse espérer obtenir quelques simplifications lorsque le changement de variables sera effectué dans l'équation.

Lançons-nous maintenant dans le calcul explicite du changement de variables sous-jacent à ce difféomorphisme dans l'équation concernant cet appendice. Commençons par noter les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{i\nu}} &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{2\xi \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{i\nu}}; \\ \frac{d^2}{d\xi^2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{i\nu}} &= \nu^2 \frac{-2 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{4(\sqrt{1 - \nu^2 \xi^2})^3} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \nu^2 \xi^2}}{i\nu}}. \end{aligned}$$

Pour tout $(p, q, \zeta) \in \text{im}(\Phi)$, ces dernières nous permettent alors d'obtenir :

- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_a \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)} = -2p \partial_p;$
- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_a^2 \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)} = 4p \partial_p + 4p^2 \partial_p^2;$
- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_r^k \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)} = \left(\sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \right)^k \partial_q^k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N};$
- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_\xi \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)}$

$$= |p| \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_p + \text{sign}(p) \frac{q(\zeta-1)}{2\zeta} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_q$$

$$- \text{sign}(p) \frac{\nu^2}{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \sqrt{\frac{\zeta-1}{i\nu}} \partial_\zeta;$$

- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_\xi^2 \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)}$

$$= \frac{\nu^2 q (\zeta-2)}{4\zeta^3} \partial_q - \frac{\nu^2}{\zeta^3} \partial_\zeta + p^2 \left(\frac{i\nu}{\zeta+1} \right) \left(\frac{i\nu}{\zeta-1} \right) \partial_p^2 + \frac{q^2 (\zeta-1)^2}{4\zeta^2} \left(\frac{i\nu}{\zeta+1} \right) \left(\frac{i\nu}{\zeta-1} \right) \partial_q^2$$

$$+ \frac{\nu^4}{\zeta^2} \left(\frac{\zeta+1}{i\nu} \right) \left(\frac{\zeta-1}{i\nu} \right) \partial_\zeta^2 + \frac{pq(\zeta-1)}{\zeta} \left(\frac{i\nu}{\zeta+1} \right) \left(\frac{i\nu}{\zeta-1} \right) \partial_p \partial_q - \frac{2\nu^2 p}{\zeta} \partial_p \partial_\zeta$$

$$- \frac{\nu^2 q (\zeta-1)}{\zeta^2} \partial_q \partial_\zeta ;$$
- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_a \partial_r \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)} = -2p \sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \partial_p \partial_q ;$
- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_a \partial_\xi \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)}$

$$= -2|p| \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_p - 2p|p| \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_p^2$$

$$- \frac{|p|q(\zeta-1)}{\zeta} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta+1}} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_p \partial_q + \frac{2\nu^2 |p|}{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \sqrt{\frac{\zeta-1}{i\nu}} \partial_p \partial_\zeta ;$$
- $\left((\Phi^{-1})^* \circ \partial_r \partial_\xi \circ \Phi^* \right) \Big|_{(p,q,\zeta)}$

$$= \text{sign}(p) \frac{\zeta-1}{2\zeta} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_q + |p| \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_p \partial_q$$

$$+ \text{sign}(p) \frac{q(\zeta-1)}{2\zeta} \sqrt{\frac{i\nu}{\zeta-1}} \partial_q^2 - \text{sign}(p) \frac{\nu^2}{\zeta} \left(\frac{\zeta+1}{i\nu} \right) \sqrt{\frac{\zeta-1}{i\nu}} \partial_q \partial_\zeta .$$

Grâce à ces longs et pénibles calculs, notre changement de variables peut enfin s'appliquer à l'équation obtenue pour une solution ϑ radiale en v . Celui-ci nous livre l'équation aux dérivées partielles suivante en les variables p , q et ζ où le facteur $\sqrt{\frac{\zeta+1}{i\nu}} \left(\frac{\zeta-1}{i\nu} \right)^2$ a été préalablement mis en évidence dans chaque terme :

$$0 = q^3 \left[(i\nu q^2 + 2)^2 + 4(n+3)\nu^2 + 4\nu^2 \frac{p^2}{\zeta^2 - 1} \right] \vartheta$$

$$+ [(2n-3)(2n-5)\nu^2 - 4(2n-3)i\nu q^2 + 2(2n-1)\nu^2 q^4] \partial_q(\vartheta)$$

$$+ 48\nu^2 q^3 \zeta \partial_\zeta(\vartheta)$$

$$- 16\nu^2 \frac{p^2 q^3}{\zeta^2 - 1} \partial_p^2(\vartheta)$$

$$- q[(2n-3)(2n-5)\nu^2 + 4i\nu q^2 - 2\nu^2 q^4] \partial_q^2(\vartheta)$$

$$+ 16\nu^2 q^3 (\zeta^2 - 1) \partial_\zeta^2(\vartheta)$$

$$- 2(2n-3)\nu^2 q^2 \partial_q^3(\vartheta)$$

$$- \nu^2 q^3 \partial_q^4(\vartheta) .$$

Un fait important que nous pouvons observer est que ce changement de variables se comporte bien dans l'expression finale de notre équation par rapport au signe de la variable ξ . En effet, faire ce calcul sur une des deux composantes connexes du domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ nous donne la même forme pour notre équation. Par ailleurs, cette dernière équation possède l'avantage d'être facilement séparable multiplicativement, ce qui était notre espoir inavoué en recherchant un tel changement de variables supprimant les dérivées croisées de notre équation. En effet, si nous cherchons les solutions du type

$$\vartheta(p, q, \zeta) = u(p) v(q) w(\zeta),$$

nous obtenons trois équations différentielles portant respectivement sur $u(p)$, $v(q)$ et $w(\zeta)$:

$$(i) \quad 0 = 4p^2 u''(p) - (\delta + p^2) u(p);$$

$$(ii) \quad 0 = \left[\left(q^2 + \frac{2}{i\nu} \right)^2 - 4(n+3) + 4\epsilon \right] v(q) \\ - \frac{1}{q^3} \left[(2n-3)(2n-5) + (2n-3) \frac{4}{i\nu} q^2 + 2(2n-1) q^4 \right] v'(q) \\ + \frac{1}{q^2} \left[(2n-3)(2n-5) - \frac{4}{i\nu} q^2 - 2q^4 \right] v''(q) \\ + 2(2n-3) \frac{1}{q} v'''(q) \\ + v''''(q);$$

$$(iii) \quad 0 = 4(\zeta^2 - 1)^2 w''(\zeta) + 12\zeta(\zeta^2 - 1) w'(\zeta) + [\epsilon(\zeta^2 - 1) - \delta] w(\zeta);$$

où δ et ϵ sont des constantes complexes quelconques.

