

Modèles de mouvements browniens, processus critiques et matrices aléatoires

Jonathan DELEPINE

Juin 2010

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en
sciences (mathématiques)

Promoteur : Pierre Van MOERBEKE

Faculté des sciences
Ecole doctorale en mathématique
Université catholique de Louvain

Remerciements

Cette thèse est le couronnement d'un travail de longue haleine, commencé il y a plusieurs années. De nombreuses personnes, par leur soutien ou leurs conseils, m'ont aidé à la réaliser, et lui ont permis de voir le jour sous sa forme actuelle. Qu'il s'agisse de professeurs, de collègues assistants, de proches ou même d'étudiants, beaucoup ont contribué, directement ou indirectement, à son aboutissement.

Mes remerciements vont avant tout à mon promoteur, le Professeur Pierre van Moerbeke, ainsi qu'aux Professeurs Mark Adler et Pol Vanhaecke, pour leur collaboration active et fructueuse vis-à-vis de nos travaux de recherche, mais aussi pour leur gentillesse et leur patience à mon égard.

Je remercie également les membres de mon comité d'encadrement, Luc Haine et Jean Bricmont, et plus généralement les membres de mon jury de thèse, pour avoir accepté de consacrer une partie importante de leur temps à la lecture et à l'évaluation de ce rapport.

Je remercie aussi tous les membres de l'IRMP (Institut de Recherche en Mathématique et Physique), à commencer par son Président, le Professeur Yves Felix, pour leur accueil, leur bonne humeur, leur disponibilité et la bienveillance de leurs conseils.

Enfin, c'est avec beaucoup d'émotion que je dédie cette thèse à mon père, Albert Delépine. Bien qu'ayant malheureusement quitté ce monde trop tôt, au mois de janvier 2008, je suis certain qu'il aurait souhaité partager avec moi les moments de joie intense procurés par l'accomplissement de ce travail.

Contents

I	Prologue	5
II	Introduction aux matrices aléatoires	7
1	Les bases	7
2	Fonctions de corrélation et polynômes orthogonaux	14
3	Déformations intégrables et EDP's	21
3.1	La hiérarchie KP	23
3.2	Contraintes de Virasoro	28
3.3	Le réseau de Toda	34
4	Comportement asymptotique	39
III	Modèles de mouvements browniens finis	45
5	Mouvements browniens de Dyson	45
6	Mouvements browniens contraints	48
7	Déformations intégrables et EDP's	53
7.1	La hiérarchie KP à $(p+q)$ composantes	56
7.2	Les contraintes de Virasoro	62
7.3	EDP pour la probabilité de transition	66
7.4	Cas particulier pour un temps	72
8	Noyau de corrélation brownien	74
IV	Processus infinis	75
9	Le processus d'Airy	75
10	Le processus de r-Airy	80

11 Asymptotique du processus de r-Airy dans le passé	91
12 Le processus de r-Airy à plusieurs temps	105
13 Asymptotique du processus de r-Airy à deux temps dans le passé	113
14 Le processus de Pearcey	127
15 Le processus de Pearcey avec cibles intermédiaires	138
V Conclusions	151

Part I

Prologue

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la recherche sur la théorie des matrices aléatoires, une branche de la mécanique statistique qui s'intéresse à la distribution des valeurs propres de matrices aléatoires de grande taille. La première partie de ces notes est d'ailleurs consacrée à une explication succincte des fondements de cette théorie, en se limitant surtout aux aspects qui deviendront utiles dans la suite.

A vrai dire, il existe de nombreux liens entre ce domaine et l'étude de certains systèmes dynamiques, ce qui justifie le choix du point de vue que nous avons adopté dans cette thèse, à savoir de placer au centre le concept de mouvements browniens.

En effet, il y a quelques années, Aptekarev, Bleher et Kuijlaars ont démontré, en utilisant un résultat plus ancien dû à Karlin et McGregor, que la théorie des matrices aléatoires, et plus particulièrement celle de l'ensemble hermitien muni d'une mesure gaussienne déformée par une source externe, permettait d'étudier la diffusion temporelle de n mouvements browniens ne s'intersectant pas, à une dimension, et soumis à des contraintes bien précises en ce qui concerne leurs points de départ et leurs points d'arrivée.

A partir de là, la contribution de ce travail se révèle importante à de multiples niveaux, qui sont brièvement résumés ci-dessous.

Dans cette thèse, nous avons tout d'abord établi que, si ces mouvements partent tous d'une même origine au temps initial, et sont envoyés sur p cibles, alors la probabilité que tous les chemins passent à travers une "fenêtre" constituée d'une réunion finie d'intervalles au temps intermédiaire t , satisfait une EDP non linéaire en t et en les extrémités des intervalles spatiaux. Cette EDP très générale, qui prend la forme d'un déterminant d'ordre $(p + 1)$, s'appuie notamment sur le fait qu'en déformant la probabilité par l'adjonction de variables auxiliaires, celle-ci devient une "*fonction tau*" satisfaisant toute une hiérarchie d'équations intégrables.

Nous avons ensuite, après des changements d'échelle convenables sur l'espace et le temps, étudié les processus critiques de diffusion obtenus en prenant diverses limites au modèle envisagé ci-dessus, où le nombre total n de mouvements browniens tend vers l'infini.

De cette manière, nous avons établi et ensuite analysé l'existence de deux nouvelles classes de processus "universels", qui ont été baptisés, respectivement, le processus de r -Airy (ou Airy avec r termes de dérive) et aussi le processus de Pearcey avec cibles intermédiaires. Il s'agit à chaque fois de processus "déterminantaux", en ce sens que les probabilités de transition peuvent s'écrire sous la forme de déterminants de Fredholm, associés à des noyaux de corrélation qui ont été explicitement calculés.

Si on compare ces modèles à ceux, bien connus maintenant, d'Airy et de Pearcey, ces nouveaux processus émergent dès que l'on suppose que d'autres particules, en nombre fini, sont envoyées sur une ou bien sur plusieurs cibles supplémentaires. Il est alors possible d'étudier l'impact occasionné sur le comportement et les fluctuations des nuages browniens (moyennant, comme d'habitude, certaines transformations appropriées des variables d'espace et de temps).

Finalement, nous avons également effectué une analyse asymptotique sur l'EDP obtenue dans le modèle fini, de façon à en déduire des équations aux dérivées partielles satisfaites *après* le passage à la limite, et ce dans le cas de un ou de plusieurs temps différents. Signalons que cette étape, qui à première vue pourrait paraître anecdotique, compte tenu de la forte complexité des équations, s'avère en réalité cruciale, car elle constitue un outil fondamental qui nous a permis d'extraire des résultats asymptotiques puissants concernant plusieurs probabilités intéressantes, et par là de pouvoir comparer les différents modèles étudiés.

Part II

Introduction aux matrices aléatoires

1 Les bases

En mathématiques, la théorie des matrices aléatoires étudie les propriétés statistiques d'ensembles matriciels sur lesquels on a pris soin de définir, au préalable, une certaine *mesure de probabilité*. En particulier, on s'intéresse à la distribution induite sur les *valeurs propres* de ces matrices. Il s'avère que de nombreux phénomènes intéressants peuvent alors être observés, notamment lorsque la *taille* des matrices devient très grande.

La première étape consiste donc à choisir un espace convenable de matrices. Pour ce faire, des considérations de *symétrie* peuvent nous aider. Par exemple, un choix naturel serait d'exiger que les valeurs propres soient toutes *réelles*. En physique, la mécanique quantique nous apprend en effet que les grandeurs observables¹ sont liées aux valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints, agissant sur un certain espace de Hilbert “des états”. Dans la plupart des cas, il est suffisant de restreindre l'étude à un sous-espace de dimension *finie*. Ainsi, moyennant le choix d'une base, on peut associer l'opérateur à une *matrice hermitienne*. Souvent, le manque d'information sur un système complexe conduit les physiciens à considérer les entrées de telles matrices comme des *variables aléatoires*. C'est d'ailleurs de cette façon que Wigner, Dyson et Mehta [42] ont été amenés à constater que les “matrices aléatoires” permettaient de décrire correctement les spectres d'excitation de noyaux lourds à haute énergie.

Dans la suite donc, et sauf indication contraire, nous allons exclusivement considérer des matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices $n \times n$

¹par exemple la position ou la vitesse d'une particule, ou bien encore l'Hamiltonien, qui dicte l'évolution temporelle d'un système.

hermitiennes, défini par :

$$\mathcal{H}_n := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \bar{M}^t = M\}. \quad (1.1)$$

Notons que la condition (1.1) garantit automatiquement que le spectre est réel. De plus, en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $\mathcal{H}_n$ est de dimension n^2 . En effet, nous pouvons prendre, comme coordonnées indépendantes, les éléments (réels) M_{ii} situés sur la diagonale principale ($1 \leq i \leq n$), ainsi que la partie réelle $\text{Re}(M_{ij})$ et la partie imaginaire $\text{Im}(M_{ij})$ des éléments situés sur la partie triangulaire supérieure de M ($1 \leq i < j \leq n$).

D'un point de vue purement mathématique, on peut également observer que $\mathcal{H}_n$ est l'espace tangent à l'espace symétrique $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$, ce qui se reflète par la décomposition suivante au niveau des algèbres de Lie : $sl(n, \mathbb{C}) = su(n) \oplus \mathcal{H}_n$.

Après quoi, et c'est la seconde étape, nous devons définir une *mesure de probabilité* sur $\mathcal{H}_n$. Ceci sera réalisé en considérant des mesures de la forme :

$$\frac{1}{Z_n} e^{-\text{Tr } V(M)} dM, \quad (1.2)$$

où Z_n est une constante de normalisation, $V(z)$ est une fonction telle que l'intégrale (1.2) évaluée sur tout l'espace converge², et dM représente la *mesure plane de Lebesgue* sur les éléments indépendants de M :

$$dM := \prod_{i=1}^n dM_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d\text{Re}(M_{ij}) d\text{Im}(M_{ij}). \quad (1.3)$$

La mesure de Lebesgue (1.3) a la propriété importante d'être invariante sous n'importe quelle *transformation unitaire* : $M \rightarrow \widetilde{M} = UM\bar{U}^t$, avec $U \in U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^t = A^{-1}\}$.

La façon la plus simple de s'en convaincre est d'écrire $\widetilde{\vec{M}} = V\vec{M}$, où l'on ordonne les entrées indépendantes des matrices M et $\widetilde{M}$ dans des vecteurs colonnes, en plaçant les éléments diagonaux en première position. On trouve alors, en utilisant le caractère hermitien de M :

$$\text{Tr } \widetilde{M}^2 = \text{Tr } M^2 = \sum_{i=1}^n M_{ii}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2[(\text{Re} M_{ij})^2 + (\text{Im} M_{ij})^2], \quad (1.4)$$

²par exemple, $V(z)$ pourrait être un polynôme de degré pair et ≥ 2 .

d'où il s'ensuit que la matrice V est orthonormale par rapport au produit scalaire $\langle \vec{u} | D \vec{v} \rangle$, avec $D = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{2, \dots, 2}_{n(n-1)})$. Dès lors, nous avons :

$$V^t D V = D, \text{ et par conséquent : } |\det V| \equiv \left| \det \left(\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial M} \right) \right| = 1.$$

Si, dans la mesure (1.2), la fonction $V(z)$ vérifie : $\text{Tr } V(M) = \text{Tr } V(UM\bar{U}^t)$ pour tout $U \in U(n)$, on dira que l'on a affaire à un *ensemble unitaire*. En raison de la propriété cyclique de la trace, ce sera en particulier le cas dès que $V(z)$ est un polynôme. Remarquons bien que cette terminologie fait seulement référence à l'invariance de la *mesure* (1.2) sous transformation unitaire, et *non pas* aux matrices qui, elles, sont hermitiennes !

L'archétype le plus connu (et le plus étudié dans la littérature) d'ensemble unitaire hermitien, s'obtient en prenant $V(M) = M^2/2$. Ce choix correspond à l'*Ensemble Gaussien Unitaire*, noté en abrégé *GUE*, pour "*Gaussian Unitary Ensemble*". Dans l'ensemble GUE, la mesure (1.2) se factorise en un produit de mesures gaussiennes, comme on peut le voir directement à partir de (1.4) :

$$e^{-\frac{1}{2}\text{Tr } M^2} dM = \prod_{i=1}^n e^{-M_{ii}^2/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{-[(\text{Re } M_{ij})^2 + (\text{Im } M_{ij})^2]} dM. \quad (1.5)$$

Ainsi, dans l'ensemble GUE, les entrées indépendantes sont distribuées comme des variables aléatoires gaussiennes *non corrélées*. Elles ont toutes pour moyenne zéro, mais la variance des éléments diagonaux est deux fois plus grande que la variance des éléments situés en dehors de la diagonale.

Un fait sans doute plus surprenant concerne une *réciprocité* de ce résultat. En effet, si nous imposons à la mesure (1.2) de rester invariante sous transformation unitaire, et si, *en même temps*, nous exigeons l'indépendance des variables aléatoires M_{ii} , $\text{Re}(M_{ij})$ et $\text{Im}(M_{ij})$ ($1 \leq i < j \leq n$), alors il est possible de montrer que le "potentiel" $V(z)$ *doit* nécessairement être un polynôme *quadratique* (voir Mehta [30]).

Etant donné un ensemble unitaire général, ainsi qu'un ensemble de Borel $E \subseteq \mathbb{R}$, soit $P_n(E)$ la probabilité qu'une matrice choisie au hasard ait *son spectre* entièrement contenu dans E .

Le résultat suivant, qui est essentiel pour la suite, permet de passer d'une intégration sur un espace de *matrices*, à une intégration portant uniquement sur les *valeurs propres* de ces matrices :

Proposition 1.1 (*Formule d'intégration de Weyl*)

$$P_n(E) := \frac{\int_{\mathcal{H}_n(E)} e^{-\text{Tr} V(M)} dM}{\int_{\mathcal{H}_n} e^{-\text{Tr} V(M)} dM} = \frac{\int_{E^n} |\Delta_n(\lambda)|^2 \prod_{k=1}^n e^{-V(\lambda_k)} d\lambda_k}{\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_n(\lambda)|^2 \prod_{k=1}^n e^{-V(\lambda_k)} d\lambda_k}, \quad (1.6)$$

où $\mathcal{H}_n(E)$ représente le sous-ensemble de $\mathcal{H}_n$ dont le spectre est entièrement contenu dans E , et où

$$\Delta_n^2(\lambda) \equiv \Delta_n^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = [\det(\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}]^2 \quad (1.7)$$

est le carré d'un déterminant de Vandermonde à n variables.

Idées de la preuve : Une manière simple de comprendre d'où provient (1.6) se fonde sur le fait que chaque $M \in \mathcal{H}_n$ peut être diagonalisée au moyen d'une matrice unitaire : $M = e^A \lambda e^{-A}$, où $U := e^A \in SU(n)$, $A \in su(n)$ et $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Puisque A est anti-hermitienne et de trace nulle, on peut la développer dans la base naturelle³ :

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [a_{ij} (e_{ij} - e_{ji}) + i b_{ij} (e_{ij} + e_{ji})] \quad (1.8)$$

avec $\sum_{j=1}^n b_{jj} = 0$ et $a_{jj} = 0$ ($\forall j$). On calcule aisément le commutateur :

$$[A, \lambda] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) [a_{ij} (e_{ij} + e_{ji}) + i b_{ij} (e_{ij} - e_{ji})]. \quad (1.9)$$

A présent, *d'une part*, à partir du changement de variables (passage en "coordonnées polaires") $\varphi : M \longrightarrow (\lambda, U)$, on tire :

$$dM = |\det(\text{Jac } \varphi)| d\lambda_1 \dots d\lambda_n dU. \quad (1.10)$$

D'autre part, en utilisant (1.9) et la définition (1.3) de la mesure plane de Lebesgue, nous avons, à des termes d'ordre A^2 près :

$$\begin{aligned} dM &= d(e^A \lambda e^{-A}) = d(\lambda + [A, \lambda] + O(A^2)) \\ &= \prod_{i=1}^n d\lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} d((\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}) d((\lambda_i - \lambda_j) b_{ij}) \\ &= \prod_{i=1}^n d\lambda_i \Delta_n^2(\lambda) \prod_{1 \leq i < j \leq n} da_{ij} db_{ij}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

³ici, e_{ij} est la matrice carrée $n \times n$ dont toutes les entrées sont nulles, excepté la (i, j) -ème entrée qui vaut 1.

Par conséquent, on peut identifier le déterminant jacobien de φ avec $\Delta_n^2(\lambda)$. De plus, en raison de l'invariance unitaire de la mesure (1.2), dU s'intègre complètement, conduisant au membre de droite de (1.6). ■

Remarques :

1. L'argument ci-dessus nous montre comment $\Delta_n^2(\lambda)$ apparaît, de façon très naturelle, dans le contexte des matrices aléatoires. Cependant, la preuve esquissée ici n'est pas entièrement rigoureuse. Par exemple, même si nous supposons que les valeurs propres de M sont distinctes⁴ et ordonnées ($\lambda_1 < \dots < \lambda_n$), la matrice U utilisée pour la diagonalisation de M *n'est pas unique* : on peut toujours multiplier la j -ème colonne de U par une "phase" arbitraire $e^{i\theta_j}$, $\theta_j \in [0, 2\pi[$, $1 \leq j \leq n$. Il serait donc plus correct d'associer à M le changement de variables $\tilde{\varphi} : M \rightarrow (\{\lambda_1 < \dots < \lambda_n\}, U \bmod (S^1)^n)$. Le lecteur intéressé pourra trouver une preuve plus détaillée de la formule (1.6) dans l'ouvrage de Deift [18].
2. La présence d'un *déterminant de Vandermonde* $|\Delta_n(\lambda)|^\beta$ est quelque chose de fréquent et caractéristique en théorie des matrices aléatoires. Elle reflète une *répulsion* typique entre les valeurs propres voisines. En revanche, la valeur précise de l'exposant β dépend de l'ensemble considéré : ici, nous avons établi que $\beta = 2$ pour des matrices hermitiennes.

Nous allons maintenant énoncer une version un peu plus générale de la formule d'intégration de Weyl, valable pour n'importe quelle *fonction de classe* $f : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$. Par *fonction de classe*, nous voulons dire que f est telle que $f(M) = f(UM\bar{U}^t)$ pour tout $M \in \mathcal{H}_n$ et tout $U \in U(n)$; en d'autres termes, f dépend seulement (symétriquement) des valeurs propres de M .

Proposition 1.2 *Si $f : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe intégrable, et si $E \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble de Borel, alors [30] :*

$$\int_{\mathcal{H}_n(E)} f(M) dM = \left(\frac{\pi^{n(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^n j!} \right) \int_{E^n} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Delta_n^2(\lambda) \prod_{k=1}^n d\lambda_k. \quad (1.12)$$

■

⁴il est à noter que le sous-ensemble de $\mathcal{H}_n$ constitué des matrices hermitiennes ayant un *spectre simple*, est ouvert et dense dans $\mathcal{H}_n$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) [18].

Notons que la Proposition 1.1 induit une *densité de probabilité jointe* $\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sur les valeurs propres de M , qui est donnée par :

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z'_n} \Delta_n^2(\lambda) \prod_{k=1}^n e^{-V(\lambda_k)}. \quad (1.13)$$

Le point important est que l'on peut exprimer (1.13) sous la forme d'un *déterminant pur*, en faisant intervenir les *polynômes orthonormaux* par rapport à la fonction de poids $w(x) := e^{-V(x)}$.

Dans la suite, nous désignerons par $p_n(x) = k_n x^n + \dots$ ($k_n > 0$) ces polynômes, qui vérifient les relations d'orthogonalité :

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) e^{-V(x)} dx = \delta_{nm}, \quad (1.14)$$

tandis que $\tilde{p}_n(x) := \frac{1}{k_n} p_n(x)$ correspondra aux polynômes orthogonaux *moniques* associés.

Rappelons que le déterminant de Vandermonde peut également s'écrire $|\Delta_n(x)| = |\det(x_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}|$. Dès lors, par des manipulations élémentaires sur les rangées de la matrice, nous pouvons remplacer $|\Delta_n(x)| \prod_{k=1}^n \sqrt{e^{-V(x_k)}}$ par $(\prod_{i=0}^{n-1} k_i^{-1}) \det(p_{i-1}(x_j) \sqrt{e^{-V(x_j)}})_{1 \leq i, j \leq n}$.

La constante Z'_n (dénominateur de (1.13)) peut être, quant à elle, facilement évaluée en intégrant sur tout l'espace :

$$\begin{aligned} Z'_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_n^2(x) \prod_{j=1}^n e^{-V(x_j)} dx_j \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} k_i^{-2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \left[\det(p_{i-1}(x_j) \sqrt{e^{-V(x_j)}})_{1 \leq i, j \leq n} \right]^2 \prod_{j=1}^n dx_j \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} k_i^{-2} \right) \sum_{\sigma, \sigma' \in S_n} (-1)^{\sigma + \sigma'} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} p_{\sigma(j)-1}(x_j) p_{\sigma'(j)-1}(x_j) e^{-V(x_j)} dx_j \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} k_i^{-2} \right) n! \end{aligned}$$

où l'on a utilisé, dans la dernière ligne, l'orthonormalité des p_n 's.

Ceci est à comparer avec le numérateur de (1.13), qui s'écrit :

$$\Delta_n^2(x) \prod_{j=1}^n e^{-V(x_j)} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} k_i^{-2} \right) \det \left(\sum_{j=1}^n p_{j-1}(x_k) p_{j-1}(x_l) \sqrt{e^{-V(x_k)}} \sqrt{e^{-V(x_l)}} \right)_{1 \leq k, l \leq n}.$$

Ainsi donc, nous venons de démontrer le résultat suivant :

Proposition 1.3 *La densité de probabilité jointe (1.13) pour les valeurs propres de matrices hermitiennes, choisies à partir d'ensembles unitaires, peut encore s'exprimer sous la forme du déterminant :*

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{n!} \det (K_n(\lambda_k, \lambda_l))_{1 \leq k, l \leq n} , \quad (1.15)$$

qui fait intervenir la fonction de deux variables définie par :

$$K_n(x, y) := \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{e^{-V(x)}} \sqrt{e^{-V(y)}} p_j(x) p_j(y) . \quad (1.16)$$

■

La Proposition 1.3 entraîne que les probabilités jointes sur les valeurs propres sont *entièrement* fixées par les déterminants successifs de la fonction $K_n(x, y)$. Il pourra s'agir de déterminants ordinaires, ou bien de déterminants *de Fredholm*, comme nous le verrons dans la section suivante. La fonction $K_n(x, y)$ porte le nom de “*noyau de corrélation*”.

Les deux propriétés suivantes sont une conséquence immédiate de la définition (1.16) et des conditions d'orthonormalité (1.14). L'identité (1.18) est aussi appelée (en anglais) la “*reproducing kernel property*”.

Proposition 1.4 *Le noyau de corrélation (1.16) vérifie :*

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x, x) dx = n . \quad (1.17)$$

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x, y) K_n(y, z) dy = K_n(x, z) . \quad (1.18)$$

■

2 Fonctions de corrélation et polynômes orthogonaux

La densité de probabilité totalement symétrique (1.15) contient toute l'information statistique en rapport avec la distribution spectrale de l'ensemble aléatoire unitaire (1.2). Néanmoins, pour des raisons pratiques, et principalement lorsque la taille des matrices devient grande, il est souvent préférable d'*intégrer* certaines variables superflues. C'est pourquoi il est commode d'introduire également la *fonction de corrélation à m points* ($1 \leq m \leq n$) :

$$R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \frac{n!}{(n-m)!} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_{m+1} \dots d\lambda_n. \quad (2.1)$$

Ces fonctions ne constituent *pas*, à proprement parler, des distributions de probabilité (elles ne sont d'ailleurs pas normalisées). Mais le facteur combinatoire $\frac{n!}{(n-m)!} \equiv A_n^m$ est précisément choisi afin de permettre l'interprétation suivante :

$$\begin{aligned} \int_E R_1(\lambda) d\lambda &= \left[\text{nombre moyen de val. propres dans } E \subseteq \mathbb{R} \right], \\ \int_{E^2} R_2(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 &= \left[\text{nombre moyen de paires de val. propres dans } E \subseteq \mathbb{R} \right], \end{aligned}$$

et ainsi de suite (voir [18], [30]).

En fait, *toutes* les fonctions de corrélation (et pas seulement la densité de probabilité jointe), peuvent s'écrire sous la forme d'un déterminant. C'est le contenu de la Proposition suivante :

Proposition 2.1 “*Determinantal point process*” :

$$R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \det (K_n(\lambda_k, \lambda_l))_{1 \leq k, l \leq m}. \quad (2.2)$$

Preuve : L'équation (1.15) nous apprend que le résultat est vrai lorsque $m = n$. On procède alors *par récurrence*, en supposant la Proposition vraie pour $(m+1)$. Remarquons que nous avons :

$$R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{n-m} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{R_{m+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})}_{\det(K_n(\lambda_k, \lambda_l))_{1 \leq k, l \leq m+1}} d\lambda_{m+1}.$$

Prenons une partition de la matrice $[K_n(\lambda_k, \lambda_l)]_{1 \leq k, l \leq m+1}$, telle que :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}B \\ 0 & (D - CA^{-1}B) \end{pmatrix} \text{ avec } A = [K_n(\lambda_k, \lambda_l)]_{1 \leq k, l \leq m}.$$

De cette façon : $\det (K_n(\lambda_k, \lambda_l))_{1 \leq k, l \leq m+1} = (\det A) (D - CA^{-1}B)$.

Par conséquent, nous obtenons :

$$R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{n-m} \det (K_n(\lambda_k, \lambda_l))_{1 \leq k, l \leq m} \int_{\mathbb{R}} (D - CA^{-1}B) d\lambda_{m+1}.$$

La Proposition 2.1 découle alors directement du fait que :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (D - CA^{-1}B) d\lambda_{m+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(K_n(\lambda_{m+1}, \lambda_{m+1}) - \sum_{k, l=1}^m K_n(\lambda_{m+1}, \lambda_k) (A^{-1})_{kl} K_n(\lambda_l, \lambda_{m+1}) \right) d\lambda_{m+1} \\ &= n - \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \underbrace{K_n(\lambda_l, \lambda_k)}_{A_{lk}} (A^{-1})_{kl} = (n-m), \end{aligned}$$

où, pour dériver la seconde égalité, nous avons utilisé les relations (1.17) et (1.18). La démonstration dépend seulement de ces égalités, et de la forme déterminantale (1.15) de $\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. ■

En particulier, $\frac{1}{n} R_1(x) = \frac{1}{n} K_n(x, x)$ représente la densité de valeurs propres à *une dimension*. Considérons à présent la probabilité $P_n(E^c)$ pour qu'une matrice choisie au hasard ne possède *aucune* valeur propre dans $E \subseteq \mathbb{R}$ (*probabilité de "trou"*).

Proposition 2.2 *La probabilité de trou $P_n(E^c)$ est donnée par :*

$$P_n(E^c) = \det(I - K_E), \quad (2.3)$$

où $\det(I - K_E)$ désigne le déterminant de Fredholm associé à l'opérateur K_E , de noyau (1.16) :

$$K_E : L^2(E) \rightarrow L^2(E), \quad K_E f(x) \rightarrow \int_E K_n(x, y) f(y) dy, \quad x \in E; \quad (2.4)$$

c'est-à-dire :

$$\det(I - K_E) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{E^k} \det(K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \prod_{j=1}^k dx_j . \quad (2.5)$$

Preuve : Si $\chi = \chi_E$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E , nous avons :

$$P_n(E^c) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n (1 - \chi(x_j)) \rho(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n dx_j . \quad (2.6)$$

Soit $\sigma_k(s_1, \dots, s_n) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k s_{i_j}$ la k -ème fonction symétrique élémentaire. A partir de l'identité :

$$\prod_{j=1}^n (1 - \chi(x_j)) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) , \quad (2.7)$$

on déduit que :

$$P_n(E^c) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) \rho(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n dx_j .$$

Il y a exactement $\frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv C_n^k$ termes dans la somme définissant σ_k et, pour chaque terme, l'intégrale ci-dessus donne une contribution identique, en raison de la symétrie de la fonction $\rho(x_1, \dots, x_n)$. Dès lors, en se souvenant de (2.1) et (2.2), il vient :

$$\begin{aligned} P_n(E^c) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x_1) \dots \chi(x_k) \rho(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n dx_j \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!} \int_{E^k} \underbrace{R_k(x_1, \dots, x_k)}_{\det(K_n(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}} \prod_{j=1}^k dx_j . \end{aligned}$$

■

Rappelons que le noyau de corrélation $K_n(x, y)$ donné en (1.16) dépend des *polynômes orthonormaux* par rapport à la fonction de poids $e^{-V(x)}$. Ceux-ci possèdent un certain nombre de propriétés “classiques”. Bien que ces propriétés, bien connues, figurent dans presque tous les ouvrages traitant des polynômes orthogonaux (par exemple [36]), nous pensons qu’il est utile d’en évoquer quelques-unes ci-dessous, accompagnées d’une brève démonstration.

Proposition 2.3 *Quelques propriétés des polynômes orthonormaux sur la droite réelle, par rapport au poids $e^{-V(x)}$:*

1. Relations de récurrence à trois termes :

$$x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_{n+1} p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad (2.8)$$

où il est sous-entendu que $p_{-1}(x) \equiv 0$, et où les coefficients⁵ valent :

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_n(x) p_{n-1}(x) e^{-V(x)} dx > 0, \quad (2.9)$$

$$b_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{n-1}^2(x) e^{-V(x)} dx \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

2. Formule de Christoffel-Darboux :

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_j(x) p_j(y) = a_n \frac{p_n(x) p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x) p_n(y)}{x - y}, \quad (2.11)$$

lorsque $x \neq y$. Quand $x \rightarrow y$, nous obtenons la limite :

$$\sum_{j=0}^{n-1} [p_j(x)]^2 = a_n \left(p'_n(x) p_{n-1}(x) - p'_{n-1}(x) p_n(x) \right). \quad (2.12)$$

Notons que cette formule est particulièrement intéressante pour l’analyse asymptotique du noyau de corrélation (1.16) lorsque $n \rightarrow \infty$, parce qu’on a seulement besoin d’estimer $p_n(x)$ et $p_{n-1}(x)$.

⁵Réciproquement, par le théorème de Favard, toute suite de coefficients $a_j > 0$ et $b_j \in \mathbb{R}$ ($j \geq 1$) détermine une mesure $d\mu(x)$ sur $\mathbb{R}$ dont les polynômes orthonormaux satisfont (2.8). Cette mesure est unique si le support de $d\mu(x)$ est borné.

3. Zéros des polynômes orthogonaux : Les racines de $p_n(x)$ sont toutes réelles et simples, et elles s'entrelacent strictement. Cela signifie que, entre deux racines consécutives de $p_{n+1}(x)$, il existe exactement une racine de $p_n(x)$.
4. Formule déterminantale de Heine : Ecrivons $D_n := \det (c_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n-1}$ en termes des moments :

$$c_n := \left[\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-V(x)} dx \right] \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Alors, nous avons les deux représentations suivantes :

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}} \det \begin{pmatrix} c_0 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_1 & \dots & c_n & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & \dots & c_{2n-2} & x^{n-1} \\ c_n & \dots & c_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$p_n(x) = \frac{1}{n! \sqrt{D_n D_{n+1}}} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_n^2(u) \prod_{k=1}^n (x - u_k) e^{-V(u_k)} du_k. \quad (2.15)$$

Preuve : Dans la suite, nous allons systématiquement utiliser la notation $\langle f|g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-V(x)} dx$ pour désigner le produit scalaire interne entre les fonctions f et g .

Commençons par prouver le point (1). Puisque les polynômes orthogonaux forment une base sur $L^2(\mathbb{R}, e^{-V(x)} dx)$, et puisque $x \tilde{p}_n(x) - \tilde{p}_{n+1}(x)$ est un polynôme⁶ de degré au plus égal à n , il vient :

$$x \tilde{p}_n(x) = \tilde{p}_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^n \underbrace{\frac{\langle \tilde{p}_j | x \tilde{p}_n \rangle}{\|\tilde{p}_j\|^2}}_{\alpha_j} \tilde{p}_j(x). \quad (2.16)$$

Mais $\langle \tilde{p}_j | x \tilde{p}_n \rangle = \langle x \tilde{p}_j | \tilde{p}_n \rangle = 0$ dès que $j < n-1$, et donc tous les coefficients de Fourier α_j sont nuls, excepté α_{n-1} et α_n . Egalement, dans le produit $\langle \tilde{p}_n | q_n \rangle$ (où $q_n(x)$ est un polynôme *monique* de degré n), $q_n(x)$ peut

⁶pour rappel, $\tilde{p}_n(x) = x^n + \dots$ correspondent aux polynômes orthogonaux *moniques*.

être remplacé par n'importe quel autre polynôme *monique* $\tilde{q}_n(x)$ de même degré, car la différence $(q_n(x) - \tilde{q}_n(x))$ est de degré au plus égal à $(n - 1)$.

Ceci assure que $\alpha_{n-1} = \frac{\langle \tilde{p}_n | x \tilde{p}_{n-1} \rangle}{\|\tilde{p}_{n-1}\|^2} = \frac{\|\tilde{p}_n\|^2}{\|\tilde{p}_{n-1}\|^2} > 0$. Par conséquent, en posant $a_n^2 := \alpha_{n-1}$ et $b_{n+1} := \alpha_n$, la relation de récurrence suivante est vérifiée :

$$x \tilde{p}_n(x) = \tilde{p}_{n+1}(x) + b_{n+1} \tilde{p}_n(x) + a_n^2 \tilde{p}_{n-1}(x). \quad (2.17)$$

Pour obtenir (2.8), il suffit de diviser (2.17) par $\|\tilde{p}_n\| = (a_1 a_2 \dots a_n)$, cette dernière identité découlant du fait que $\|\tilde{p}_n\| = a_n \|\tilde{p}_{n-1}\|$.

(2) La *formule de Christoffel-Darboux* découle immédiatement de (2.8) :

$$(x - y) p_j(x) p_j(y) = G_{j+1}(x, y) - G_j(x, y),$$

où $G_j(x, y) = a_j (p_j(x) p_{j-1}(y) - p_j(y) p_{j-1}(x))$. Dès lors, en sommant sur l'indice j de 0 à $(n - 1)$, cela établit le point 2 de la Proposition 2.3.