Nous allons maintenant passer aux résolutions de ces équations. Celles-ci furent découvertes en deux temps. En effet, si ce sont des méthodes numériques qui inspirèrent en premier lieu le type de solutions de nos équations, ce n'est qu'après une étude de diverses propriétés de fonctions spéciales associées aux solutions numériques que la suite du présent travail put être achevée au sens mathématique du terme. Cet apprentissage fut pour nous une initiation enrichissante à ce domaine des mathématiques qu'est la théorie des fonctions spéciales. Parmi la foule de références qui existent sur le sujet, nous en pointerons cinq nous ayant été spécialement utiles afin de rédiger les lignes qui suivent :

- [O+10, ch.10, ch.13 & ch.14] : ce chef-d'œuvre est sans conteste la référence la plus complète, la plus importante et la plus intéressante dans notre démarche.
- [AS65, ch.8, ch.9, ch.10 & ch.13] : également un très bel ouvrage, plus ancien et assez proche de la première référence.
- [GR07, ch.8 & ch.9] : livre apportant des informations intéressantes mais devant obligatoirement être recoupé avec les deux premières références pour ne pas tomber dans l'écueil des imprécisions s'y trouvant.
- [Wa66, ch.3, ch.4 & ch.5] : une référence célèbre et exceptionnelle sur les fonctions de Bessel.
- [Kr10, ch.5, ch.6 & ch.7] : livre intéressant dans ce contexte mais que nous avons cependant très peu utilisé vu la richesse des autres références.

Équation (i)

Nous allons résoudre cette équation séparément sur chacune des deux composantes connexes du domaine auquel la variable p appartient à savoir $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}_- \setminus \{0\}$.

Si $p > 0$, définissons la fonction

$$\hat{u} : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : p \mapsto \frac{1}{\sqrt{p}} u(p).$$

Dès lors, le remplacement de $u(p)$ par $\sqrt{p} \hat{u}(p)$ dans l'équation (i) et la mise en évidence du facteur $4\sqrt{p}$ dans chaque terme de l'équation obtenue nous donne l'équation différentielle suivante sur $\hat{u}(p)$:

$$0 = p^2 \hat{u}''(p) + p \hat{u}'(p) - \frac{1}{4} (p^2 + \delta + 1) \hat{u}(p).$$

Le changement de variable $\hat{p} = \frac{1}{2} p$ appliqué à celle-ci induit alors l'équation

$$0 = \hat{p}^2 \hat{u}''(\hat{p}) + \hat{p} \hat{u}'(\hat{p}) - \left(\hat{p}^2 + \frac{\delta + 1}{4} \right) \hat{u}(\hat{p}).$$

Pour $\mu_\delta \in \mathbb{C}$ fixé vérifiant $(\mu_\delta)^2 = \frac{\delta+1}{4}$, nous remarquons aisément que cette dernière n'est autre que l'équation différentielle bien connue caractérisant les fonctions de Bessel modifiées en la variable $\hat{p}$ de paramètre $(-1)^j \mu_\delta$ pour tout $j \in \{0, 1\}$; [O+10, ch.10, § 25]. Les fonctions $I_{\mu_\delta}(\hat{p})$ et $K_{\mu_\delta}(\hat{p})$ en sont deux solutions linéairement indépendantes quelque soit $\delta \in \mathbb{C}$. Par conséquent, si C_1^I et C_1^K sont des constantes multiplicatives quelconques, les solutions à l'équation (i) définies sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ sont données par

$$u(p) = C_1^I \sqrt{p} I_{\mu_\delta} \left(\frac{p}{2} \right) + C_1^K \sqrt{p} K_{\mu_\delta} \left(\frac{p}{2} \right).$$

Si $p < 0$, le changement de variable $p^{\text{op}} = -p$ livre l'équation

$$0 = 4(p^{\text{op}})^2 u''(p^{\text{op}}) - \left(\delta + (p^{\text{op}})^2\right) u(p^{\text{op}}),$$

avec $p^{\text{op}} > 0$. Comme cette équation correspond exactement à celle traitée ci-dessus, il nous suffit d'appliquer la précédente résolution afin de lui régler son compte.

Par conséquent, les solutions à l'équation (i) sont données sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$u(p) = C_1^I \sqrt{|p|} I_{\mu_\delta} \left(\left| \frac{p}{2} \right| \right) + C_1^K \sqrt{|p|} K_{\mu_\delta} \left(\left| \frac{p}{2} \right| \right),$$

C_1^I et C_1^K étant des constantes multiplicatives quelconques.

Équation (ii)

Le premier problème apparaissant dans la résolution de cette équation est le fait qu'elle soit d'ordre 4. Il est donc naturel de s'interroger sur la possibilité de la récrire comme la composition d'opérateurs d'ordres moins élevés agissant sur la fonction $v_r(q)$.

Dans ce but, commençons par examiner la possibilité d'exprimer notre équation sous la forme du carré d'un opérateur d'ordre deux agissant sur $v_r(q)$. Ceci nous amène alors à la détermination de deux fonctions $f_0, f_1 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que l'équation

$$\left[\partial_q^2 + f_1(q) \partial_q + f_0(q) \text{Id} \right]^2 (v_r(q)) = 0$$

soit équivalente à l'équation (ii). Notons que la forme de l'opérateur d'ordre deux a été choisie afin que les facteurs multiplicatifs des dérivées quatrième de $v_r(q)$ des deux équations coïncident. Nécessairement, une telle correspondance pour les coefficients de $v_r'''(q)$ et $v_r''(q)$ impose successivement

$$f_1(q) = \frac{2n-3}{q} \quad \text{et} \quad f_0(q) = -\left(q^2 + \frac{2}{i\nu}\right).$$

Si nous développons l'opérateur ainsi obtenu, nous observons que l'équation (ii) est alors équivalente à

$$\left[\partial_q^2 + \frac{2n-3}{q} \partial_q - \left(q^2 + \frac{2}{i\nu}\right) \text{Id} \right]^2 (v_r(q)) = 4(4 - \epsilon) v_r(q).$$