(3) Pour prouver l'assertion concernant les zéros des polynômes orthogonaux, supposons que $(x_j)_{j=1}^m$ sont les racines réelles distinctes de $p_n(x)$ qui sont de multiplicité *impaire*. Définissons le polynôme $\pi_n(x) = \prod_{j=1}^m (x - x_j)$, qui est de degré $m \leq n$. Par construction, le signe de $\pi_n(x) p_n(x)$ demeure constant sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que : $\int_{\mathbb{R}} \pi_n(x) p_n(x) e^{-V(x)} dx \neq 0$.

Puisque $p_n(x)$ est orthogonal à chaque polynôme de degré $0, 1, \dots, n - 1$, ceci est possible seulement si $m = n$. Donc toutes les n racines de $p_n(x)$ sont *simples* et *réelles*.

Ensuite, on peut noter que la formule de Christoffel-Darboux permet une démonstration brève et immédiate de la *propriété d'entrelacement des racines*. L'égalité (2.12) nous apprend en effet que :

$$\left(p'_n(x) p_{n-1}(x) - p'_{n-1}(x) p_n(x) \right) > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel}. \quad (2.18)$$

Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les racines ordonnées de $p_n(x)$. Par (2.18), nous avons : $p'_n(x_j) p_{n-1}(x_j) > 0$. Comme les zéros de $p_n(x)$ sont simples, $p'_n(x_j) p'_n(x_{j+1})$ est clairement négatif. D'où : $p_{n-1}(x_j) p_{n-1}(x_{j+1}) < 0$. Ceci signifie que $p_{n-1}(x)$ change de signe dans les $(n - 1)$ intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ avec $1 \leq j \leq n - 1$. Mais $p_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$, et

possède donc exactement une racine dans chacun de ces intervalles.

(4) Afin d'établir la forme déterminantale (2.14) de $p_n(x)$, on remarque que, en développant en mineurs selon la dernière colonne, le membre de droite de (2.14) est un polynôme de degré n en x . Quitte à multiplier par x^j et à intégrer, nous pouvons remplacer la dernière colonne par $(c_j, c_{j+1}, \dots, c_{j+n})^T$. Lorsque $j = 0, 1, \dots, n-1$, le déterminant obtenu est celui d'une matrice ayant deux colonnes identiques, donc il s'annule.

Il reste à vérifier que la normalisation est correcte. Si nous avons $\frac{1}{D_n}$ plutôt que $\frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}}$, alors⁷ on reconnaîtrait, dans le membre de gauche, les polynômes orthogonaux *moniques* $\tilde{p}_n(x)$. Mais nous savons également que $\|\tilde{p}_n\|^2 = \langle \tilde{p}_n | x^n \rangle$. Ainsi, en multipliant par x^n et en intégrant, on tire : $\|\tilde{p}_n\|^2 = \left(\frac{D_{n+1}}{D_n}\right)$, ce qui confirme le facteur $\frac{1}{\sqrt{D_n D_{n+1}}}$ dans (2.14).

Enfin, le passage du déterminant (2.14) à la *représentation de Heine* (2.15), qui exprime $p_n(x)$ sous la forme d'une intégrale n -uple, est expliqué dans les calculs ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\sqrt{D_n D_{n+1}} p_n(x) &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} c_0 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & x \\ c_{n-1} & \dots & c_{2n-2} & \vdots \\ c_n & \dots & c_{2n-1} & x^n \end{array} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \det \left(\begin{array}{cccc|c} u_1^0 & u_2^1 & \dots & u_n^{n-1} & 1 \\ u_1^1 & u_2^2 & \dots & u_n^n & x \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^n & \dots & u_n^{2n-2} & x^{n-1} \\ \hline u_1^n & u_2^{n+1} & \dots & u_n^{2n-1} & x^n \end{array} \right) \prod_{k=1}^n \underbrace{e^{-V(u_k)} du_k}_{w(u_k) du_k} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \det \left(\begin{array}{cccc|c} u_1^0 & u_2^0 & \dots & u_n^0 & 1 \\ u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 & x \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \dots & u_n^{n-1} & x^{n-1} \\ \hline u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n & x^n \end{array} \right) u_1^0 u_2^1 \dots u_n^{n-1} \prod_{k=1}^n w(u_k) du_k
\end{aligned}$$

⁷Remarquons qu'il est possible de montrer que la matrice des moments est toujours définie positive, ce qui assure que $D_n > 0$.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \det \left(\begin{array}{cccc|c} u_{\sigma(1)}^0 & u_{\sigma(2)}^0 & \cdots & u_{\sigma(n)}^0 & 1 \\ u_{\sigma(1)}^1 & u_{\sigma(2)}^1 & \cdots & u_{\sigma(n)}^1 & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\sigma(1)}^{n-1} & u_{\sigma(2)}^{n-1} & \cdots & u_{\sigma(n)}^{n-1} & x^{n-1} \\ \hline u_{\sigma(1)}^n & u_{\sigma(2)}^n & \cdots & u_{\sigma(n)}^n & x^n \end{array} \right) u_{\sigma(1)}^0 u_{\sigma(2)}^1 \cdots u_{\sigma(n)}^{n-1} \prod_{k=1}^n w(u_k) du_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \det \left(\begin{array}{cccc|c} u_1^0 & u_2^0 & \cdots & u_n^0 & 1 \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} & x^{n-1} \\ \hline u_1^n & u_2^n & \cdots & u_n^n & x^n \end{array} \right) (-1)^\sigma u_{\sigma(1)}^0 u_{\sigma(2)}^1 \cdots u_{\sigma(n)}^{n-1} \prod_{k=1}^n w(u_k) du_k.
\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on somme sur toutes les permutations $\sigma \in S_n$, avant de diviser par $n!$, la seconde série de facteurs dans l'intégrand ci-dessus donne $\det(u_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Le premier facteur dans l'intégrand est un déterminant. Mais c'est aussi un polynôme de degré n en x , qui s'annule quand $x = u_1, \dots, u_n$ (car cela produit deux colonnes identiques dans la matrice).

Le coefficient de x^n vaut $\det(u_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$. On en conclut que le premier facteur est nécessairement égal à : $\left[\det(u_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{k=1}^n (x - u_k) \right]$. En conséquence, l'expression finale se simplifie en (2.15) comme annoncé :

$$\sqrt{D_n D_{n+1}} p_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_n^2(u) \prod_{k=1}^n (x - u_k) e^{-V(u_k)} du_k.$$

■

3 Déformations intégrables et EDP's

Soit $E := \bigcup_{i=1}^r [b_{2i-1}, b_{2i}]$ une réunion disjointe d'intervalles sur $\mathbb{R}$, et soit M une matrice hermitienne appartenant à l'ensemble aléatoire unitaire (1.2), associé au potentiel $V(z)$. A partir de (1.6), nous voyons que la probabilité que le spectre de M soit contenu dans E , est donné par le rapport :

$$P_n(E) = \left[\frac{\tau_n(E)}{\tau_n(\mathbb{R})} \right], \quad (3.1)$$

dans lequel $\tau_n(E) := \int_{E^n} \Delta_n^2(z) \prod_{k=1}^n e^{-V(z_k)} dz_k$.

Dans ce chapitre, nous allons nous occuper de montrer comment il est possible de trouver des équations aux dérivées partielles (EDP's) satisfaites par $P_n(E)$, vue comme une fonction des “points du bord” b_i .

La stratégie utilisée ici est due à Adler, Shiota et van Moerbeke [5], et a déjà été appliquée avec succès dans de nombreux articles (voir entre autres [6], [7], [8] et [9]). Elle consiste à effectuer une *déformation* du potentiel $V(z)$, en y ajoutant un nombre (infini) de *variables auxiliaires* $(t_i)_{i \geq 1}$:

$$V(z) \longrightarrow V(z) - \sum_{i \geq 1} t_i z^i. \quad (3.2)$$

Cette insertion de nouvelles variables modifie $\tau_n(E)$ comme suit⁸ :

$$\tau_n(E, t) := \frac{1}{n!} \int_{E^n} \Delta_n^2(z) \prod_{k=1}^n e^{-V(z_k) + \sum_{i \geq 1} t_i z_k^i} dz_k. \quad (3.3)$$

Bien entendu, on retrouve le numérateur de la probabilité (3.1) en posant tous les t_i égaux à zéro. Cependant, l'observation cruciale réalisée dans [5] est que (3.3) satisfait à présent un grand nombre d'identités différentielles dans les b_i et les t_i . Ces identités incluent des *contraintes de Virasoro* ainsi que le *réseau de Toda* standard.

De plus, $\tau_n(E, t)$ est aussi une *fonction tau*, en ce sens qu'elle est solution de toute une hiérarchie d'équations intégrables. La première équation de cette hiérarchie correspond en l'occurrence à l'équation non linéaire, d'ordre quatre, de *Kadomtsev-Petviashvili* (KP) :

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^4 + 3 \left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} \right) \right\} \log \tau_n + 6 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log \tau_n \right)^2 = 0. \quad (3.4)$$

Il s'agit d'une généralisation de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV). En effet, si nous posons $q := 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log \tau_n$, alors (3.4) devient :

$$3 \frac{\partial^2 q}{\partial t_2^2} - \frac{\partial}{\partial t_1} \underbrace{\left(4 \frac{\partial q}{\partial t_3} - \frac{\partial^3 q}{\partial t_1^3} - 6 q \frac{\partial q}{\partial t_1} \right)} = 0, \quad (3.5)$$

⁸le facteur $\frac{1}{n!}$ devant $\tau_n(E, t)$ est introduit pour des raisons de commodité ultérieure.

et la parenthèse soulignée s'annule identiquement si et seulement si l'équation KdV est satisfaite.

Le reste du chapitre est consacré à une description plus détaillée de l'interaction existant entre les systèmes intégrables, les EDP's et la théorie des matrices aléatoires.

3.1 La hiérarchie KP

La démonstration du fait que la fonction $\tau_n(E, t)$ donnée en (3.3) satisfait une hiérarchie intégrable, repose principalement sur quelques ingrédients-clés. Ceux-ci sont résumés dans les Propositions ci-après.

Mais tout d'abord, il nous faut introduire deux autres produits internes. Associé à l'ensemble E ainsi qu'au poids “déformé” $w_t(z) := e^{-V(z) + \sum_{i \geq 1} t_i z^i}$, nous posons :

$$\langle f|g \rangle_t := \int_E f(z) g(z) w_t(z) dz. \quad (3.6)$$

On définit également le produit suivant (“*residu pairing*”) entre les fonctions $f = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$ et $g = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j z^{-j-1}$ ($a_i, b_j \in \mathbb{C}$) :

$$\langle f|g \rangle_\infty \equiv \oint_{z=\infty} f(z) g(z) \frac{dz}{2i\pi} := \sum_{i \geq 0} a_i b_i. \quad (3.7)$$

Proposition 3.1 *Considérons $\tau_n(E, t)$ tel que défini en (3.3). Alors :*

1. $\tau_n(E, t)$ peut s'écrire comme le déterminant de la matrice⁹ des moments :

$$\tau_n(E, t) = \det(M_n(E, t)) \quad (3.8)$$

où $M_n(E, t) = (\mu_{ij}(E, t))_{0 \leq i, j \leq n-1} := (\langle z^i | z^j \rangle_t)_{0 \leq i, j \leq n-1}$.

2. La matrice des moments semi-infinie $M_\infty(E, t) := (\mu_{ij}(E, t))_{i, j \geq 0}$ évolue en t selon¹⁰ :

$$\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t_k} = \mu_{i+k, j} \iff \frac{\partial M_\infty}{\partial t_k} = \Lambda^k M_\infty = M_\infty (\Lambda^T)^k. \quad (3.9)$$

⁹notons que la matrice des moments est aussi une matrice de Hankel, c'est-à-dire que l'entrée (i, j) ne dépend que de la somme $(i + j)$.

¹⁰ici, Λ représente une matrice “*shift*”, possédant des zéros partout, sauf au-dessus de la diagonale principale, où nous avons $(\Lambda)_{i, i+1} = 1$ pour tout i .

Preuve : La seconde partie de la Proposition 3.1 est immédiate, sur base d'une simple inspection. La première partie, quant à elle, résulte de la représentation du carré d'un déterminant de Vandermonde comme une somme de déterminants. En effet, en utilisant la formule suivante (dite *de Cauchy-Binet*) :

$$\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \det(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{\sigma \in S_n} \det(a_{i, \sigma(j)} b_{j, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (3.10)$$

on trouve (rappelons que $w_t(z) := \exp(-V(z) + \sum_{i \geq 1} t_i z^i)$) :

$$\begin{aligned} \tau_n(E, t) &= \frac{1}{n!} \int_{E^n} \Delta_n^2(z) \prod_{k=1}^n w_t(z_k) dz_k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \int_{E^n} \det(z_{\sigma(j)}^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{j=1}^n w_t(z_{\sigma(j)}) dz_{\sigma(j)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \det \left(\int_E z_{\sigma(j)}^{i+j-2} w_t(z_{\sigma(j)}) dz_{\sigma(j)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \det M_n(E, t). \end{aligned}$$

■

Nous voyons dans la démonstration qu'il est essentiel que l'intégrand de τ_n contienne $|\Delta_n(z)|^\beta$ avec $\beta = 2$. Si nous avions $\beta = 1$ ou $\beta = 4$, comme cela se produit lorsque l'on a affaire à des matrices *symétriques* ou *auto-duales* au lieu de matrices *hermitiennes*, la situation changerait radicalement. L'analogue de la *fonction tau* serait alors (pour n pair) un *Pfaffien*, c'est-à-dire la racine carrée du déterminant d'une matrice paire *antisymétrique*. Dans un tel cas, il est possible de montrer que $\tau_{2n}(E, t)$ satisfait encore un système d'équations intégrables : la *hiérarchie de Pfaff-KP*, en même temps que le *réseau de Pfaff-KP* (voir [31]).

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Posons $[\alpha] := \left(\alpha, \frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^3}{3}, \frac{\alpha^4}{4}, \dots \right) \in \mathbb{C}^\infty$. On observe que :

$$\mu_{ij}(t \pm [z^{-1}]) = \int_E u^{i+j} e^{\sum_{i \geq 1} (t_i \pm \frac{z^{-i}}{i}) u^i} w(u) du = \int_E u^{i+j} \left(1 - \frac{u}{z}\right)^\mp w(u) e^{\sum_{i \geq 1} t_i u^i} du.$$

Ceci entraîne les identités :

$$\mu_{ij}(t - [z^{-1}]) = \mu_{ij}(t) - \frac{1}{z} \mu_{i, j+1}(t). \quad (3.11)$$

$$\mu_{ij}(t + [z^{-1}]) = \mu_{ij}(t) + \frac{1}{z} \mu_{i, j+1}(t) + \frac{1}{z^2} \mu_{i, j+2}(t) + \dots \quad (3.12)$$

Désignons par $p_n(t, z) = \sum_{m \geq 0} S_{nm}(t) z^m$ les polynômes orthonormaux par rapport au poids “déformé” $w_t(z)$, ce qui induit une matrice semi-infinie $S(t) := (S_{nm}(t))_{n,m \geq 0}$, qui est triangulaire inférieure et inversible. Nous avons donc $p_n(t, z) = (S\chi(z))_n$, où $\chi(z)$ est le vecteur colonne (infini) $\chi(z) := (1, z, z^2, z^3, \dots)^T$.