Par conséquent, même si l'équation ne se récrit pas comme le carré d'un opérateur d'ordre deux agissant sur $v_r(q)$, nous en obtenons une forme plus agréable qui va

nous faciliter sa résolution. En effet, si $\mu_\epsilon \in \mathbb{C}$ désigne une racine carrée fixée de $4 - \epsilon$, cette dernière équation peut alors se récrire

$$(O_0 \circ O_1) v_l(q) = 0 = (O_1 \circ O_0) v_l(q),$$

O_0 et O_1 étant deux opérateurs d'ordre deux définis par

$$O_j|_q := \partial_q^2 + \frac{2n-3}{q} \partial_q - \left(q^2 + \frac{2}{i\nu} + 2(-1)^j \mu_\epsilon \right) \text{Id},$$

pour $j \in \{0, 1\}$. Dès lors, les fonctions $v_l(q)$ satisfaisant à l'une des équations

$$O_0 v_l(q) = 0 \quad \text{ou} \quad O_1 v_l(q) = 0$$

seront automatiquement solutions de notre équation de départ. Définissons maintenant la fonction

$$\hat{v} : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : q \mapsto \sqrt{e^{q^2}} v_l(q)$$

et fixons $j \in \{0, 1\}$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= O_j v_l(q) = O_j \left(e^{-\frac{q^2}{2}} \hat{v}(q) \right) \\ &= e^{-\frac{q^2}{2}} \left[\hat{v}''(q) - \frac{1}{q} (2q^2 - (2n-3)) \hat{v}'(q) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(n-1 + \frac{1}{i\nu} + (-1)^j \mu_\epsilon \right) \hat{v}(q) \right]. \end{aligned}$$

Le changement de variable $\hat{q} = q^2$ appliqué à cette dernière expression nous donne, après mise en évidence du facteur $4e^{-\frac{\hat{q}}{2}}$ dans chaque terme,

$$0 = \hat{q} \hat{v}''(\hat{q}) + (n-1-\hat{q}) \hat{v}'(\hat{q}) - \frac{1}{2} \left(n-1 + \frac{1}{i\nu} + (-1)^j \mu_\epsilon \right) \hat{v}(\hat{q}).$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Kummer ; [O+10, ch.13, §2]. Comme $-(n-1) \notin \mathbb{N}$, deux solutions linéairement indépendantes à celle-ci sont données par les fonctions dites hypergéométriques confluentes

$$\begin{aligned} &M \left(\frac{1}{2} \left(n-1 + \frac{1}{i\nu} + (-1)^j \mu_\epsilon \right), n-1, \hat{q} \right) \\ \text{et } &U \left(\frac{1}{2} \left(n-1 + \frac{1}{i\nu} + (-1)^j \mu_\epsilon \right), n-1, \hat{q} \right). \end{aligned}$$

D'où, les solutions à l'équation $O_j v_l(q) = 0$ pour $j \in \{0, 1\}$ sont données par

$$\begin{aligned} v_l(q) &= C_{2,j}^M e^{-\frac{q^2}{2}} M \left(\frac{1}{2} \left(n-1 + \frac{1}{i\nu} + (-1)^j \mu_\epsilon \right), n-1, q^2 \right) \\ &\quad + C_{2,j}^U e^{-\frac{q^2}{2}} U \left(\frac{1}{2} \left(n-1 + \frac{1}{i\nu} + (-1)^j \mu_\epsilon \right), n-1, q^2 \right), \end{aligned}$$

$C_{2,j}^M$ et $C_{2,j}^U$ étant des constantes multiplicatives quelconques. Toute combinaison linéaire de ces fonctions sont donc également des solutions de l'équation (ii).

Équation (iii)

Comme précédemment, nous allons définir une nouvelle fonction $\hat{w}(\zeta)$ permettant de retrouver une équation différentielle dont les solutions sont bien connues. Soit

$$\hat{w} :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} : \zeta \mapsto \sqrt[4]{\zeta^2 - 1} w(\zeta).$$

Le remplacement de $w(\zeta)$ par $\sqrt[4]{\frac{1}{\zeta^2 - 1}} \hat{w}(\zeta)$ dans l'équation (iii) et la mise en évidence du facteur $-4 \left(\sqrt[4]{\zeta^2 - 1} \right)^3$ dans chaque terme de l'équation obtenue livrent alors

$$0 = (1 - \zeta^2) \hat{w}''(\zeta) - 2\zeta \hat{w}'(\zeta) + \frac{1}{4} \left(3 - \epsilon - \frac{\delta + 1}{1 - \zeta^2} \right) \hat{w}(\zeta).$$

Comme

$$\frac{1}{4} \left(3 - \epsilon - \frac{\delta + 1}{1 - \zeta^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(1 + (-1)^j \mu_\epsilon \right) \left(-\frac{1}{2} \left(1 + (-1)^j \mu_\epsilon \right) + 1 \right) - \frac{(\mu_\delta)^2}{1 - \zeta^2}$$

pour tout $j \in \{0, 1\}$, nous remarquons aisément que les fonctions de Legendre associées

$$P_{-\frac{1}{2}(1 + (-1)^j \mu_\epsilon)}^{(-1)^k \mu_\delta}(\zeta) \quad \text{et} \quad Q_{-\frac{1}{2}(1 + (-1)^j \mu_\epsilon)}^{(-1)^k \mu_\delta}(\zeta)$$

sont solutions à cette équation pour tout $j, k \in \{0, 1\}$ tels que ces fonctions soient bien définies, c'est-à-dire si

$$(-1)^{k+1} \mu_\delta + \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^j \mu_\epsilon \right) - 1 \notin \mathbb{N};$$

[O+10, ch.14, § 2]. Il s'ensuit alors sous l'hypothèse $-\mu_\delta + \frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon) - 1 \notin \mathbb{N}$ que la fonction

$$w(\zeta) = C_3^P \sqrt[4]{\frac{1}{\zeta^2 - 1}} P_{-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon)}^{\mu_\delta}(\zeta) + C_3^Q \sqrt[4]{\frac{1}{\zeta^2 - 1}} Q_{-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon)}^{\mu_\delta}(\zeta)$$

est solution à l'équation (iii) pour C_3^P et C_3^Q des constantes multiplicatives quelconques. Dans le cas où $-\mu_\delta + \frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon) - 1 \in \mathbb{N}$, comme seule la fonction $Q_{-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon)}^{\mu_\delta}(\zeta)$ n'est pas définie, l'assertion reste vraie en posant $C_3^Q = 0$. Remarquons que, dans ce cas, nous n'avons pas nécessairement toutes les solutions à l'équation (iii) étant donné que les fonctions

$$P_{-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon)}^{\mu_\delta}(\zeta) \quad \text{et} \quad Q_{-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon)}^{\mu_\delta}(\zeta)$$

ne sont pas toujours linéairement indépendantes. C'est toutefois le cas si

$$-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon) \pm \mu_\delta \notin \mathbb{Z}$$

ou si

$$-\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon), \mu_\delta \in \mathbb{N} \text{ et sont tels que } -\frac{1}{2}(1 + \mu_\epsilon) \geq \mu_\delta.$$

Famille particulière de solutions

Comme la fonction $z \mapsto z^2$ est surjective dans $\mathbb{C}$ et que les constantes δ et ϵ ne se manifestent dans l'expression finale des différentes solutions que sous la forme des complexes μ_δ et μ_ϵ , nous pouvons remplacer δ et ϵ par de nouvelles constantes complexes arbitraires $\hat{\delta}$ et $\hat{\epsilon}$ en posant

$$\begin{cases} \delta = 4\hat{\delta}^2 - 1 \\ \epsilon = 4 - (2\hat{\epsilon} + 1)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu_\delta = \hat{\delta} \\ \mu_\epsilon = -(2\hat{\epsilon} + 1) \end{cases}.$$

Ainsi, pour toutes constantes complexes $\hat{\delta}, \hat{\epsilon}, C_1^I, C_1^K, C_{2,0}^M, C_{2,0}^U, C_{2,1}^M, C_{2,1}^U, C_3^P$ et C_3^Q vérifiant

$$-(\hat{\delta} + \hat{\epsilon} + 1) \notin \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad C_3^Q = 0,$$

un recoupement de l'ensemble des résultats obtenus dans cet appendice et réexprimés dans les variables $(a, v, \xi) \in \mathbb{S}$ de départ nous mène à la conclusion que l'application

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathbb{R} \times V \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, v, \xi) &\longmapsto \sqrt{\frac{1}{i\nu}} e^{-a} e^{-\frac{1}{i\nu}(v|v)} \cosh^2\left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right) u(a, \xi) v_r(v, \xi) w(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad u(a, \xi) := C_1^I I_{\hat{\delta}}\left(\frac{|\xi| e^{-2a}}{2}\right) + C_1^K K_{\hat{\delta}}\left(\frac{|\xi| e^{-2a}}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} v_r(v, \xi) &:= C_{2,0}^M M\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{i\nu} - 2(\hat{\epsilon} + 1)\right), n - 1, q^2(v, \xi)\right) \\ &+ C_{2,0}^U U\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{i\nu} - 2(\hat{\epsilon} + 1)\right), n - 1, q^2(v, \xi)\right) \\ &+ C_{2,1}^M M\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{i\nu} + 2\hat{\epsilon}\right), n - 1, q^2(v, \xi)\right) \\ &+ C_{2,1}^U U\left(\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{i\nu} + 2\hat{\epsilon}\right), n - 1, q^2(v, \xi)\right), \\ \text{où} \quad q^2(v, \xi) &:= \frac{2}{i\nu}(v|v) \cosh^2\left(\frac{\text{arcsinh}(i\nu\xi)}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\text{et } w(\xi) := C_3^P P_\epsilon^{\delta} \left(\sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right) + C_3^Q Q_\epsilon^{\delta} \left(\sqrt{1 - \nu^2 \xi^2} \right),$$

est solution à l'équation (2.28).

Appendice C

Point de vue numérique sur la sous-section 2.7.2

Cet appendice présente un complément numérique à la sous-section 2.7.2, et en particulier à la preuve de la proposition 2.7.5. Les lignes de code que nous exposons ci-dessous sont issues du logiciel de calcul symbolique *Mathematica* édité par *Wolfram Research*. Toutes les notations utilisées dans ce qui suit sont semblables à celles du cadre dans lequel est formulée la proposition 2.7.5, à l'exception du paramètre réel de déformation $i\nu$ noté plus simplement $\theta \in \mathbb{R}$.

Preuve numérique de la proposition 2.7.5.

Définition de la solution particulière et de ses dérivées.

$$\begin{aligned} \text{In[1]:= } v[a, r, \xi] := & \frac{\alpha}{\theta * \xi} * \\ & \text{Exp} \left[(-1)^j * \frac{\xi * \text{Exp}[-2 * a]}{2} + \frac{(-1)^k}{\theta} * r^2 * \left(\text{Cosh} \left[\frac{\text{ArcSinh}[\theta * \xi]}{2} \right] \right)^2 + \right. \\ & \left. (-1)^1 * \left((n - 1) - \frac{(-1)^k}{\theta} \right) * \frac{\text{ArcSinh}[\theta * \xi]}{2} \right] \end{aligned}$$

```

In[2]:= wa[a, r, ξ] := FullSimplify[D[v[a, r, ξ], a]]
In[3]:= wr[a, r, ξ] := FullSimplify[D[v[a, r, ξ], r]]
In[4]:= wx[a, r, ξ] := FullSimplify[D[v[a, r, ξ], ξ]]
In[5]:= waa[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wa[a, r, ξ], a]]
In[6]:= wrr[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wr[a, r, ξ], r]]
In[7]:= wxx[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wax[a, r, ξ], ξ]]
In[8]:= war[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wa[a, r, ξ], r]]
In[9]:= wax[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wa[a, r, ξ], ξ]]
In[10]:= wrx[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wr[a, r, ξ], ξ]]
In[11]:= w3r[a, r, ξ] := FullSimplify[D[wrr[a, r, ξ], r]]
In[12]:= w4r[a, r, ξ] := FullSimplify[D[w3r[a, r, ξ], r]]

```

Injection de la solution particulière dans la version de l'équation (2.28) fournie en début d'appendice B pour une solution radiale en $v \in V$.

```

In[13]:= FullSimplify[
  (r^3 * xi^4 * ((r^2 * (1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2)) + 2)^2 - 4 * (n + 3) * theta^2 - 4 * Exp[-4 * a]) *
    v[a, r, xi]) - (16 * theta^2 * r^3 * xi^4 * wa[a, r, xi]) -
  ((2 * (2 n - 7) * theta^2 * r^4 * xi^4 + (2 n - 3) * (2 n - 5) * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2))^2 +
    4 * (2 n - 3) * r^2 * xi^2 * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2))) * wr[a, r, xi]) -
  (16 * r^3 * xi^3 * (2 + 3 * theta^2 * xi^2) * wx[a, r, xi]) - (4 * theta^2 * r^3 * xi^4 * waa[a, r, xi]) +
  ((-6 * theta^2 * r^5 * xi^4 + (2 n - 3) * (2 n - 5) * r * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2))^2 +
    4 * r^3 * xi^2 * (2 * r^2 - 1) * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2))) * wrr[a, r, xi]) -
  (16 * r^3 * xi^4 * (1 + theta^2 * xi^2) * wxx[a, r, xi]) +
  (8 * r^4 * xi^2 * sqrt(1 + theta^2 * xi^2) * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2)) * war[a, r, xi]) -
  (16 * r^3 * xi^3 * (1 + theta^2 * xi^2) * wax[a, r, xi]) +
  (16 * r^4 * xi^3 * sqrt(1 + theta^2 * xi^2) * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2)) * wrx[a, r, xi]) +
  (2 * (2 n - 3) * r^2 * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2))^2 * w3r[a, r, xi]) +
  (r^3 * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2))^2 * w4r[a, r, xi]),
  Element[{n, j, k, l}, Integers]]
Out[13]= 0