Nous aurons également besoin des fonctions $q_n(t, z)$, qui sont reliées à la transformée de Cauchy de $p_n(t, z)$:

$$q_n(t, z) := z \int_E \frac{p_n(t, u)}{z - u} w_t(u) du. \quad (3.13)$$

Proposition 3.2 M_∞ et S vérifient la relation suivante :

$$S(t) M_\infty(t) (S(t))^T = I. \quad (3.14)$$

De plus, les fonctions $p_n(t, z)$ et $q_n(t, z)$ admettent les représentations :

$$p_n(t, z) = \frac{z^n}{\sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)}} \tau_n(t - [z^{-1}]), \quad (3.15)$$

$$q_n(t, z) = \frac{z^{-n}}{\sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)}} \tau_{n+1}(t + [z^{-1}]). \quad (3.16)$$

Preuve : L’orthonormalité des $p_n(t, z)$ est responsable de (3.14). En effet, en utilisant le fait que $p_n(t, z) = (S(t)\chi(z))_n$, on obtient :

$$I = (\langle p_n(t, z) | p_m(t, z) \rangle_t)_{n,m \geq 0} = \int_E \underbrace{(S\chi(z)) (S\chi(z))^T}_{S\chi(z)\chi(z)^T S^T} w_t(z) dz = S M_\infty S^T.$$

Pour dériver (3.15), nous partons de la représentation de Heine (2.15) des polynômes orthonormaux comme une intégrale n -uple. En combinant (2.15) avec (3.8), en écrivant $\Delta_n^2(z)$ comme une somme de déterminants selon la formule (3.10), et en tenant compte de l’identité (3.11) dans la cinquième égalité ci-dessous, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\tau_n \tau_{n+1}} p_n(t, z) &= \frac{1}{n!} \int_{E^n} \Delta_n^2(u) \prod_{k=1}^n (z - u_k) w_t(u_k) du_k \\
&= \frac{z^n}{n!} \int_{E^n} \sum_{\sigma \in S_n} \det \left(u_{\sigma(j)}^{i+j-2} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{u_{\sigma(j)}}{z} \right) w_t(u_{\sigma(j)}) du_{\sigma(j)} \\
&= \frac{z^n}{n!} \int_{E^n} \sum_{\sigma \in S_n} \det \left(u_{\sigma(j)}^{i+j-2} - \frac{1}{z} u_{\sigma(j)}^{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{j=1}^n w_t(u_{\sigma(j)}) du_{\sigma(j)} \\
&= z^n \det \left(\mu_{ij} - \frac{1}{z} \mu_{i, j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n-1} \\
&= z^n \det \left(\mu_{ij} (t - [z^{-1}]) \right)_{0 \leq i, j \leq n-1} = z^n \tau_n(t - [z^{-1}]).
\end{aligned}$$

L'équation (3.16) s'obtient par un calcul semblable, utilisant l'égalité (3.12). Pour davantage de détails, le lecteur intéressé est renvoyé à [31]. ■

Proposition 3.3 (*Identité bilinéaire*)

Pour tous $t, t' \in \mathbb{C}$ et $n \geq m + 1$, la “fonction tau” $\tau_n(E, t)$ donnée en (3.3) est solution de l'identité :

$$\oint_{z=\infty} \tau_n(t - [z^{-1}]) \tau_{m+1}(t' + [z^{-1}]) e^{\sum_{i \geq 1} (t_i - t'_i) z^i} z^{n-m-1} dz = 0. \quad (3.17)$$

Preuve : La Proposition 3.2 nous permet d'exprimer $\tau_n(t \pm [z^{-1}])$ en termes de $p_n(t, z)$ et $q_n(t, z)$. De plus, un lemme préliminaire, facile à vérifier, établit que :

$$\int_E f(z) g(z) dz = \left\langle f(z) \left| \int_E \frac{g(u)}{z - u} du \right\rangle_{\infty}, \quad (3.18)$$

à partir de quoi on déduit que le membre de gauche de (3.17) est égal (modulo une certaine fonction $c(t, t')$ dépendant seulement de t et t') à :

$$\begin{aligned}
&c(t, t') \oint_{z=\infty} z^{-n} p_n(t, z) e^{\sum_{i \geq 1} (t_i - t'_i) z^i} z^m q_m(t', z) z^{n-m-1} dz \\
&= c(t, t') \oint_{z=\infty} p_n(t, z) e^{\sum_{i \geq 1} (t_i - t'_i) z^i} \int_E \frac{p_m(t', u)}{z - u} e^{\sum_{i \geq 1} t'_i u^i} w(u) du dz \\
&= 2i\pi c(t, t') \int_E p_n(t, z) e^{\sum_{i \geq 1} (t_i - t'_i) z^i} p_m(t', z) e^{\sum_{i \geq 1} t'_i z^i} w(z) dz \\
&= 2i\pi c(t, t') \int_E p_n(t, z) p_m(t', z) w_t(z) dz = 0, \quad \forall m \leq n - 1.
\end{aligned}$$

■

La hiérarchie KP discrète émerge alors de l'identité bilinéaire ci-dessus. Pour le voir, il suffit d'évaluer (3.17) pour $m = n - 1$, et d'effectuer les "translations" : $t \rightarrow t - y$ et $t' \rightarrow t + y$. Une manière particulièrement élégante de l'exprimer fait usage du *symbole de Hirota*. Si $p(t_1, t_2, \dots)$ est un polynôme, et si f, g sont deux fonctions différentiables, le *symbole de Hirota* s'écrit :

$$p(\partial_t) f \circ g := p\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots\right) f(t+y) g(t-y) \Big|_{y=0}. \quad (3.19)$$

Le théorème de Taylor implique alors :

$$\tau_n(t+y+[z^{-1}]) \tau_n(t-y-[z^{-1}]) = e^{\sum_{k \geq 1} (y_k + \frac{z^{-k}}{k}) \frac{\partial}{\partial u_k}} \tau_n(t+u) \tau_n(t-u) \Big|_{u=0}.$$

Les polynômes de Schur élémentaires sont également requis. Ceux-ci sont définis via la fonction génératrice de l'exponentielle¹¹ :

$$e^{\sum_{i \geq 1} t_i z^i} := \sum_{k \geq 0} \mathfrak{s}_k(t) z^k. \quad (3.20)$$

Ainsi : $\mathfrak{s}_0(t) = 1$; $\mathfrak{s}_1(t) = t_1$; $\mathfrak{s}_2(t) = t_2 + \frac{t_1^2}{2}$; $\mathfrak{s}_3(t) = t_3 + t_1 t_2 + \frac{t_1^3}{6}$; et en général : $\mathfrak{s}_n(t) = t_n + \{\text{polynôme non linéaire en } t_1, \dots, t_{n-1}\}$.

Le calcul explicite de l'identité bilinéaire (3.17) continue ensuite comme

¹¹avec la convention que $\mathfrak{s}_k(t) = 0$ si $k < 0$. La notation $\mathfrak{s}_k(\tilde{\partial})$ sera fréquemment utilisée, et signifie : $\mathfrak{s}_k(\tilde{\partial}) := \mathfrak{s}_k\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_3}, \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t_4}, \dots\right)$.

ceci :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{z=\infty} dz e^{\sum_{i \geq 1} (-2)y_i z^i} \tau_n(t - y - [z^{-1}]) \tau_n(t + y + [z^{-1}]) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \oint_{z=\infty} dz \left(\sum_{i \geq 0} z^i \mathfrak{s}_i(-2y) \right) \left(\sum_{j \geq 0} z^{-j} \mathfrak{s}_j(\tilde{\partial}) \right) e^{\sum_{k \geq 1} y_k \frac{\partial}{\partial t_k}} (\tau_n \circ \tau_n) \\
&= e^{\sum_{k \geq 1} y_k \frac{\partial}{\partial t_k}} \left(\sum_{i \geq 0} \mathfrak{s}_i(-2y) \mathfrak{s}_{i+1}(\tilde{\partial}) \right) (\tau_n \circ \tau_n) \\
&= \left[1 + \sum_{j \geq 1} y_j \frac{\partial}{\partial t_j} + O(y^2) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i \geq 1} \mathfrak{s}_{i+1}(\tilde{\partial}) (-2y_i + O(y^2)) \right] (\tau_n \circ \tau_n) \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_1} (\tau_n \circ \tau_n)}_0 + \sum_{k \geq 1} y_k \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial t_1} - 2 \mathfrak{s}_{k+1}(\tilde{\partial}) \right) (\tau_n \circ \tau_n) + O(y^2).
\end{aligned}$$

Dans la mesure où l'expression s'annule identiquement, les coefficients des y_k doivent être tous égaux à zéro. Ceci nous conduit au théorème principal :

Proposition 3.4 (*La hiérarchie KP*)

$$\left(\mathfrak{s}_{k+1}(\tilde{\partial}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_k} \right) (\tau_n \circ \tau_n) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.21)$$

■

Remarquons que les équations obtenues dans la Proposition 3.4 sont en fait triviales pour $k = 1, 2$, tandis que pour $k = 3$, on retrouve l'équation non linéaire de KP mentionnée en (3.4).

3.2 Contraintes de Virasoro

Dans la section précédente, nous avons montré que l'intégrale :

$$\tau_n(E, t) := \frac{1}{n!} \int_{E^n} \Delta_n^2(z) \prod_{k=1}^n e^{-V(z_k) + \sum_{i \geq 1} t_i z_k^i} dz_k \quad (3.22)$$

est bien une *fonction tau*, au sens de la théorie de Sato [25]. En particulier, elle satisfait l'équation de KP (3.4).

Le problème, à présent, est que nous ne pouvons pas éliminer les variables auxiliaires en posant simplement tous les t_i égaux à zéro (pour retomber sur la probabilité originelle), car (3.4) contient des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t_i}$. Afin de résoudre cette difficulté, notre espoir serait de trouver d'autres identités, permettant d'exprimer les dérivées partielles d'ordre deux et d'ordre quatre en termes d'opérateurs dépendant seulement des "points du bord" de E . C'est précisément le rôle joué par les *contraintes de Virasoro*, qui sont des *équations différentielles linéaires* ayant la propriété que leur partie "spatiale" est entièrement découplée de leur partie "temporelle".

A vrai dire, il s'avère que l'on peut calculer des contraintes de Virasoro pour n'importe quelle fonction de poids $w(z) = e^{-V(z)}$ possédant une dérivée logarithmique *rationnelle*, c'est-à-dire :

$$V'(z) = -\frac{w'(z)}{w(z)} := \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k} . \quad (3.23)$$

Proposition 3.5 *(La hiérarchie de Virasoro)*

$$\mathbb{V}_m(t) \tau_n(E, t) = \mathcal{B}_m \tau_n(E, t) \quad (\text{pour } m \geq -1) , \quad (3.24)$$

où $\mathcal{B}_m$ correspond à l'algèbre d'opérateurs différentiels induits par la réunion des intervalles $E = \bigcup_{i=1}^r [b_{2i-1}, b_{2i}]$:

$$\mathcal{B}_m := \sum_{i=1}^{2r} b_i^{m+1} f(b_i) \frac{\partial}{\partial b_i} , \quad (3.25)$$

et où $\mathbb{V}_m(t)$ est un opérateur linéaire dans les variables t_i , dont l'expression explicite s'écrit :

$$\mathbb{V}_m(t) := \sum_{l=0}^{\infty} \left(\alpha_l \mathbb{J}_{m+l,n}^{(2)}(t) - \beta_l \mathbb{J}_{m+l+1,n}^{(1)}(t) \right) , \quad (3.26)$$

en termes des générateurs de Heisenberg et de Virasoro, définis respective-

ment par¹² :

$$\mathbb{J}_{m,n}^{(1)}(t) := \frac{\partial}{\partial t_m} - \frac{m}{2} t_{-m} + n \delta_{m,0}, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{m,n}^{(2)}(t) := & \left(\sum_{i+j=m} \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i \geq 1} i t_i \frac{\partial}{\partial t_{i+m}} + \frac{1}{4} \sum_{i+j=-m} i t_i j t_j \right) \\ & + 2n \left(\frac{\partial}{\partial t_m} - \frac{m}{2} t_{-m} \right) + n^2 \delta_{m,0}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Remarques :

1. Le nom de “Virasoro” provient du fait que $\mathbb{J}_{m,n}^{(2)}(t)$ et $\mathbb{J}_{m,n}^{(1)}(t)$ satisfont (respectivement) une algèbre de Virasoro, avec une charge centrale $c = 1$, et une algèbre de Heisenberg, interagissant via les relations de commutation :

$$[\mathbb{J}_{m,n}^{(2)}(t), \mathbb{J}_{p,n}^{(2)}(t)] = (m-p) \mathbb{J}_{m+p,n}^{(2)}(t) + \left(\frac{m^3 - m}{12} \right) \delta_{m+p,0}, \quad (3.29)$$

$$[\mathbb{J}_{m,n}^{(2)}(t), \mathbb{J}_{p,n}^{(1)}(t)] = -p \mathbb{J}_{m+p,n}^{(1)}(t), \quad (3.30)$$

$$[\mathbb{J}_{m,n}^{(1)}(t), \mathbb{J}_{p,n}^{(1)}(t)] = \frac{m}{2} \delta_{m+p,0}. \quad (3.31)$$

2. Il existe des formules similaires qui s’appliquent à des intégrales contenant $|\Delta_n(z)|^\beta$ avec $\beta \neq 2$ (voir [6], [31]).

Preuve : La manière la plus simple, et sans doute la plus transparente, de démontrer la Proposition 3.5 est basée sur l’invariance “de jauge” de la fonction (3.22) sous la transformation : $z_k \rightarrow z_k + \epsilon f(z_k) z_k^{m+1}$ ($1 \leq k \leq n$) des variables d’intégration. Posons :

$$\tau_n(E, t) = \frac{1}{n!} \int_{E^n} dI_n \quad ; \quad dI_n = \Delta_n^2(z) \prod_{k=1}^n e^{-V(z_k) + \sum_{i \geq 1} t_i z_k^i} dz_k. \quad (3.32)$$

Puisque τ_n est indépendant de ϵ , il vient :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_{\tilde{E}^n} dI_n (z_k \rightarrow z_k + \epsilon f(z_k) z_k^{m+1}) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (3.33)$$

¹²dans la définition de $\mathbb{J}_{m,n}^{(2)}(t)$, observons que le troisième terme $\frac{1}{4} \sum_{i+j=-m} i t_i j t_j$ ne contribuera jamais, étant donné que les contraintes de Virasoro sont seulement valables lorsque $m \geq -1$.

La variation des points du bord $\tilde{E} = \bigcup_{i=1}^r [\tilde{b}_{2i-1}, \tilde{b}_{2i}]$ sous ce changement de coordonnées, est tel que : $\tilde{b}_i = b_i - \epsilon f(b_i) b_i^{m+1} + O(\epsilon^2)$. Dès lors, en utilisant le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, cette variation produit exactement, dans le membre de droite de (3.33), les termes $\left(- \sum_{i=1}^{2r} b_i^{m+1} f(b_i) \frac{\partial}{\partial b_i} \right) \tau_n \equiv -\mathcal{B}_m \tau_n$.

Il reste donc à montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} dI_n(z_k \rightarrow z_k + \epsilon f(z_k) z_k^{m+1}) \Big|_{\epsilon=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\alpha_l \mathbb{J}_{m+l,n}^{(2)}(t) - \beta_l \mathbb{J}_{m+l+1,n}^{(1)}(t) \right) dI_n.$$

Ce calcul a été réalisé par Adler et van Moerbeke dans l'appendice de [6], en prenant en considération les contributions provenant séparément de $\Delta_n^2(z)$, $\prod_{k=1}^n w_t(z_k)$ ainsi que $\prod_{k=1}^n dz_k$. ■

Rappelons que nous désirons résoudre les dérivées partielles $\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^4$, $\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)^2$, $\left(\frac{\partial}{\partial t_2} \right)^2$ et $\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} \right)$ de $\log \tau_n$, afin de substituer les résultats obtenus dans l'équation KP (3.4).

En examinant la Proposition 3.5, on voit qu'il est assez difficile de tirer une conclusion générale, valable pour un potentiel *arbitraire* $V(z)$. Néanmoins, dans certains cas favorables, des informations utiles peuvent être extraites des contraintes de Virasoro, et cela inclut l'ensemble classique GUE. C'est pourquoi nous allons désormais supposer que nous avons affaire à un *poids gaussien* : $w(z) = e^{-V(z)} = e^{-\frac{z^2}{2}}$, tel que $V'(z) = z$ et par conséquent $g(z) = z$; $f(z) = 1$ dans (3.23).

Proposition 3.6 *Si M est une matrice aléatoire hermitienne $n \times n$ choisie dans l'ensemble GUE (avec un potentiel $V(z) = \frac{z^2}{2}$ dans (1.2)), alors le logarithme de la probabilité $\mathbb{P}_n$ que le spectre de M soit entièrement contenu dans $E = \bigcup_{i=1}^r [b_{2i-1}, b_{2i}]$, satisfait une EDP d'ordre quatre, possédant une non-linéarité quadratique, donnée par :*

$$\left(\mathcal{B}_{-1}^4 + (4n + 6\mathcal{B}_{-1}^2 \log \mathbb{P}_n) \mathcal{B}_{-1}^2 + 3\mathcal{B}_0^2 - 4\mathcal{B}_{-1}\mathcal{B}_1 + 6\mathcal{B}_0 \right) \log \mathbb{P}_n = 0, \quad (3.34)$$

où, pour $m \geq -1$:

$$\mathcal{B}_m := \sum_{i=1}^{2r} b_i^{m+1} \frac{\partial}{\partial b_i}. \quad (3.35)$$

Preuve : Dans la situation qui nous occupe, les relations de Virasoro (3.24) prennent la forme simplifiée :

$$\mathcal{B}_m \tau_n(E, t) = \left(\mathbb{J}_{m,n}^{(2)}(t) - \mathbb{J}_{m+2,n}^{(1)}(t) \right) \tau_n(E, t). \quad (3.36)$$

En se concentrant sur les trois premières contraintes ($m = -1, 0, 1$) et en posant $f := \log \tau_n(E, t)$, on trouve aisément :

$$-\mathcal{B}_{-1}f = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 2} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \right) f - nt_1, \quad (3.37)$$

$$-\mathcal{B}_0f = \left(\frac{\partial}{\partial t_2} - \sum_{i \geq 1} it_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) f - n^2, \quad (3.38)$$

$$-\mathcal{B}_1f = \left(\frac{\partial}{\partial t_3} - 2n \frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 1} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i+1}} \right) f. \quad (3.39)$$

Par conséquent, sur le “*lieu*” $\mathcal{L} \equiv \{\text{tous les } t_i = 0\}$, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = -\mathcal{B}_{-1}f \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t_2} = -\mathcal{B}_0f + n^2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t_3} = -\mathcal{B}_1f - 2n\mathcal{B}_{-1}f. \quad (3.40)$$

Pour déduire les dérivées partielles d’ordre plus élevé, toujours évaluées sur $\mathcal{L}$, nous utilisons l’astuce selon laquelle les opérateurs “*spatiaux*” $\mathcal{B}_m$ commutent avec les opérateurs purement “*temporels*”.