```

Injection de la solution particulière dans l'équation (2.31).

```

In[14]:= FullSimplify[
  (r * xi^2 * (r^2 * (1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2)) + 2 + 2 * Exp[-2 * a]) * v[a, r, xi]) -
  ((2 n - 1) * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2)) * wr[a, r, xi]) +
  (r * (-1 + sqrt(1 + theta^2 * xi^2)) * wrr[a, r, xi]) -

```

$$\begin{aligned}
& \left(2 * \left(-1 + \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} \right) * \text{war}[a, r, \xi] \right) - \\
& \left(4 * \xi * \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} * \text{wrx}[a, r, \xi] \right), \text{Element}[\{n, j, k, l\}, \text{Integers}] \\
\text{Out}[14] = & \frac{1}{\theta^2 \xi} 2 e^{\frac{1}{2} \left(-4 a + (-1)^j e^{-2 a} \xi + \frac{(-1)^k \xi^2 \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right)}{\theta} - \frac{(-1)^l \left((-1)^k + \theta - n \theta \right) \text{ArcSinh}[\theta \xi]}{\theta} \right)} r^\alpha \\
& \left(-\xi \left(-\theta \xi + (-1)^{j+k} \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right) \right) + e^{2 a} \left(2 (-1)^k \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. (-1 + (-1)^k (-1 + n) \theta) \xi \left(\theta \xi + (-1)^l \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Injection de la solution particulière dans l'équation (2.32).

$$\begin{aligned}
\text{In}[15] := & \text{FullSimplify} \left[\left(2 * r^3 * \xi^2 * \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} \right) * (v[a, r, \xi] + wa[a, r, \xi]) \right) - \right. \\
& \left(\left((2 n - 3) * r^4 * \xi^2 \right) * \left(-1 + \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} \right) + 2 * r^4 * \xi^2 * \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} - \right. \\
& \left. 2 * \text{Exp}[-2 * a] * r^2 * \xi^2 + 2 * r^2 * \xi^2 \right) * \text{wr}[a, r, \xi] \left. \right) + \\
& \left(4 * r^3 * \xi^3 * \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} * \text{wx}[a, r, \xi] \right) + \\
& \left((2 n - 3) * r * \left(-1 + \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} \right) * \text{wrr}[a, r, \xi] \right) + \\
& \left(r^2 * \left(-1 + \sqrt{1 + \theta^2 * \xi^2} \right) * \text{w3r}[a, r, \xi] \right), \\
& \text{Element}[\{n, j, k, l\}, \text{Integers}] \\
\text{Out}[15] = & \frac{1}{\theta^2} 2 e^{\frac{1}{2} \left(-4 a + (-1)^j e^{-2 a} \xi + \frac{(-1)^k \xi^2 \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right)}{\theta} - \frac{(-1)^l \left((-1)^k + \theta - n \theta \right) \text{ArcSinh}[\theta \xi]}{\theta} \right)} \\
& r^3 \alpha \xi \left(-(-1)^j \theta \xi + (-1)^k \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right) - \right. \\
& e^{2 a} \left((-1)^k \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right) + \theta \left(-1 + (-1)^l \left((-1)^k + \theta \right) \xi + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} - n \left(1 + (-1)^l \theta \xi + \sqrt{1 + \theta^2 \xi^2} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Vérification de la conjecture 2.7.7 pour la solution particulière de la proposition 2.7.5.

Définition de la limite pour n tendant vers 1 de la solution particulière et de ses dérivées.

$$\text{In[16]:= } s[a, \xi] := \frac{\alpha}{\theta * \xi} * \text{Exp}\left[(-1)^j * \frac{\xi * \text{Exp}[-2 * a]}{2} + (-1)^1 * \frac{\text{ArcSinh}[\theta * \xi]}{2 * \theta}\right]$$

In[17]:= **sa[a, ξ] := FullSimplify[D[s[a, ξ], a]]**

In[18]:= **sx[a, ξ] := FullSimplify[D[s[a, ξ], ξ]]**

In[19]:= **saa[a, ξ] := FullSimplify[D[sa[a, ξ], a]]**

In[20]:= **sxx[a, ξ] := FullSimplify[D[sx[a, ξ], ξ]]**

In[21]:= **sax[a, ξ] := FullSimplify[D[sa[a, ξ], ξ]]**

Injection de la solution limite dans l'équation (2.39).

In[22]:= **FullSimplify[(ξ * ((1 / 4) - θ² - (Exp[-4 * a] / 4)) * s[a, ξ] -
 (θ² * ξ * sa[a, ξ]) - ((2 + 3 * θ² * ξ²) * sx[a, ξ]) -
 (θ² * (ξ / 4) * saa[a, ξ]) - (ξ * (1 + θ² * ξ²) * sxx[a, ξ]) -
 ((1 + θ² * ξ²) * sax[a, ξ]), Element[{n, j, l}, Integers]]**

Out[22]= 0

Bibliographie

- [A+83] ARNAL D., CORTET J. C., MOLIN P. & PINCZON G. *Covariance and geometrical invariance in $\ast$ -quantization*, Journal of Mathematical Physics, volume 24, issue 2, pp 276 - 283, 1983.
- [AS65] ABRAMOWITZ Milton & STEGUN Irene Ann, *Handbook of mathematical functions*, Dover books on intermediate and advanced mathematics, Dover Publications, Inc., 1965, originally published in 1964.
- [B+78a] BAYEN François, FLATO Moshé, FRONSDAL Christian, LICHNEROWICZ André, STERNHEIMER Daniel, *Deformation theory and quantization I : Deformations of symplectic structures*, Annals of Physics, volume 111, issue 1, pp 61 - 110, Academic Press, Inc., 1978.
- [B+78b] BAYEN François, FLATO Moshé, FRONSDAL Christian, LICHNEROWICZ André, STERNHEIMER Daniel, *Deformation theory and quantization II : Physical applications*, Annals of Physics, volume 111, issue 1, pp 111 - 151, Academic Press, Inc., 1978.
- [B+97] BERTELSON Mélanie, CAHEN Michel & GUTT Simone, *Equivalence of star-products*, Classical and Quantum Gravity, volume 14, issue 1A, A93 - A107, 1997.
- [B+98] BERTELSON Mélanie, BIELIAVSKY Pierre & GUTT Simone, *Parametrizing equivalence classes of invariant star-products*, Letters in Mathematical Physics, volume 46, issue 4, pp 339 - 345, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [B+09] BIELIAVSKY Pierre, DETOURNAY Stéphane & SPINDEL Philippe, *The deformation quantizations of the hyperbolic plane*, Communications in mathematical physics, volume 289, issue 2, pp 529 - 559, Springer-Verlag, 2009.
- [B+12] BIELIAVSKY Pierre, DE GOURSAC Axel & TUYNMAN Gijs, *Deformation quantization for Heisenberg supergroup*, Journal of Functional Analysis, volume 263, issue 3, pp 549 - 603, Elsevier, 2012.
- [B+14] BIELIAVSKY Pierre, GAYRAL Victor, DE GOURSAC Axel & SPINLER Florian, *Harmonic analysis on homogeneous complex bounded domains and non-*

- commutative geometry*, to appear in Current Developments and Retrospectives in Lie Theory : Geometric and Analytical Methods, arXiv version 1311.1871, 2014.
- [BB03] BIELIAVSKY Pierre & BONNEAU Philippe, *On the geometry of the characteristic class of star product on a symplectic manifold*, Reviews in Mathematical Physics, volume 15, issue 2, pp 199 - 215, 2003.
- [BB12a] BERTRAM Wolfgang & BIELIAVSKY Pierre, *Homotopy of symmetric spaces I : Construction by algebras with two involutions*, to appear, arXiv version 1011.2923, 2012.
- [BB12b] BERTRAM Wolfgang & BIELIAVSKY Pierre, *Homotopy of symmetric spaces II : Structure variety and classification*, to appear, arXiv version 1011.3161, 2012.
- [Be22] BERGMAN Stefan, *Über die entwicklung der harmonischen funktionen der ebene und des raumes nach orthogonalfunktionen*, Mathematische Annalen, volume 86, issue 3 - 4, pp 238 - 271, Springer-Verlag, 1922.
- [Be47] BERGMAN Stefan, *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule CVI, Gauthier-Villars, 1947.
- [Be48] BERGMAN Stefan, *Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule CVIII, Gauthier-Villars, 1948.
- [Be95] BERTELSON Mélanie, *Paramétrisation des classes d'équivalence de star-produit*, master thesis, Université libre de Bruxelles, 1995.
- [Be00] BERTRAM Wolfgang, *The geometry of Jordan and Lie structures*, Lecture Notes in Mathematics, volume 1754, Springer-Verlag, 2000, ISBN 3-540-41426-6.
- [BG14] BIELIAVSKY Pierre & GAYRAL Victor, *Deformation quantization for actions of Kählerian Lie groups*, to appear in Memoirs of the American Mathematical Society, private version, 2014.
- [Bi95] BIELIAVSKY Pierre, *Espaces symétriques symplectiques*, PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 1995.
- [Bi02] BIELIAVSKY Pierre, *Strict quantization of solvable symmetric spaces*, Journal of Symplectic Geometry, volume 1, number 2, pp 269 - 320, International Press of Boston, 2002.
- [Bi08] BIELIAVSKY Pierre, *Non-formal deformation quantizations of solvable Ricci-type symplectic symmetric spaces*, Journal of Physics : Conference Series, volume 103, number 1, IOP Publishing Ltd, 2008, DOI 10.1088/1742-6596/103/1/012001.

- [BM01] BIELIAVSKY Pierre & MASSAR Marc, *Oscillatory integral formulae for left-invariant star-products on a class of Lie groups*, Letters in Mathematical Physics, volume 58, issue 2, pp 115 - 128, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Bo05] BORDEMANN Martin, *Quantification par déformation*, African Journal of Mathematical Physics, volume 2, number 2, pp 21 - 61, GNPHE publication, 2005.
- [BW14] BEISER Svea & WALDMANN Stefan, *Fréchet algebraic deformation quantization of the Poincaré disk*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, volume 2014, issue 688, pp 147 - 207, De Gruyter, 2014.
- [C+82] CLERC Jean-Louis, EYMARD Pierre, FARAUT Jacques, RAÏS Mustapha & TAKAHASHI Reiji, *Analyse harmonique*, Les cours du C.I.M.P.A, Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées, 1982.
- [Ca14] CARTAN Élie, *Les groupes réels simples, finis et continus*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 3, volume 31, pp 263 - 355, Gauthier-Villars, 1914.
- [Ca26] CARTAN Élie, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann I*, Bulletin de la Société Mathématique de France, volume 54, pp 214 - 264, Société Mathématique de France, 1926.
- [Ca27] CARTAN Élie, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann II*, Bulletin de la Société Mathématique de France, volume 55, pp 114 - 134, Société Mathématique de France, 1927.
- [Ca35] CARTAN Élie, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, volume 11, issue 1, pp 116 - 162, Springer-Verlag, 1935.
- [Cl07] CLAESSENS Laurent, *Locally anti de Sitter spaces and deformation quantization*, PhD thesis, Université catholique de Louvain, 2007.
- [CP80] CAHEN Michel & PARKER Monique, *Pseudo-riemannian symmetric spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, volume 24, number 229, American Mathematical Society, 1980, ISBN 0-8218-2229-2.
- [CW99] CANNAS DA SILVA Ana & WEINSTEIN Alan, *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, volume 10, American Mathematical Society, 1999, ISBN 978-0-8218-0952-5.
- [d+14] DE GOURSAC Axel, GARAY Mauricio & VAN STRATEN Duco, *Resurgent deformation quantisation*, Annals of Physics, volume 342, pp 83 - 102, Elsevier, 2014.
- [De95] DELIGNE Pierre, *Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique : comparaison entre Fedosov et De Wilde, Lecomte*, Selecta Mathematica, volume 1, issue 4, pp 667 - 697, Birkhäuser-Verlag, 1995.