Ainsi, pour donner deux exemples spécifiques de notre façon de procéder, le calcul de $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} \right) \Big|_{\mathcal{L}}$ et de $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_3} \right) \Big|_{\mathcal{L}}$ se poursuit comme ceci :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{-1} \mathcal{B}_{-1} f \Big|_{\mathcal{L}} &= -\mathcal{B}_{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 2} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \right) f \Big|_{\mathcal{L}} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 2} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \right) (-\mathcal{B}_{-1} f) \Big|_{\mathcal{L}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} (-\mathcal{B}_{-1} f) \Big|_{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 2} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \right) f - nt_1 \right] \Big|_{\mathcal{L}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} \right) \Big|_{\mathcal{L}} - n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{-1}\mathcal{B}_1 f \Big|_{\mathcal{L}} &= -\mathcal{B}_{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t_3} - 2n \frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 1} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i+1}} \right) f \Big|_{\mathcal{L}} = \left(\frac{\partial}{\partial t_3} - 2n \frac{\partial}{\partial t_1} \right) (-\mathcal{B}_{-1} f) \Big|_{\mathcal{L}} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t_3} - 2n \frac{\partial}{\partial t_1} \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \sum_{i \geq 2} it_i \frac{\partial}{\partial t_{i-1}} \right) f - n t_1 \right] \Big|_{\mathcal{L}} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_3} \right) \Big|_{\mathcal{L}} - 3 \left(\frac{\partial f}{\partial t_2} \right) \Big|_{\mathcal{L}} - 2n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} \right) \Big|_{\mathcal{L}} + 2n^2 \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_3} \right) \Big|_{\mathcal{L}} + 3 \mathcal{B}_0 f \Big|_{\mathcal{L}} - 2n \mathcal{B}_{-1}^2 f \Big|_{\mathcal{L}} - 3n^2.
\end{aligned}$$

Par des calculs semblables, on obtient facilement les dérivées partielles suivantes, valables sur le lieu $\mathcal{L}$ sur lequel tous les $(t_i)_{i \geq 1}$ s'annulent [6] :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial t_1^4} = \mathcal{B}_{-1}^4 f \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = \mathcal{B}_{-1}^2 f + n, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} = \mathcal{B}_0^2 f - 2 \mathcal{B}_0 f + 2n^2, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_3} = \mathcal{B}_{-1} \mathcal{B}_1 f - 3 \mathcal{B}_0 f + 2n \mathcal{B}_{-1}^2 f + 3n^2. \quad (3.43)$$

En insérant ces dérivées dans l'équation KP (3.4), cela fournit une EDP satisfaite par $f \equiv \log \tau_n(E, t) \Big|_{\mathcal{L}}$. Finalement, le lien entre τ_n et la probabilité $\mathbb{P}_n$ étant donné par (3.1), nous avons :

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{P}_n &= \log \tau_n(E, t) \Big|_{\mathcal{L}} - \log \tau_n(\mathbb{R}, t) \Big|_{\mathcal{L}} \\
&= \log \tau_n(E, t) \Big|_{\mathcal{L}} - \frac{(2\pi)^{n/2}}{n!} \prod_{j=1}^n j!, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

où le deuxième terme est une constante évaluée grâce aux formules intégrales de Selberg et Mehta (voir [30]). Il s'ensuit que $\log \mathbb{P}_n$ est solution de l'EDP (3.34) de la Proposition 3.6. $\blacksquare$

Proposition 3.7 *En corollaire de la Proposition 3.6, si l'on considère le cas particulier où E est réduit au seul intervalle $] -\infty, x]$, alors les opérateurs spatiaux deviennent $\mathcal{B}_{-1} \equiv \frac{d}{dx}$, $\mathcal{B}_0 \equiv x \frac{d}{dx}$, $\mathcal{B}_1 \equiv x^2 \frac{d}{dx}$, et la*

fonction $f(x; n) := \frac{d}{dx} \log \mathbb{P}_n$ (toutes les valeurs propres de M sont $\leq x$) satisfait l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$f''' + 6f'^2 + (4n - x^2) f' + xf = 0. \quad (3.45)$$

■

Notons que l'équation (3.45) appartient à la classe (dite “de Chazy”) : $f''' = F(x, f, f', f'')$ avec F rationnelle en f, f', f'' et localement analytique en x . Il est alors possible de vérifier que la fonction renormalisée $g(z) := \sqrt{2} f(\sqrt{2}z) + \frac{2}{3}nz$ est une solution de l'équation canonique [31] :

$$g''' = -4g'^3 + 4(zg' - g)^2 + 3\left(\frac{4}{3}n\right)^2 g' - \left(\frac{4}{3}n\right)^3, \quad (3.46)$$

qui peut être transformée¹³ en l'équation standard de Painlevé (IV).

3.3 Le réseau de Toda

Bien que ce ne soit pas vraiment essentiel pour la suite, nous mentionnons ici que la *fonction tau* (3.22) satisfait également un autre type d'identités différentielles, à savoir le *réseau de Toda standard* [40].

Historiquement, les *équations de Toda* sont d'abord apparues dans un autre contexte. Considérons le mouvement de n particules $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sur la droite réelle, interagissant entre elles avec des forces exponentielles, au moyen de l'Hamiltonien :

$$H(p_i, x_j) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{x_k - x_{k+1}}. \quad (3.47)$$

La dynamique de ce système est alors gouvernée par les équations de Hamilton ($1 \leq k \leq n$) :

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = p_k \quad ; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} = e^{x_{k-1} - x_k} - e^{x_k - x_{k+1}}, \quad (3.48)$$

¹³pour les ensembles hermitiens de Laguerre et de Jacobi, dans le cas où E possède un seul “point du bord” x , on peut montrer que les EDO's correspondantes se réduisent, respectivement, aux équations de Painlevé (V) et Painlevé (VI) : voir [23], [37].

où $e^{x_0-x_1} = e^{x_n-x_{n+1}} = 0$. Ceci implique aussitôt :

$$\ddot{x}_k = e^{x_{k-1}-x_k} - e^{x_k-x_{k+1}}. \quad (3.49)$$

Flaschka et Manakov (voir [21]) ont découvert que ces équations pouvaient être écrites sous la forme d'une *paire de Lax*. En effet, si nous introduisons les nouvelles quantités :

$$a_k := -\frac{p_k}{2} = -\frac{\dot{x}_k}{2} \quad ; \quad b_k := \frac{1}{2}e^{(x_k-x_{k+1})/2}, \quad (3.50)$$

à l'intérieur des matrices $(n \times n)$ définies par :

$$T := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = T^T, \quad (3.51)$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -b_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = -A^T, \quad (3.52)$$

alors les relations dynamiques (3.48) sont équivalentes à :

$$\frac{dT}{dt} = [A, T] \equiv AT - TA \quad (\text{paire de Lax}). \quad (3.53)$$

Maintenant, quel est le lien entre ceci et la *fonction tau* (3.22) ? Reprenons donc les mêmes notations que précédemment, et définissons la matrice semi-infinie :

$$L(t) := S(t) \Lambda S(t)^{-1}, \quad (3.54)$$

où Λ est la matrice “*shift*” telle que $\Lambda_{i,i+1} = 1$ et $\Lambda_{ij} = 0$ si $j \neq i+1$, et où $S(t)$ désigne la matrice semi-infinie, triangulaire inférieure et inversible, correspondant aux polynômes orthonormaux¹⁴ : $p_n(t, z) = \sum_{k=0}^n S_{nk}(t) z^k$.

¹⁴orthonormaux par rapport au poids $w_t(z) = e^{-V(z) + \sum_{i \geq 1} t_i z^i}$.

Nous nous apprêtons à montrer que $L(t)$ est une *matrice de Jacobi*¹⁵, dont les entrées peuvent s'écrire explicitement en termes des *fonctions tau*. Qui plus est, $L(t)$ est solution d'une équation exprimée sous la forme d'une *paire de Lax*, comme en (3.53).

Mais tout d'abord, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires, repris dans la Proposition suivante. Rappelons qu'en (3.13), nous avons défini les fonctions $q_n(t, z) := z \int_E \frac{p_n(t, u)}{z - u} w_t(u) du$.

Proposition 3.8 *Si $\chi(z) = (1, z, z^2, z^3, \dots)^T$, nous avons :*

$$p_n(t, z) = (S(t) \chi(z))_n \quad \text{et} \quad q_n(t, z) = ((S^T)^{-1}(t) \chi(z^{-1}))_n. \quad (3.55)$$

De plus, $L(t)$ est une matrice symétrique : $L(t) = L^T(t)$, et $(p_n(t, z))_{n \geq 0}$ et $(q_n(t, z))_{n \geq 0}$ sont des vecteurs propres de $L(t)$, en ce sens que :

$$(L p)_n = z p_n \quad \text{pour } n \geq 0 \quad \text{et} \quad (L q)_n = z q_n \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (3.56)$$

Preuve : En utilisant (3.14), la *matrice des moments* M_∞ admet la factorisation :

$$M_\infty(t) = S(t)^{-1} (S^T)^{-1}(t). \quad (3.57)$$

Il est évident que $p_n(t, z) = (S(t) \chi(z))_n$. On remarque ensuite que :

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 0} ((S^T)^{-1}(t))_{nj} z^{-j} = \sum_{j \geq 0} (S(t) M_\infty(t))_{nj} z^{-j} = \sum_{j \geq 0} z^{-j} \sum_{k \geq 0} S_{nk}(t) \mu_{kj}(t) \\ &= \sum_{j \geq 0} z^{-j} \sum_{k \geq 0} S_{nk}(t) \int_E u^{k+j} w_t(u) du = \int_E \sum_{k \geq 0} S_{nk}(t) u^k \sum_{j \geq 0} \left(\frac{u}{z}\right)^j w_t(u) du \\ &= z \int_E \frac{p_n(t, u)}{z - u} w_t(u) du \equiv q_n(t, z), \end{aligned}$$

où la première égalité est une conséquence de (3.57). La symétrie de $L(t)$ se démontre de la façon suivante, en se servant également de (3.57) :

$$\begin{aligned} L &= S \Lambda S^{-1} = S \Lambda \underbrace{S^{-1} (S^T)^{-1}}_{M_\infty} S^T = S \underbrace{\Lambda M_\infty}_{M_\infty \Lambda^T} S^T = S M_\infty \Lambda^T S^T \\ &= S (S^{-1} (S^T)^{-1}) \Lambda^T S^T = (S \Lambda S^{-1})^T = L^T. \end{aligned}$$

¹⁵c'est-à-dire une matrice symétrique, tridiagonale, avec des entrées "hors diagonale" strictement positives.

Finalement, observant que $\Lambda\chi(z) = z\chi(z)$ et $\Lambda^T\chi(z^{-1}) = z\chi(z^{-1}) - ze_1$, avec $e_1 = (1, 0, 0, \dots)^T$, on déduit facilement les identités :

$$\begin{aligned} Lp &= S \Lambda S^{-1} S \chi(z) = S \Lambda \chi(z) = z S \chi(z) = zp, \\ L^T q &= (S^T)^{-1} \Lambda^T S^T (S^T)^{-1} \chi(z^{-1}) = z (S^T)^{-1} \chi(z^{-1}) - z (S^T)^{-1} e_1 \\ &= zq - z (S_{11}^{-1}, 0, 0, 0, \dots)^T. \end{aligned}$$

Puisque $L = L^T$, ceci achève la démonstration de la Proposition 3.8. ■

Proposition 3.9 *Les entrées de S et S^{-1} ont une détermination explicite, en termes des polynômes de Schur $\mathfrak{s}_j(t)$:*

$$S_{nk}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)}} \mathfrak{s}_{n-k}(-\tilde{\partial}) \tau_n(t), \quad (3.58)$$

$$S_{kn}^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)}} \mathfrak{s}_{k-n}(\tilde{\partial}) \tau_{n+1}(t), \quad (3.59)$$

ce qui, en particulier, entraîne que $L = S\Lambda S^{-1}$ a la forme tridiagonale :

$$L(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} \log\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right) & \sqrt{\frac{\tau_0 \tau_2}{\tau_1^2}} & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{\tau_0 \tau_2}{\tau_1^2}} & \frac{\partial}{\partial t_1} \log\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) & \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_2^2}} & \\ 0 & \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_3}{\tau_2^2}} & \frac{\partial}{\partial t_1} \log\left(\frac{\tau_3}{\tau_2}\right) & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Preuve : Considérons par exemple la démonstration de l'égalité (3.58). D'une part, par le théorème de Taylor ainsi que la définition des polynômes de Schur, on tire :

$$\tau_n(t - [z^{-1}]) = e^{-\sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \frac{\partial}{\partial t_k}} \tau_n(t) = \sum_{j \geq 0} z^{-j} \mathfrak{s}_j(-\tilde{\partial}) \tau_n(t).$$

D'autre part, en combinant la représentation (3.15) de la Proposition 3.2, avec la représentation (3.55) de la Proposition 3.8, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_n(t - [z^{-1}]) &= \sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)} z^{-n} p_n(t, z) = \sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)} \sum_{k \geq 0} z^{k-n} S_{nk}(t) \\ &= \sqrt{\tau_n(t) \tau_{n+1}(t)} \sum_{j \leq n} z^{-j} S_{n, n-j}(t). \end{aligned}$$

La comparaison des deux formules fournit (3.58). De manière analogue, les coefficients de S^{-1} découlent des relations précises qui existent entre $q_n(t, z)$, $\tau_{n+1}(t + [z^{-1}])$ et $S^{-1}(t)$: voir (3.16) dans la Proposition 3.2, et (3.55) dans la Proposition 3.8. ■

C'est une propriété bien connue que toute matrice peut être décomposée, de façon unique, comme la somme d'une matrice anti-symétrique et d'une matrice triangulaire inférieure (dite *de Borel*), la dernière incluant la diagonale. Cela se traduit par la décomposition d'algèbres de Lie¹⁶ :

$$gl(\infty) = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{b}. \quad (3.61)$$

Dans ce qui suit, nous allons indiquer les projections correspondantes par $(\cdot)_{\mathfrak{s}}$ et $(\cdot)_{\mathfrak{b}}$. Aussi, A_{-} désignera la partie triangulaire inférieure d'une matrice A donnée (incluant la diagonale), tandis que A_0 signifiera la partie diagonale de A seulement.

A partir de l'évolution (3.9) des moments, nous avons : $\frac{\partial M_{\infty}}{\partial t_k} = \Lambda^k M_{\infty}$. Dès lors (en utilisant à nouveau (3.57)) :

$$\begin{aligned} 0 &= S \left(\Lambda^k M_{\infty} - \frac{\partial M_{\infty}}{\partial t_k} \right) S^T = S \Lambda^k S^{-1} - S \frac{\partial}{\partial t_k} \left(S^{-1} (S^T)^{-1} \right) S^T \\ &= L^k + \frac{\partial S}{\partial t_k} S^{-1} + (S^T)^{-1} \frac{\partial S^T}{\partial t_k}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Prenons les parties $(\cdot)_{-}$ et $(\cdot)_0$ de (3.62), et notons que S et S^{-1} sont triangulaires inférieures. Nous trouvons :

$$(L^k)_{-} + \frac{\partial S}{\partial t_k} S^{-1} + \left((S^T)^{-1} \frac{\partial S^T}{\partial t_k} \right)_0 = 0, \quad (3.63)$$

$$2 \left(\frac{\partial S}{\partial t_k} S^{-1} \right)_0 + (L^k)_0 = 0. \quad (3.64)$$

Dans la mesure où L est *symétrique*, nous avons également la condition $L_{\mathfrak{b}} = 2(L_{-}) - L_0$; par exemple :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}_{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2c & b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}_{-} - \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}_0.$$

¹⁶avec $\mathfrak{s} = \{ \text{matrices anti-symétriques} \}$ et $\mathfrak{b} = \{ \text{matrices triangulaires inférieures} \}$.

Par conséquent, une combinaison linéaire appropriée de (3.63) et (3.64) conduit directement à :

$$\frac{\partial S}{\partial t_k} = -\frac{1}{2} (L^k)_b S, \quad (3.65)$$

ce qui implique, en tenant compte du fait que $\frac{\partial S^{-1}}{\partial t_k} = -S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t_k} S^{-1}$:

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} (S \Lambda S^{-1}) = \left[-\frac{1}{2} (L^k)_b, L \right]. \quad (3.66)$$

Nous venons donc d'établir le théorème principal de cette section :

Proposition 3.10 *(Les équations du réseau de Toda)*

La matrice semi-infinie $L(t)$ définie en (3.54) et explicitée en (3.60), satisfait les identités différentielles suivantes, exprimées sous la forme d'une paire de Lax :

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = \left[-\frac{1}{2} (L^k)_b, L \right]. \quad (3.67)$$

■

4 Comportement asymptotique

Comme nous l'avons dit au début de l'introduction, les mathématiciens sont particulièrement intéressés par la distribution du spectre des matrices aléatoires lorsque la taille n des matrices devient très grande ($n \nearrow \infty$). Pour établir cette distribution "limitante", il suffit de connaître le comportement asymptotique du noyau de corrélation (1.16), c'est-à-dire donc des polynômes orthonormaux $p_n(x)$, pour n grand.