- [De06] DETOURNAY Stéphane, *Deformations of anti-de Sitter black holes*, PhD thesis, Université de Mons-Hainaut, 2006.
- [dG10] DE GOSSON Maurice A., *Symplectic methods in harmonic analysis and in mathematical physics*, Pseudo-Differential Operators : Theory and Applications, volume 7, Birkhäuser, Springer, 2010, ISBN 978-3-7643-9991-7.
- [dG14] DE GOURSAC Axel, *Fréchet quantum supergroups*, to appear in Pacific Journal of Mathematics, arXiv version 1105.2420, 2014.
- [Di64] DIXMIER Jacques, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Cahiers Scientifiques, fascicule XXIX, Gauthier-Villars & Cie, 1964.
- [DK10] DUISTERMAAT J. J. & KOLK J. A. C., *Distributions*, Cornerstones, Birkhäuser, Springer, 2010, ISBN 978-0-8176-4672-1.
- [DL83] DE WILDE Marc & LECOMTE Pierre B. A., *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Letters in Mathematical Physics, volume 7, issue 6, pp 487 - 496, Kluwer Academic Publishers, 1983.
- [Es14] ESPOSITO Chiara, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, to appear, Springer-Verlag, private version, 2014.
- [Fe94] FEDOSOV Boris V., *A simple geometrical construction of deformation quantization*, Journal of Differential Geometry, volume 40, number 2, pp 213 - 238, International Press of Boston, Inc., 1994.
- [G+67] GINDIKIN S. G., PYATETSKII-SHAPIRO I. I. & VINBERG E. B., *Homogeneous Kähler manifolds*, Geometry of homogenous bounded domains (C.I.M.E.), pp 3 - 87, Edizioni Cremonese, 1967.
- [Gr46] GROENEWOLD H. J., *On the principles of elementary quantum mechanics*, Physica, volume 12, issue 7, pp 405 - 460, Elsevier, 1946.
- [GR07] GRADSHTEYN I. S. & RYZHIK I. M., *Table of integrals, series, and products*, seventh edition, Elsevier Academic Press publications, 2007, ISBN 978-0-12-373637-6.
- [Gu11] GUTT Simone, *Deformation quantisation of Poisson manifolds*, Geometry & Topology Monographs, volume 17, pp 171 - 220, Mathematical Sciences Publishers, 2011.
- [Ha84] HANSEN F., *Quantum mechanics in phase space*, Reports on Mathematical Physics, volume 19, issue 3, pp 361 - 381, Elsevier, 1984.
- [He01] HELGASON Sigurdur, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, volume 34, American Mathematical Society, 2001, originally published in 1978, ISBN 0-8218-2848-7.
- [HS71] HAYDEN Thomas Lee & SUFFRIDGE Ted Joe, *Biholomorphic maps in Hilbert space have a fixed point*, Pacific Journal of Mathematics, volume 38, issue 2, pp 419 - 422, 1971.

- [Ki04] KIRILLOV Aleksandr Aleksandrovich, *Lectures on the orbit method*, Graduate Studies in Mathematics, volume 64, American Mathematical Society, 2004, ISBN 978-0-8218-3530-2.
- [KN96a] KOBAYASHI Shoshichi & NOMIZU Katsumi, *Foundations of differential geometry I*, Wiley Classics Library, Wiley-Interscience Publication, 1996, originally published in 1963, ISBN 0-471-15733-3.
- [KN96b] KOBAYASHI Shoshichi & NOMIZU Katsumi, *Foundations of differential geometry II*, Wiley Classics Library, Wiley-Interscience Publication, 1996, originally published in 1969, ISBN 0-471-15732-5.
- [Kn01] KNAPP Anthony William *Representation theory of semisimple Lie groups*, Princeton Landmarks in Mathematics edition, Princeton University Press, 2001, originally published in 1986, ISBN 0-691-09089-0.
- [Kn02] KNAPP Anthony William *Lie groups beyond and introduction*, second edition, Progress in Mathematics, volume 140, Birkhäuser, Springer, 2002, ISBN 0-8176-4259-5.
- [Ko03] KONTSEVITCH Maxim, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Letters in Mathematical Physics, volume 66, issue 3, pp 157 - 216, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [Ko10] KORVERS Stéphane, *Introduction à la théorie des espaces symétriques*, master thesis, Université catholique de Louvain, 2010.
- [Kr10] KRISTENSSON Gerhard, *Second order differential equations*, Springer, 2010, ISBN 978-1-4419-7019-0.
- [Kr13] KRANTZ Steven George, *Geometric analysis of the Bergman kernel and metric*, Graduate Texts in Mathematics, volume 268, Springer-Verlag, 2013, ISBN 978-1-4614-7923-9.
- [Le90] LEBLANC Marie-Eve, *Star-produits et fibrés en algèbres de Weyl*, master thesis, Université de Liège, 1990.
- [Lo69a] LOOS Ottmar, *Symmetric spaces I : General theory*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [Lo69b] LOOS Ottmar, *Symmetric spaces II : Compact Spaces and classification*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [Ma97] MAWHIN Jean, *Analyse : fondements, techniques, évolution*, 2e édition, De Boeck & Larcier, 1997, ISBN 2-8041-2489-4.
- [Mo49] MOYAL J. E., *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 45, pp 99 - 124, 1949.
- [NT95] NEST Ryszard & TSYGAN Boris, *Algebraic index theorem for families*, Advances in Mathematics, volume 113, issue 2, pp 151 - 205, Elsevier, 1995.

- [O+91] OMORI Hideki, MAEDA Yoshiaki & YOSHIOKA Akira, *Weyl manifolds and deformation quantization*, Advances in Mathematics, volume 85, issue 2, pp 224-255, Elsevier, 1991.
- [O+00] OMORI Hideki, MAEDA Yoshiaki, MIYAZAKI Naoya & YOSHIOKA Akira, *Anomalous quadratic exponentials in the star-products*, RIMS Kokyuroku, volume 1150, pp 128-132, 2000.
- [O+10] OLVER Frank W. J., LOZIER Daniel W., BOISVERT Ronald F. & CLARK Charles W., *NIST Handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, 2010, ISBN 978-0-521-14063-8.
- [Ol00] OLVER Peter John, *Applications of Lie groups to differential equations*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, volume 107, Springer-Verlag, 2000, originally published in 1993, ISBN 0-387-95000-1.
- [Py59] PYATETSKII-SHAPIRO Ilya Iosifovich, *On a problem proposed by É. Cartan*, Doklady Akademii Nauk SSSR, volume 124, issue 2, pp 272-273, 1959.
- [Py69] PYATETSKII-SHAPIRO Ilya Iosifovich, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Mathematics and its applications, volume 8, Gordon and Breach Science Publishers, 1969, originally published in 1961.
- [Ri89] RIEFFEL Marc Aristide, *Deformation quantization of Heisenberg manifolds*, Communications in Mathematical Physics, volume 122, issue 4, pp 531-562, Springer-Verlag, 1989.
- [Ri93] RIEFFEL Marc Aristide, *Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^d$* , Memoirs of the American Mathematical Society, volume 106, number 506, American Mathematical Society, 1993, ISBN 0-8218-2575-5.
- [Ru08] RUDIN Walter, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2008, originally published in 1980, ISBN 978-3-540-68276-9.
- [Sc12] SCHLICHENMAIER Martin, *Some naturally defined star products for Kähler manifolds*, Travaux mathématiques, volume 20, pp 187-204, Université du Luxembourg, 2012.
- [Sc98] SCHWARTZ Laurent, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Collection Enseignement des Sciences, volume 3, Hermann, ISBN 2-7056-5213-2.
- [Sp14] SPINNLER Florian, *On a lemma due to I. I. Pyatetskii-Shapiro*, to appear in the PhD thesis of the author, private version, 2014.
- [UU84] UNTERBERGER André & UNTERBERGER Julianne, *La série discrète de $SL(2, \mathbb{R})$ et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 4, volume 17, number 1, pp 83-116, Gauthier-Villars, 1984.

- [Vo31] VON NEUMANN J., *Die eindeutigkeit der Schrödingerschen operatoren*, Mathematische Annalen, volume 104, issue 1, pp 570 - 578, Springer-Verlag, 1931.
- [Vo11] VOGLAIRE Yannick, *Quantization of solvable symplectic symmetric spaces*, PhD thesis, Université catholique de Louvain, 2011.
- [Vo13] VOGLAIRE Yannick, *Strongly exponential symmetric spaces*, International Mathematics Research Notices, Oxford University Press, 2013, DOI 10.1093/imrn/rnt149.
- [Wa66] WATSON George Neville, *A treatise on the theory of Bessel functions*, second edition, Cambridge University Press, 1966, originally published in 1944.
- [Wa83] WARNER Frank Wilson, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, volume 94, Springer-Verlag, 1983, originally published in 1971, ISBN 0-387-90894-3.
- [We94a] WEINSTEIN Alan, *Traces and triangles in symmetric symplectic spaces*, Contemporary Mathematics, volume 179, pp 261 - 270, American Mathematical Society, 1994.
- [We94b] WEINSTEIN Alan, *Deformation quantization*, Séminaire Bourbaki, année 46, numéro 789, Editions Masson, 1994.
- [Wi07] WILLEM Michel, *Principes d'analyse fonctionnelle*, Nouvelle bibliothèque mathématique, volume 9, Cassini, 2007, ISBN 978-2-84225-120-8.
- [Xu98] XU Ping, *Fedosov star-products and quantum momentum maps*, Communications in mathematical physics, volume 197, issue 1, pp 167 - 197, Springer-Verlag, 1998.
- [Ze68] ZEMANIAN Armen H., *Generalized integral transformations*, Pure and applied mathematics, volume XVIII, Interscience Publishers, 1968.

Index

- action coadjointe, 91
- action hamiltonienne, 90
- aire symplectique, 108
- algèbre de Lie involutive, 41
- alg. de Lie involutive de transvections, 41
- algèbre de Lie involutive orthogonale, 51
- application équivariante, 59
- application moment, 90
- application moment quantique, 137
- appl. moment quantique relative, 135
- automorphisme d'espace symétrique, 39
- automorphisme d'esp. sym. simpl., 101
- automorphisme de domaine borné, 60
- automorphisme de variété complexe, 47
- automorphisme de variété kählérienne, 47

- boule unité de $\mathbb{C}^n$, 58

- carte de Darboux, 88
- champ de tenseurs complexes, 63
- champ de vecteurs fondamental, 89
- champ de vecteurs hamiltonien, 88
- champ de vecteurs Killing, 197
- connexion de Loos, 44
- contraction de courbure, 107
- coordonnées d'Iwasawa, 83
- crochet de Poisson associé, 89

- décomposition d'Iwasawa, 76
- décomposition de Cartan, 52
- décomposition en sous-esp. de racine, 75
- dérivation d'un star-produit, 130
- dérivation interne d'un star-produit, 130
- dérivée au sens des distributions, 150
- distribution, 149
- distribution tempérée, 149
- domaine borné, 60
- domaine borné homogène, 70

- domaine borné symétrique, 60
- double triangle, 108

- équivalence de star-produits, 118
- équivalence de star-produits invariants, 120
- espace hermitien symétrique, 47
- esp. herm. sym. de type compact, 53
- esp. herm. sym. de type non compact, 53
- esp. herm. sym. irréductible, 53
- espace riemannien symétrique, 51
- espace symétrique, 38
- espace symétrique pointé, 38
- espace symétrique symplectique, 101
- esp. sym. simpl. non métrique, 102

- fonction d'Hermite, 217
- fonction de Schwartz, 123
- forme de Killing, 52
- forme symplectique KKS, 92
- forme symplectique standard, 115
- formule de déformation universelle, 122

- groupe d'Iwasawa, 76
- groupe de Lie kählérien, 85
- groupe des transvections, 42

- homomorphisme d'alg. de Lie invol., 41

- involution de Cartan, 52
- isométrie infinitésimale, 197
- isomorphisme d'alg. de Lie involutives, 41
- isomorphisme d'espaces symétriques, 39
- isomorphisme d'esp. sym. simpl., 101
- isomorphisme de triples sym. simpl., 102
- isomorphisme de variétés complexes, 46

- j -algèbre, 70
- j -algèbre normale, 71
- j -algèbre normale élémentaire, 72

- j -groupe normal, 73
- j -groupe normal élémentaire, 73
- j -idéal, 71
- j -sous-algèbre, 71
- limite $n \rightarrow 1$ d'un opérateur différentiel, 189
- limite $n \rightarrow 1$ d'une fonction, 187
- métrique de Bergman, 63
- moment, 90
- moment quantique, 135
- morphisme d'espaces symétriques, 39
- morphisme d'esp. sym. simpl., 101
- noyau de Bergman, 62
- opérateur différentiel, 113
- orbite coadjointe, 91
- paramètre de déformation, 115
- phase admissible, 154
- phase canonique, 154
- phase de Weinstein, 108
- point milieu, 109
- quantification, 112
- quantification par déformation, 112
- quant. par déf. formelle et non formelle, 121
- quantif. par déformation formelle, 114
- quantif. par déformation non formelle, 121
- quantif. par déformation de Weyl, 123
- quantif. par déformation stricte, 122
- racine restreinte, 74
- racine restreinte positive, 75
- relations de limite classique, 114
- rétract, 203
- série discrète holomorphe, 206
- série formelle, 112
- solution radiale, 175
- sous-espace de racine restreinte, 74
- star-commutateur, 114
- star-produit, 113
- star-produit covariant, 137
- star-produit de Moyal, 116
- star-produit invariant, 119
- structure complexe, 46
- structure hermitienne, 47
- structure kählérienne, 47
- structure presque complexe, 45
- structure symétrique, 38
- symétrie en un point, 38
- symétrie géodésique, 43
- transformation affine, 43
- transformée de Fourier inverse, 146
- transformée de Fourier partielle, 145
- transformée de Laplace, 212
- transformée de Weierstrass, 212
- triangle, 108
- triple symétrique, 40
- triple symétrique riemannien, 51
- triple symétrique symplectique, 102
- variété affine, 43
- variété affine localement symétrique, 43
- variété affine symétrique, 43
- variété complexe, 46
- variété kählérienne, 47