L'une des méthodes les plus fructueuses pour obtenir cette asymptotique, et ce dans des cas très généraux, est basée sur l'observation, d'abord réalisée par Fokas, Its et Kitaev [22], que la matrice 2×2 suivante :

$$W(z) := \begin{pmatrix} \frac{1}{c_n} p_n(z) & \frac{1}{2i\pi c_n} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(u) e^{-V(u)}}{u-z} du \\ -2i\pi c_{n-1} p_{n-1}(z) & -c_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_{n-1}(u) e^{-V(u)}}{u-z} du \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dans laquelle $p_n(z) = c_n z^n + \dots$ désigne le polynôme orthonormal de degré n par rapport à la fonction de poids $w(z) = e^{-V(z)}$, est la solution (unique) d'un certain *problème de Riemann-Hilbert matriciel*. Plus précisément, $W(z)$ vérifie les conditions :

1. $W(z)$ est définie et analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, (4.2)

2. $W_+(x) = W_-(x) \begin{pmatrix} 1 & e^{-V(x)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, (4.3)

3. Quand $z \rightarrow \infty$: $W(z) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$. (4.4)

Ci-dessus, $W_+(x)$ (resp. $W_-(x)$) représente la limite de $W(z)$ lorsque $z \rightarrow x$, $x \in \mathbb{R}$, la limite étant prise à partir du demi-plan complexe supérieur (resp. inférieur). En se souvenant de la formule de Christoffel-Darboux¹⁷ (2.11) et en l'insérant dans le noyau de corrélation (1.16), on trouve alors facilement :

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= \sqrt{e^{-V(x)}} \sqrt{e^{-V(y)}} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n(x) p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x) p_n(y) \\ x - y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{e^{-V(x)}} \sqrt{e^{-V(y)}}}{2i\pi (x - y)} (W_{\pm}^{-1}(y) W_{\pm}(x))_{21} \\ &= \frac{\sqrt{e^{-V(x)}} \sqrt{e^{-V(y)}}}{2i\pi (x - y)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} W_{\pm}^{-1}(y) W_{\pm}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

en termes de $W(z)$ et de sa matrice inverse :

$$W^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -c_{n-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_{n-1}(u) e^{-V(u)}}{u - z} du & \frac{(-1)}{2i\pi c_n} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(u) e^{-V(u)}}{u - z} du \\ 2i\pi c_{n-1} p_{n-1}(z) & \frac{1}{c_n} p_n(z) \end{pmatrix}.$$

L'idée consiste alors à étudier le problème de Riemann-Hilbert obtenu en appliquant la méthode dite *du point col*, due pour l'essentiel à Deift et Zhou [19]. Par une succession de transformations, on se ramène à un problème de Riemann-Hilbert plus simple (normalisé), dont on peut ensuite calculer la solution et surtout en extraire l'asymptotique pour $n \rightarrow \infty$.

Dans ces notes, nous nous contenterons d'énoncer quelques résultats principaux, le lecteur intéressé étant renvoyé, pour des démonstrations détaillées, par exemple à [18] ou [19].

¹⁷dans laquelle il est possible de montrer l'égalité : $a_n = \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) > 0$.

Wigner avait très tôt remarqué que si l'on choisit au hasard une matrice $n \times n$ appartenant à l'ensemble hermitien GUE, caractérisé par la mesure :

$$\frac{1}{Z_n} e^{-\text{Tr } \frac{M^2}{2}} dM , \quad (4.6)$$

alors ses valeurs propres ont tendance à être distribuées selon un *demi-cercle*, dont le rayon croît avec la racine carrée de n . Cette approximation est d'autant meilleure que la matrice est de grande taille. Autrement dit, pour n grand, la densité de valeurs propres (à une dimension) s'écrit :

$$\frac{K_n(x, x)}{n} \approx \begin{cases} \frac{1}{2\pi n} \sqrt{4n - x^2} , & \text{si } |x| \leq \sqrt{4n} . \\ 0 , & \text{si } |x| \geq \sqrt{4n} . \end{cases} \quad (4.7)$$

Il s'ensuit que le nombre moyen de valeurs propres par unité de longueur, à proximité du point $x = 0$ (le "*bulk*" du spectre), est donné par $\frac{\sqrt{4n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{n}}{\pi}$, et donc la distance moyenne entre deux valeurs propres consécutives y est de $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$. Ceci suggère le changement de variables ("*rescaling*") qu'il faut considérer lorsqu'on passe à la limite $n \rightarrow \infty$. On peut alors démontrer [18] :

Proposition 4.1 (*Asymptotique dans le "bulk" du spectre*)

Soit $K_n(x, y)$ le noyau de corrélation (1.16) ou (4.5), correspondant à l'ensemble hermitien GUE caractérisé par le potentiel $V(z) = \frac{z^2}{2}$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{n}} K_n \left(\frac{\pi x}{\sqrt{n}}, \frac{\pi y}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\sin(\pi(x - y))}{\pi(x - y)} , \quad (4.8)$$

la convergence étant uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$. ■

Le noyau limitant qui apparaît dans le membre de droite de (4.8) est appelé le *Sine Kernel*, et nous le noterons en général $S(x, y)$.

Ce noyau n'apparaît pas uniquement dans le contexte de l'ensemble GUE. En fait, il est possible de montrer que l'on convergera vers le Sine Kernel, *quel que soit* le choix du potentiel $V(z)$ réel et analytique, pour autant que le *rescaling* soit effectué autour d'un point situé dans le "*bulk*" du spectre¹⁸. La forme précise du *rescaling* pourra bien sûr dépendre du potentiel $V(z)$, mais dans le "*bulk*" on retrouvera toujours le Sine Kernel à droite.

¹⁸c'est-à-dire un point situé dans l'intérieur du support de la densité limitante de valeurs propres, celle-ci étant donnée par (4.7) dans le cas de l'ensemble GUE.

Nous avons là un exemple frappant de ce qu'il est convenu d'appeler une *loi d'universalité*, fréquente en théorie des matrices aléatoires. En effet, cela témoigne que, asymptotiquement parlant, la distribution du spectre dépend seulement des propriétés globales de symétrie de la matrice (par exemple, le fait qu'elle soit hermitienne), et *non pas* de la mesure particulière qui a été définie (ici, le choix de $V(z)$), ce qui n'est pas sans rappeler la loi des grands nombres en probabilité.

On peut également se poser la question de savoir à quoi ressemble la distribution *au bord du spectre* (autour des points $x = \pm\sqrt{4n}$ dans le cas de l'ensemble GUE). Il s'avère que le *rescaling* est alors un peu plus compliqué. Considérons, pour fixer les idées, le bord supérieur $x = \sqrt{4n}$. La densité de valeurs propres se comporte, autour de ce point, comme $\frac{\sqrt{2\sqrt{4n}}}{2\pi n} \sqrt{\sqrt{4n} - x}$, c'est-à-dire $\frac{n^{-3/4}}{\pi} \sqrt{\sqrt{4n} - x}$. Dès lors, la distance typique d entre deux valeurs propres consécutives est telle que :

$$\int_{\sqrt{4n}-d}^{\sqrt{4n}} \frac{n^{-3/4}}{\pi} \left(\sqrt{4n} - x \right)^{1/2} dx \approx \frac{1}{n}, \quad (4.9)$$

ce qui entraîne que d est proportionnel à $n^{-1/6}$, et fournit donc le *rescaling* à envisager. On trouve que le noyau limitant s'exprime en termes de la *fonction d'Airy* (voir [18], [38]) :

Proposition 4.2 (*Asymptotique au bord du spectre ("soft edge scaling")*)

Soit $K_n(x, y)$ le noyau de corrélation (1.16) ou (4.5), correspondant à l'ensemble hermitien GUE caractérisé par le potentiel $V(z) = \frac{z^2}{2}$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/6}} K_n \left(\sqrt{4n} + \frac{x}{n^{1/6}}, \sqrt{4n} + \frac{y}{n^{1/6}} \right) = A(x, y), \quad (4.10)$$

la convergence étant uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$, où :

$$A(x, y) := \frac{Ai(x) Ai'(y) - Ai'(x) Ai(y)}{x - y} \quad (4.11)$$

est le noyau d'Airy, qui fait intervenir la fonction d'Airy $Ai(x)$. Celle-ci admet la représentation intégrale¹⁹ :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{iax + \frac{ia^3}{3}} da, \quad (4.12)$$

et satisfait l'équation différentielle ordinaire : $Ai''(x) = x Ai(x)$. ■

¹⁹où $\mathcal{C}$ est un contour du plan complexe constitué des "rayons" $\infty e^{5i\pi/6}$ à $\infty e^{i\pi/6}$.

Soit $E = \bigcup_{i=1}^r [b_{2i-1}, b_{2i}]$. Dans la Proposition 3.6, nous avons établi que la probabilité $\mathbb{P}_n(E)$ que les valeurs propres λ_i d'une matrice provenant de l'ensemble GUE soient toutes contenues dans E , satisfaisait l'équation (3.34). Considérons, dans la nouvelle échelle déduite de (4.10), les valeurs propres :

$$u_i := n^{1/6} \left(\lambda_i - \sqrt{4n} \right) , \quad 1 \leq i \leq n , \quad (4.13)$$

et définissons :

$$\mathbb{P}(E^c) := \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\text{tous les } u_i \in E^c \right) , \quad (4.14)$$

qui peut être vue comme une probabilité de trou, dans la limite $n \nearrow \infty$. Il suit des Propositions 2.2 et 4.2 que cette limite existe bien, et que $\mathbb{P}(E^c)$ est égale au déterminant de Fredholm :

$$\mathbb{P}(E^c) = \det(I - A_E) , \quad (4.15)$$

où A_E est l'opérateur intégral sur $L^2(E)$ ayant pour noyau *le noyau d'Airy* $A(x, y)$ donné en (4.11). Adler et van Moerbeke ont montré que $\log \mathbb{P}(E^c)$ était encore la solution d'une équation aux dérivées partielles, d'ordre quatre et possédant une non-linéarité quadratique (voir [5], [31]) :

Proposition 4.3 (*Adler - van Moerbeke*)

La probabilité limite $\mathbb{P}(E^c)$, définie ci-dessus, vérifie l'EDP :

$$\left(\mathcal{B}_{-1}^3 - 4 \left(\mathcal{B}_0 - \frac{1}{2} \right) \right) \mathcal{B}_{-1} \log \mathbb{P}(E^c) + 6 \left(\mathcal{B}_{-1}^2 \log \mathbb{P}(E^c) \right)^2 = 0 , \quad (4.16)$$

où l'on a posé, comme d'habitude : $\mathcal{B}_m = \sum_{i=1}^{2r} b_i^{m+1} \frac{\partial}{\partial b_i}$. ■

En particulier, si $E^c =] - \infty, x]$, cette EDP se réduit à une EDO :

$$f''' - 4x f' + 2f + 6f'^2 = 0 , \quad (4.17)$$

avec $f(x) := \frac{d}{dx} \log \mathbb{P}(] - \infty, x])$. Cette équation peut être intégrée directement, conduisant à :

$$f''^2 + 4f' (f'^2 - x f' + f) = 0 . \quad (4.18)$$

Il est alors possible de résoudre explicitement (4.18) en posant :

$$f' = -g^2 \quad \text{et} \quad f = g'^2 - x g^2 - g^4 , \quad (4.19)$$

où $g(x)$ est la solution de Hastings-McLeod de l'équation de Painlevé (II), qui se comporte comme la fonction d'Airy lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} g''(x) = x g(x) + 2 g^3(x) . \\ g(x) \simeq -\frac{e^{-(2/3)x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi} x^{1/4}} \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty . \end{cases} \quad (4.20)$$

Nous sommes ainsi amenés à la Proposition suivante :

Proposition 4.4 (*Distribution de Tracy-Widom*)

La fonction $\mathbb{P}([-\infty, x])$, qui correspond à la fonction de répartition de la plus grande valeur propre d'une matrice hermitienne appartenant à l'ensemble GUE, après un changement d'échelle convenable et dans la limite où la taille n de la matrice $\rightarrow \infty$, est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([-\infty, x]) &= \det(I - A_{(x, \infty)}) \\ &= \exp\left(-\int_x^{+\infty} (u - x) g^2(u) du\right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

où g est la solution particulière de l'équation de Painlevé (II) décrite en (4.20). ■

On reconnaît dans (4.21) la (célèbre) distribution de Tracy-Widom qui, historiquement, fut d'abord découverte par Tracy et Widom en utilisant des techniques d'analyse fonctionnelle (voir [38]).

Part III

Modèles de mouvements browniens finis

5 Mouvements browniens de Dyson

Les modèles matriciels évoqués dans l'introduction étaient purement statiques. Certes, pour dériver les équations vérifiées par les probabilités (section 3), nous avons dû faire la substitution : $V(z) \rightarrow V(z) - \sum_{i \geq 1} t_i z^i$ sur le potentiel, en ajoutant une famille infinie de paramètres “temporels” t_i ($i \geq 1$). Mais il ne s'agissait là que d'un artifice de calcul, car pour recouvrer la probabilité initiale, il fallait quand même supposer tous les t_i égaux à zéro.

Dyson fut l'un des premiers à introduire une *dynamique* authentique dans le contexte des matrices aléatoires. Considérons en effet une matrice $n \times n$ hermitienne $M = M(t)$, dont les entrées peuvent cette fois dépendre du temps t . Faisons l'hypothèse que les entrées indépendantes de M évoluent, pour $t > 0$, selon un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, avec une probabilité de transition donnée par :

$$P(t, \bar{M}, M) = Z_n^{-1} \frac{1}{(1 - e^{-2t})^{n^2/2}} e^{-\frac{1}{(1-e^{-2t})} \text{Tr}(M - e^{-t}\bar{M})^2}, \quad (5.1)$$

où Z_n^{-1} est une constante de normalisation, et qui satisfait l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n^2} \left(\frac{1}{4} (1 + \delta_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial M_{ij}^2} + \frac{\partial}{\partial M_{ij}} M_{ij} \right) P. \quad (5.2)$$

Remarquons que lorsque $t \rightarrow +\infty$, (5.1) converge vers la distribution gaussienne *stationnaire* : $Z_n^{-1} e^{-\text{Tr} M^2} dM$.

Il est alors possible de montrer (voir [20]) :

Proposition 5.1 (*Dyson*)

Les valeurs propres $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ de la matrice $M(t)$, définie ci-dessus, évoluent avec une probabilité de transition $p(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifiant l'équation

de diffusion :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} - \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[\left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \right) - \lambda_i \right] \right) p . \quad (5.3)$$

Autrement dit, en examinant le membre de droite de (5.3), on voit que les valeurs propres se comportent comme n mouvements browniens (premier terme), qui se repoussent l'un l'autre et en particulier ne s'intersectent pas (deuxième terme), le troisième terme étant un "terme de dérive" qui empêche le système de se disperser en s'éloignant à l'infini. ■

Gaudin a établi qu'à chaque instant, les fonctions de corrélation pour les valeurs propres sont données par un processus déterminantal possédant le même noyau (1.16) que celui de l'ensemble GUE, associé au potentiel $V(z) = z^2$. Il s'agit donc d'un processus *stationnaire* pour les valeurs propres.

Mais puisqu'il existe une dépendance temporelle, cela a également du sens de considérer *les probabilités jointes* pour différents temps. Par exemple, dans le cas de deux temps t_1 et t_2 , désignons par :

$$\mathbb{P}_{Dyson} \left(\text{tous les } \lambda_i(t_1) \in E_1^c, \text{ tous les } \lambda_i(t_2) \in E_2^c \right) \quad (5.4)$$

la probabilité qu'en $t = t_1$ toutes les valeurs propres évitent l'ensemble $E_1 = \bigcup_{i=1}^r [b_{2i-1}^{(1)}, b_{2i}^{(1)}]$, et qu'en $t = t_2 > t_1$ toutes les valeurs propres évitent l'ensemble $E_2 = \bigcup_{i=1}^s [b_{2i-1}^{(2)}, b_{2i}^{(2)}]$. Nous avons alors les résultats suivants :

Proposition 5.2 (Adler - van Moerbeke [7])

La probabilité (5.4) est égale au déterminant de Fredholm "étendu" :

$$\det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{t_k, t_l}^{(n)} \chi_{E_l} \right)_{1 \leq k, l \leq 2} \right) \quad (5.5)$$

qui est associé au noyau de Hermite "étendu" (noyau matriciel) :

$$K_{t_i, t_j}^{(n)}(x, y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n e^{-k(t_i - t_j) - \frac{(x^2 + y^2)}{2}} p_{n-k}(x) p_{n-k}(y), & \text{si } t_i \geq t_j, \\ - \sum_{k=-\infty}^0 e^{k(t_j - t_i) - \frac{(x^2 + y^2)}{2}} p_{n-k}(x) p_{n-k}(y), & \text{si } t_i < t_j, \end{cases} \quad (5.6)$$

en termes des polynômes normalisés²⁰ :

$$p_k(x) := \frac{H_k(x)}{2^{k/2} \sqrt{k!} \pi^{1/4}} \quad (k \geq 0) . \quad (5.7)$$

Notons que, par extension de (2.5), le déterminant de Fredholm (5.5) associé à un noyau matriciel, est défini explicitement par l'expression :

$$\begin{aligned} \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{t_k, t_l}^{(n)} \chi_{E_l} \right)_{1 \leq k, l \leq 2} \right) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{\substack{0 \leq p, q \leq k \\ p+q=k}} \int_{\mathcal{R}} \prod_{i=1}^p d\alpha_i \prod_{i=1}^q d\beta_i \\ &\times \det \begin{pmatrix} \left(\hat{K}_{t_1, t_1}^{(n)}(\alpha_i, \alpha_j) \right)_{1 \leq i, j \leq p} & \left(\hat{K}_{t_1, t_2}^{(n)}(\alpha_i, \beta_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \\ \left(\hat{K}_{t_2, t_1}^{(n)}(\beta_i, \alpha_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} & \left(\hat{K}_{t_2, t_2}^{(n)}(\beta_i, \beta_j) \right)_{1 \leq i, j \leq q} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec $\hat{K}_{t_i, t_j}^{(n)}(x, y) = \chi_{E_i}(x) K_{t_i, t_j}^{(n)}(x, y) \chi_{E_j}(y)$, et où le domaine d'intégration correspond à :

$$\mathcal{R} := \left\{ \begin{array}{l} -\infty < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_p < \infty \\ -\infty < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_q < \infty \end{array} \right\} . \quad (5.9)$$

■

De plus, Adler et van Moerbeke ont calculé que (5.4) vérifiait aussi une EDP non linéaire, vue comme fonction de t_1 , t_2 et des $b_j^{(1)}$, $b_j^{(2)}$. Afin d'y parvenir, ils ont remarqué qu'en raison de (5.1), la probabilité jointe (5.4) pour le processus de Dyson à deux temps pouvait encore s'écrire :

$$\frac{1}{Z'_n} \iint_{(E_1^c \times E_2^c)^n} \Delta_n(x) \Delta_n(y) \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{(1-c^2)}(x_k^2 + y_k^2 - 2c x_k y_k)} dx_k dy_k , \quad (5.10)$$

avec $c := e^{-(t_2 - t_1)}$, si bien que l'on se ramène naturellement au cas d'une chaîne de deux matrices aléatoires couplées appartenant à l'ensemble GUE (le couplage étant assuré par le c).

Pour ce système, une équation peut être obtenue, en utilisant les méthodes habituelles (déformation, contraintes de Virasoro, hiérarchie intégrable). Ceci conduit à la Proposition suivante.

²⁰où les H_k sont les polynômes de Hermite.

Proposition 5.3 (Adler - van Moerbeke [7])

En appelant $F_n(t_1, t_2; b_1^{(1)}, \dots, b_{2r}^{(1)}; b_1^{(2)}, \dots, b_{2s}^{(2)})$ le logarithme de la probabilité (5.4) pour le processus de Dyson à deux temps, et en notant $\{f, g\}_X \equiv (Xf)g - f(Xg)$ le wronskien entre les fonctions f et g , par rapport à l'opérateur X , nous avons :

$$\left\{ \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1 F_n, \mathcal{B}_1 \mathcal{A}_1 F_n + 2nc \right\}_{\mathcal{A}_1} = \left\{ \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1 F_n, \mathcal{B}_1 \mathcal{A}_1 F_n + 2nc \right\}_{\mathcal{B}_1}, \quad (5.11)$$

où $c := e^{-t}$, $t := (t_2 - t_1)$, et en termes des opérateurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \sum_{i=1}^{2r} \frac{\partial}{\partial b_i^{(1)}} + c \sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial}{\partial b_i^{(2)}} \quad ; \quad \mathcal{B}_1 := c \sum_{i=1}^{2r} \frac{\partial}{\partial b_i^{(1)}} + \sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial}{\partial b_i^{(2)}}, \\ \mathcal{A}_2 &:= \sum_{i=1}^{2r} b_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial b_i^{(1)}} + c^2 \sum_{i=1}^{2s} b_i^{(2)} \frac{\partial}{\partial b_i^{(2)}} + (1 - c^2) \frac{\partial}{\partial t} - c^2, \\ \mathcal{B}_2 &:= c^2 \sum_{i=1}^{2r} b_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial b_i^{(1)}} + \sum_{i=1}^{2s} b_i^{(2)} \frac{\partial}{\partial b_i^{(2)}} + (1 - c^2) \frac{\partial}{\partial t} - c^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

■

6 Mouvements browniens contraints

Considérons n mouvements browniens sur $\mathbb{R}$, ne s'intersectant pas, notés $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Supposons que ces mouvements soient soumis aux contraintes suivantes : en $t = 0$ (instant initial), toutes les particules sont situées à l'origine, c'est-à-dire en $x = 0$; tandis qu'en $t = 1$ (instant final), n_1 particules atteignent la position $x = \beta_1$; n_2 particules atteignent la position $x = \beta_2$; ... ; et n_p particules atteignent la position $x = \beta_p$. Nous faisons l'hypothèse que $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_p$. Nous avons bien sûr : $\sum_{i=1}^p n_i = n$.

Sans surprise, nous allons nous intéresser à la probabilité qu'au temps t , avec $0 < t < 1$, toutes les particules appartiennent à l'ensemble $\tilde{E} \subset \mathbb{R}$.

S'il n'y avait qu'un *seul* mouvement $x(t)$, diffusant selon la densité de probabilité brownienne locale²¹ :

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{t}}, \quad (6.1)$$

²¹avec le temps pour variance.

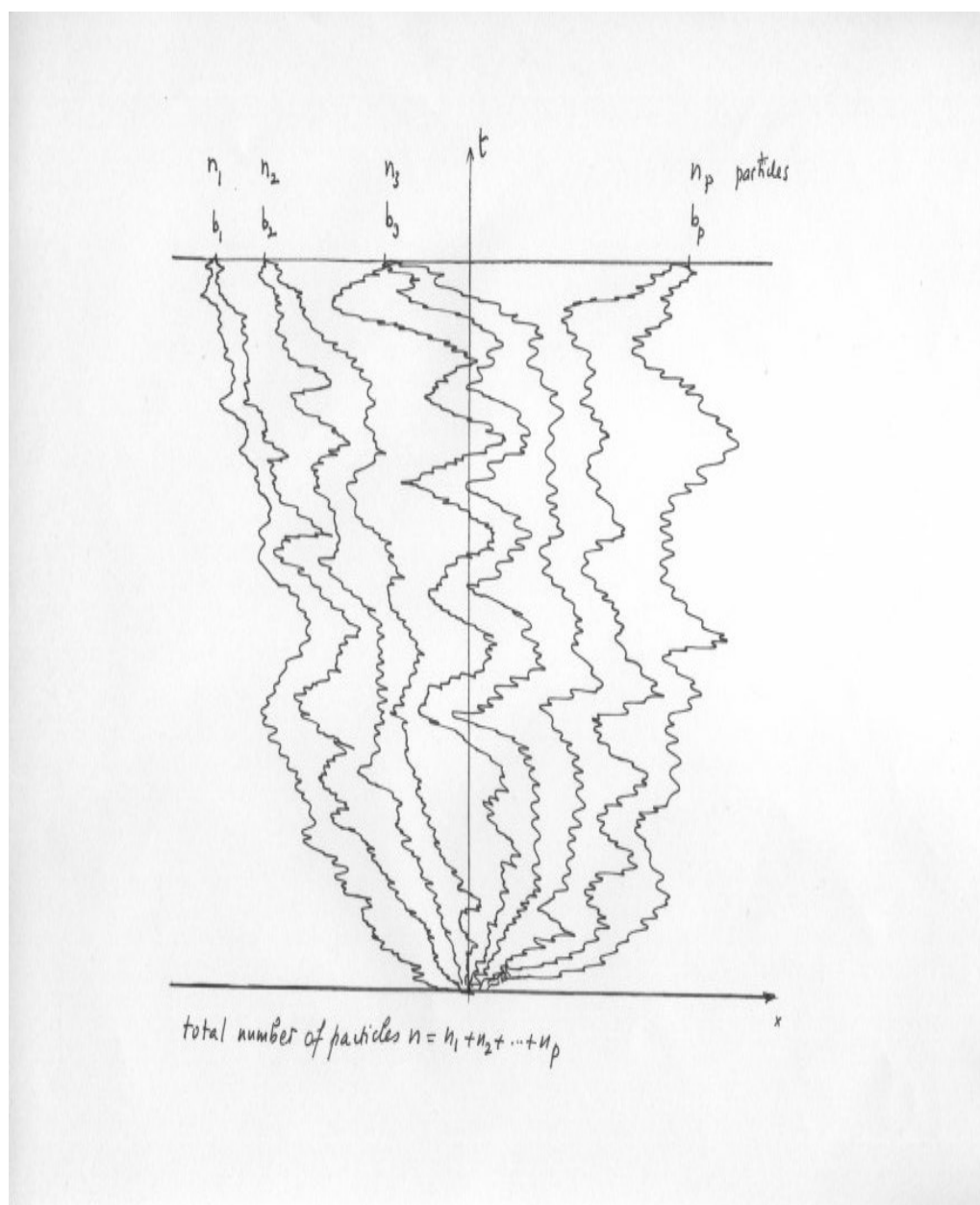


Figure 1
(mouvements browniens contraints)

alors la probabilité de transition recherchée s'écrit :

$$\mathbb{P}_{Br} \left(x(t) \in \tilde{E} \left| \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \text{et } x(1) = \beta \end{array} \right. \right) = \frac{1}{Z} \int_{\tilde{E}} p(t, 0, x) p(1-t, x, \beta) dx, \quad (6.2)$$

avec Z un coefficient de normalisation.

Dans le cas de n mouvements browniens sur $\mathbb{R}$ qui ne s'intersectent pas, Karlin et McGregor ont montré que l'intégrand dans (6.2) devait être remplacé par un produit de deux *déterminants*, de sorte que la probabilité de transition s'écrit (voir [28]) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\text{tous les } x_j(t) \in \tilde{E} \left| \begin{array}{l} x_j(0) = \gamma_j, \quad x_j(1) = \delta_j, \\ \text{pour } j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\tilde{E}^n} \det(p(t, \gamma_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \det(p(1-t, x_i, \delta_j))_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{i=1}^n dx_i, \end{aligned} \quad (6.3)$$

et pour retrouver la situation qui nous intéresse, il suffit de prendre la limite de (6.3) lorsque les $\gamma_j \rightarrow 0$, et lorsque $\delta_1, \dots, \delta_{n_1} \rightarrow \beta_1$; $\delta_{n_1+1}, \dots, \delta_{n_1+n_2} \rightarrow \beta_2$; $\dots$; $\delta_{n-n_p+1}, \dots, \delta_n \rightarrow \beta_p$.

Cette formule, dite de Karlin-McGregor, joue un rôle fondamental dans ce qui suit, car elle permet de relier le problème de mouvements browniens à la théorie des matrices aléatoires. En effet, en travaillant un peu l'expression (6.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\text{tous les } x_j(t) \in \tilde{E} \left| \begin{array}{l} x_j(0) = 0, \quad x_j(1) = \delta_j, \\ \text{pour } j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{Z'_n} \int_{\tilde{E}^n} \left(\prod_{i=1}^n dx_i \right) \Delta_n(x) \left[\det \left(e^{\frac{2x_i \delta_j}{1-t}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{t(1-t)}} \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\text{tous les } x_j(t) \in \tilde{E} \left| \begin{array}{l} x_j(0) = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ x_1(1) = \dots = x_{n_1}(1) = \beta_1, \\ \vdots \\ x_{n-n_p+1}(1) = \dots = x_n(1) = \beta_p \end{array} \right. \right) \\ &= \frac{1}{Z''_n} \int_{\tilde{E}^n} \Delta_n(x) \prod_{\ell=1}^p \left(\Delta_{n_\ell}(x^{(\ell)}) \prod_{i=1}^{n_\ell} e^{-\frac{x_i^{(\ell)2}}{t(1-t)} + \frac{2\beta_\ell x_i^{(\ell)}}{1-t}} \right) \prod_{i=1}^n dx_i \\ &= \frac{1}{Z'''_n} \int_{E^n} \Delta_n(v) \prod_{\ell=1}^p \left(\Delta_{n_\ell}(v^{(\ell)}) \prod_{i=1}^{n_\ell} e^{-\frac{1}{2}v_i^{(\ell)2} + b_\ell v_i^{(\ell)}} \right) \prod_{i=1}^n dv_i \\ &=: \frac{1}{Z'''_n} \int_{E^n} I_n(v) dv, \end{aligned} \quad (6.5)$$

où l'on a fait l'identification naturelle :

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \left(\underbrace{x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}}_{x^{(1)}}, \dots, \underbrace{x_1^{(p)}, \dots, x_{n_p}^{(p)}}_{x^{(p)}} \right). \quad (6.6)$$

Remarquons que, dans la deuxième égalité de (6.5), nous avons effectué les changements de variables :

$$v_i^{(\ell)} = \sqrt{\frac{2}{t(1-t)}} x_i^{(\ell)} \quad ; \quad E = \sqrt{\frac{2}{t(1-t)}} \tilde{E} \quad ; \quad b_\ell = \sqrt{\frac{2t}{1-t}} \beta_\ell. \quad (6.7)$$

Maintenant, on reconnaît dans l'expression finale de (6.5) la probabilité qu'une matrice aléatoire $n \times n$ hermitienne M ait son spectre entièrement contenu dans E , si cette matrice appartient à l'ensemble *gaussien déformé par une source externe*, caractérisé par la mesure²² :

$$\frac{1}{\tilde{Z}_n} e^{-\text{Tr} \left(\frac{M^2}{2} - AM \right)} dM, \quad (6.8)$$

dans lequel A est la matrice diagonale fixe :

$$A := \text{diag} \left(\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{b_p, \dots, b_p}_{n_p} \right). \quad (6.9)$$

Pour le voir, nous utilisons (1.6) ainsi qu'une formule bien connue due à Harish-Chandra-Itzykson-Zuber, qui permet d'intégrer la contribution de la source externe sur le groupe unitaire $U(n)$. Plus précisément, cela donne, si $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{Z}_n} \int_{\text{spec}(M) \in E} e^{-\text{Tr} \left(\frac{M^2}{2} - AM \right)} dM \\ &= \frac{1}{\tilde{Z}_n} \int_{E^n} \Delta_n^2(\lambda) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda_i^2}{2}} d\lambda_i \int_{U(n)} e^{\text{Tr}(AU DU^{-1})} dU \\ &= \frac{1}{\tilde{Z}_n''} \int_{E^n} \Delta_n^2(\lambda) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda_i^2}{2}} d\lambda_i \left[\frac{\det(e^{\alpha_i \lambda_j})_{1 \leq i, j \leq n}}{\Delta_n(\lambda) \Delta_n(\alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{\tilde{Z}_n'''} \int_{E^n} \Delta_n(\lambda) \left(\det(e^{\alpha_i \lambda_j})_{1 \leq i, j \leq n} \right) \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda_i^2}{2}} d\lambda_i, \end{aligned} \quad (6.10)$$

ce qui, lorsque $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1} \rightarrow b_1 ; \dots ; \alpha_{n-n_p+1}, \dots, \alpha_n \rightarrow b_p$, coïncide bien avec le résultat trouvé en (6.5). Le modèle matriciel gaussien avec source

²²Notons que si $A \neq 0$, cette mesure n'est *pas* invariante sous transformation unitaire.

et le modèle de mouvements browniens contraints sont donc reliés par les changements de variables (6.7).

Ensuite, il s'avère que les calculs sont à peine plus compliqués lorsqu'on généralise ce qui vient d'être dit aux *probabilités jointes* des mouvements browniens contraints, ne s'intersectant pas, pour m temps distincts. Dans ce cas, la formule de Karlin-McGregor (voir [28]) prend la forme :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_j(t_k) \in \tilde{E}_k \right\} \mid \begin{array}{l} x_j(0) = \gamma_j, \quad x_j(1) = \delta_j, \\ \text{pour } j = 1, \dots, n \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\tilde{E}_1^n} \prod_{i=1}^n dx_i^{(1)} \int_{\tilde{E}_2^n} \prod_{i=1}^n dx_i^{(2)} \dots \int_{\tilde{E}_m^n} \prod_{i=1}^n dx_i^{(m)} \det \left(p(t_1 - t_0, \gamma_i, x_j^{(1)}) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ & \times \det \left(p(t_2 - t_1, x_i^{(1)}, x_j^{(2)}) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \dots \det \left(p(t_{m+1} - t_m, x_i^{(m)}, \delta_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned} \quad (6.11)$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1$, et où, pour rappel, $p(t, x, y)$ désigne la densité (6.1). Afin de raccourcir les expressions, il est commode de poser, pour $1 \leq k \leq m$:

$$\tau_k := (t_{k+1} - t_k) \quad ; \quad \frac{1}{\sigma_k} := \frac{1}{(t_k - t_{k-1})} + \frac{1}{(t_{k+1} - t_k)}. \quad (6.12)$$

Le calcul se poursuit alors comme ceci :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_j(t_k) \in \tilde{E}_k \right\} \mid \begin{array}{l} x_j(0) = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ x_1(1) = \dots = x_{n_1}(1) = \beta_1, \\ \vdots \\ x_{n-n_p+1}(1) = \dots = x_n(1) = \beta_p \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{Z'_n} \int_{\prod_{k=1}^m \tilde{E}_k^n} \Delta_n(x_1) \prod_{\ell=1}^p \left(\Delta_{n_\ell}(x_m^{(\ell)}) \prod_{i=1}^{n_\ell} e^{-\sum_{k=1}^m \frac{x_{k;i}^{(\ell)2}}{\sigma_k} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2x_{k;i}^{(\ell)} x_{k+1;i}^{(\ell)}}{\tau_k} + \frac{2\beta_\ell x_{m;i}^{(\ell)}}{\tau_m}} \right) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} dx_{k;i} \\ &= \frac{1}{Z''_n} \int_{\prod_{k=1}^m E_k^n} \Delta_n(v_1) \prod_{\ell=1}^p \left(\Delta_{n_\ell}(v_m^{(\ell)}) \prod_{i=1}^{n_\ell} e^{-\sum_{k=1}^m \frac{1}{2} v_{k;i}^{(\ell)2} + \sum_{k=1}^{m-1} c_k v_{k;i}^{(\ell)} v_{k+1;i}^{(\ell)} + b_\ell v_{m;i}^{(\ell)}} \right) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} dv_{k;i} \\ &=: \frac{1}{Z''_n} \int_{\prod_{k=1}^m E_k^n} I_n(v) \prod_{k=1}^m dv_k, \end{aligned} \quad (6.13)$$

où, par exemple, $\Delta_n(x_1)$ représente le déterminant de Vandermonde associé

seulement à $x_1 = (x_{1;1}, x_{1;2}, \dots, x_{1;n})$. Ci-dessus, nous avons défini :

$$v_{k;i}^{(\ell)} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_k}} x_{k;i}^{(\ell)} = \sqrt{\frac{2 (t_{k+1} - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) (t_{k+1} - t_k)}} x_{k;i}^{(\ell)}, \quad (6.14)$$

$$c_k = \frac{\sqrt{\sigma_k \sigma_{k+1}}}{\tau_k} = \sqrt{\frac{(t_{k+2} - t_{k+1}) (t_k - t_{k-1})}{(t_{k+2} - t_k) (t_{k+1} - t_{k-1})}}, \quad (6.15)$$

$$E_k = \sqrt{\frac{2}{\sigma_k}} \tilde{E}_k = \sqrt{\frac{2 (t_{k+1} - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) (t_{k+1} - t_k)}} \tilde{E}_k, \quad (6.16)$$

$$b_\ell = \frac{\sqrt{2\sigma_m}}{\tau_m} \beta_\ell = \sqrt{\frac{2 (t_m - t_{m-1})}{(1 - t_m) (1 - t_{m-1})}} \beta_\ell. \quad (6.17)$$

Cette fois, nous voyons que (6.13) coïncide avec :

$$\frac{1}{\tilde{Z}_n} \int_{\text{spec}(M_k) \in E_k} e^{-\text{Tr} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{2} M_k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} c_k M_k M_{k+1} - A M_m \right)} \prod_{k=1}^m dM_k. \quad (6.18)$$

Cela signifie que les probabilités jointes à m temps pour les mouvements browniens contraints, correspondent à une chaîne de m matrices aléatoires $n \times n$ hermitiennes, *gaussiennes* et *couplées deux à deux* (les couplages étant assurés par les $(m-1)$ coefficients c_k), la dernière matrice étant en outre *affectée par la matrice source* A donnée en (6.9). Les deux systèmes sont reliés par les changements de variables (6.14) à (6.17).

7 Déformations intégrables et EDP's

Nous allons à présent déduire des équations aux dérivées partielles satisfaites par la probabilité (6.13), vue comme une fonction des “points du bord” des ensembles $E_k := \bigcup_{i=1}^r [z_{2i-1}^{(k)}, z_{2i}^{(k)}]$ ($1 \leq k \leq m$), ainsi que des b_ℓ ($1 \leq \ell \leq p$) et des c_k ($1 \leq k \leq m-1$). Rappelons que ces quantités sont liées aux variables des mouvements browniens, via les transformations (6.14) à (6.17).

Pour cela, nous utiliserons le même genre de technologies que celles que l'on avait appliquées à l'ensemble matriciel GUE (voir section 3), c'est-à-dire que nous allons *déformer* la mesure (6.13) en ajoutant dans l'intégrand un certain nombre de *variables auxiliaires*.

Il se fait que notre méthode ne fonctionnera que si l'on suppose l'existence d'une *relation linéaire* entre les b_ℓ (liés aux *points d'arrivée* β_ℓ des mouve-

ments browniens). Dans la suite, nous noterons²³ : $(b_1^{(1)}, \dots, b_1^{(p)}) \equiv (b_1, \dots, b_p)$. On suppose donc une relation linéaire de la forme :

$$\sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell b_1^{(\ell)} = 0, \quad (7.1)$$

où les coefficients κ_ℓ sont tels que $\kappa_p \neq 0$ et $\sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell = 1$.

Pour $\mathbb{E} := \prod_{k=1}^m E_k$, où chaque E_k est la réunion d'un nombre fini d'intervalles sur $\mathbb{R}$, l'intégrale non déformée qu'il nous faut considérer est donc :

$$\tau_n(\mathbb{E}) := \int_{\mathbb{E}^n} I_n(v) \Big|_{\sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell b_1^{(\ell)} = 0} \prod_{k=1}^m dv_k, \quad (7.2)$$

avec :

$$I_n(v) = \frac{\Delta_n(v_1)}{\prod_{\ell=1}^p n_\ell!} \prod_{\ell=1}^p \left(\Delta_{n_\ell}(v_m^{(\ell)}) \prod_{i=1}^{n_\ell} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m v_{k;i}^{(\ell)2} + \sum_{k=1}^{m-1} c_k v_{k;i}^{(\ell)} v_{k+1;i}^{(\ell)} + b_1^{(\ell)} v_{m;i}^{(\ell)}} \right). \quad (7.3)$$

Nous définissons ensuite la fonction déformée $\tilde{\tau}_n(\mathbb{E})$ par :

$$\tilde{\tau}_n(\mathbb{E}) := \int_{\mathbb{E}^n} \tilde{I}_n(v) \Big|_{\sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell b_{1,2}^{(\ell)} = 0} \prod_{k=1}^m dv_k, \quad (7.4)$$

dans laquelle :

$$\tilde{I}_n(v) = I_n(v) \times \prod_{\ell=1}^p \prod_{i=1}^{n_\ell} e^{\sum_{r \geq 1} \left(s_r^{(0)} v_{1,i}^{(\ell)r} - s_r^{(\ell)} v_{m,i}^{(\ell)r} \right) + b_2^{(\ell)} v_{m,i}^{(\ell)2} + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{(r,q) > (1,1)} c_{rq}^{(k)} v_{k,i}^{(\ell)r} v_{k+1,i}^{(\ell)q} + \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{r \geq 1} \gamma_r^{(k)} v_{k,i}^{(\ell)r}}.$$

Contrairement à ce que nous avons pour l'ensemble GUE (voir (3.3)), les variables auxiliaires introduites ci-dessus sont de plusieurs *types* différents :

- Un premier ensemble désigne les paramètres associés aux variables “temporelles”, jouant un rôle analogue aux t_i dans la hiérarchie KP. Il s'agit des $s_r^{(0)}$ ($r \in \mathbb{N}_0$) correspondant au point de départ $x = 0$ des mouvements browniens, et des $s_r^{(\ell)}$ ($r \in \mathbb{N}_0$), correspondant au ℓ -ième point d'arrivée des mouvements browniens ($1 \leq \ell \leq p$).

²³en effet, nous allons aussi considérer des variables $b_2^{(\ell)}$ ($1 \leq \ell \leq p$) qui, elles, vont correspondre à des variables auxiliaires.

- Un deuxième ensemble, constitué de $b_2^{(1)}, \dots, b_2^{(p)}$, est une déformation des $b_1^{(\ell)}$. On suppose qu'ils sont soumis à la même contrainte (7.1) que les $b_1^{(\ell)}$, à savoir :

$$\sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell b_2^{(\ell)} = 0. \quad (7.5)$$

- Un troisième ensemble est formé des paramètres $c_{rq}^{(k)}$ (avec $(r, q) > (1, 1)$), accompagnant les temps consécutifs t_k, t_{k+1} , pour $1 \leq k \leq m-1$.
- Finalement, un quatrième ensemble contient des paramètres $\gamma_r^{(k)}$ ($r \in \mathbb{N}_0$), associés à chacun des temps intermédiaires t_k , pour $2 \leq k \leq m-1$.

Bien entendu, les fonctions (7.2) et (7.4) coïncident si on les évalue sur le lieu où toutes les déformations s'annulent. Ce lieu $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{array}{l} s_r^{(0)}, \dots, s_r^{(p)} = 0, \quad r \in \mathbb{N}_0, \\ b_2^{(1)}, \dots, b_2^{(p)} = 0, \\ c_{rq}^{(1)}, \dots, c_{rq}^{(m-1)} = 0, \quad (r, q) > (1, 1) \\ \gamma_r^{(2)}, \dots, \gamma_r^{(m-1)} = 0, \quad r \in \mathbb{N}_0, \end{array} \right\}. \quad (7.6)$$

Dans les pages qui suivent, nous établirons que (7.4), d'une part, est une *fonction tau* satisfaisant la *hiérarchie intégrable de KP* à $(p+1)$ composantes, qui est elle-même une vaste généralisation de la hiérarchie KP donnée en (3.21), et, d'autre part, qu'elle vérifie également des *contraintes de Virasoro*. Nous ne donnerons pas le détail de tous les calculs (ce qui, d'ailleurs, prendrait facilement plusieurs dizaines de pages), renvoyant pour cela le lecteur à [10] ainsi qu'à notre article [2].

Pour rappel, un ingrédient important intervenant dans la démonstration que (3.3) satisfaisait la hiérarchie KP, était que la *fonction tau* pouvait s'écrire comme le déterminant de la matrice des moments (3.8). On peut se demander s'il est également possible d'exprimer (7.4) de cette manière. La réponse est affirmative, à ceci près qu'il s'agit cette fois du déterminant d'une matrice des moments *divisée en blocs*, chaque bloc étant associé à un *poids différent*. En effet, en utilisant l'*identité de Cauchy-Binet* :

$$\det (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \det (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{\sigma \in S_n} \det (a_{i, \sigma(j)} b_{j, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \quad (7.7)$$

sur les produits de déterminants de Vandermonde apparaissant dans (7.3) et (7.4), on montre que :

$$\tilde{\tau}_n(\mathbb{E}) = \det \begin{pmatrix} (\langle y^i \varphi_1(y) | x^j \psi(x) \rangle)_{\substack{0 \leq i < n_1 \\ 0 \leq j < n}} \\ \vdots \\ (\langle y^i \varphi_p(y) | x^j \psi(x) \rangle)_{\substack{0 \leq i < n_p \\ 0 \leq j < n}} \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

avec :

$$\psi(x) := \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \sum_{r \geq 1} s_r^{(0)} x^r \right), \quad (7.9)$$

$$\varphi_\ell(y) := \exp \left(-\frac{y^2}{2} + b_1^{(\ell)} y + b_2^{(\ell)} y^2 - \sum_{r \geq 1} s_r^{(\ell)} y^r \right), \quad (7.10)$$

pour $1 \leq \ell \leq p$. Ici, le produit interne $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est défini par :

$$\langle f(y) | g(x) \rangle := \iint_{E_1 \times E_m} f(y) g(x) \mu(x, y) dx dy, \quad (7.11)$$

où $\mu(x, y)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \mu(x, y) := & \int_{\prod_{k=2}^{m-1} E_k} \exp \sum_{k=2}^{m-1} \left(-\frac{w_k^2}{2} + \sum_{r \geq 1} \gamma_r^{(k)} w_k^r \right) \times \\ & \exp \sum_{k=1}^{m-1} \left(c_k w_k w_{k+1} + \sum_{(r,q) > (1,1)} c_{rq}^{(k)} w_k^r w_{k+1}^q \right) \prod_{k=2}^{m-1} dw_k. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Il y a $(m-2)$ variables d'intégration dans (7.12), et il faut poser $w_1 = x$ et $w_m = y$. Si $m = 2$, cette formule doit être interprétée comme $\mu(x, y) := 1$, tandis que si $m = 1$, il faut l'interpréter comme $\mu(x, y) := \delta(x - y) e^{x^2/2}$ (la distribution delta de Dirac).

7.1 La hiérarchie KP à (p+q) composantes

Nous considérons maintenant une situation très générale, dont (7.8) peut être vu comme un cas particulier, en prenant $q = 1$.

Soient deux ensembles de *poids* $\psi_1(x), \dots, \psi_q(x)$ et $\varphi_1(y), \dots, \varphi_p(y)$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Ensuite, déformons chacun de ces poids à l'aide de paramètres “temporels” $s_\alpha = (s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots)$, $1 \leq \alpha \leq q$, et $t_\beta = (t_{\beta_1}, t_{\beta_2}, \dots)$, $1 \leq \beta \leq p$, de sorte que :

$$\psi_\alpha^{(-s)}(x) := \psi_\alpha(x) e^{-\sum_{k=1}^{\infty} s_{\alpha_k} x^k} \quad ; \quad \varphi_\beta^{(t)}(y) := \varphi_\beta(y) e^{\sum_{k=1}^{\infty} t_{\beta_k} y^k}. \quad (7.13)$$

Pour les ensembles d'entiers positifs $m = (m_1, \dots, m_q)$ et $n = (n_1, \dots, n_p)$, tels que²⁴ $|m| = |n|$, nous définissons la fonction τ_{mn} comme le déterminant d'une matrice des moments constituée de pq blocs, de la façon suivante :

$$\tau_{mn}(s_1, \dots, s_q; t_1, \dots, t_p) := \det \begin{pmatrix} T_{mn}^{11} & \dots & T_{mn}^{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{mn}^{q1} & \dots & T_{mn}^{qp} \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

avec, pour $1 \leq k \leq q$ et $1 \leq l \leq p$:

$$T_{mn}^{kl} := \left(\langle x^i \psi_k^{(-s)}(x) \mid y^j \varphi_l^{(t)}(y) \rangle \right)_{\substack{0 \leq i < m_k \\ 0 \leq j < n_l}}, \quad (7.15)$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne un certain produit interne.

Notre but est d'établir que τ_{mn} satisfait *une identité bilinéaire*, analogue à (3.17) dans le cas de la fonction τ_n donnée en (3.3). Dans la section 3, nous avons vu que l'équation (3.17) émergeait parce qu'en introduisant²⁵ les “*shifts*” $\tau_n(t \pm [z^{-1}])$, ceux-ci pouvaient s'exprimer en termes des *polynômes orthonormaux* $p_n(t, z)$ par rapport au poids déformé, ainsi que leurs *transformées de Cauchy* : voir (3.15) et (3.16). L'identité bilinéaire (3.17) est alors interprétée comme une conséquence directe de l'orthogonalité des $p_n(t, z)$.

Ici, en ce qui concerne la fonction τ_{mn} , nous introduisons également des “*shifts*” $\pm[z^{-1}]$ dans les arguments s_α et t_β , mais aussi des “*shifts*” (± 1) au niveau des indices $m = (m_1, \dots, m_q)$ et $n = (n_1, \dots, n_p)$. Il est alors possible de montrer que les fonctions ainsi modifiées peuvent s'exprimer en termes de polynômes orthogonaux dans un sens généralisé, que l'on appelle des *polynômes orthogonaux multiples* (MOP's), et de leurs *transformées de Cauchy*.

²⁴où $|m| := \sum_{\alpha=1}^q m_\alpha$ et $|n| := \sum_{\beta=1}^p n_\beta$.

²⁵pour rappel, si $z \in \mathbb{C}$, on définit : $[z^{-1}] := \left(z^{-1}, \frac{z^{-2}}{2}, \frac{z^{-3}}{3}, \frac{z^{-4}}{4}, \dots \right)$.

Les polynômes orthogonaux multiples (normalisés) se présentent sous deux *types* différents, qui sont définis de la manière suivante, par rapport aux ensembles de *poids* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ et $\{\psi_1, \dots, \psi_q\}$.

Soient $A_1(y), A_2(y), \dots, A_p(y)$ des polynômes en y .

- Les polynômes $A_1(y), \dots, A_p(y)$ sont appelés des *polynômes orthogonaux multiples (MOP's) de type I* par rapport à ψ_α ($1 \leq \alpha \leq q$), si $\deg(A_\beta) < n_\beta$ pour $1 \leq \beta \leq p$, et si, de plus, on a les relations d'orthogonalité :

$$\left\langle x^i \psi_{\alpha'}(x) \left| \sum_{k=1}^p A_k(y) \varphi_k(y) \right. \right\rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{i, m_{\alpha'} - 1} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq m_{\alpha'} - 1 \\ 1 \leq \alpha' \leq q \end{cases} \quad (7.16)$$

- Les polynômes $A_1(y), \dots, A_p(y)$ sont appelés des *polynômes orthogonaux multiples (MOP's) de type II* par rapport à φ_β ($1 \leq \beta \leq p$), si A_β est un polynôme *monique* de degré n_β et si $\deg(A_{\beta'}) < n_{\beta'}$ pour $1 \leq \beta' \leq p$ avec $\beta' \neq \beta$, et si, de plus, nous avons les relations d'orthogonalité :

$$\left\langle x^i \psi_\alpha(x) \left| \sum_{k=1}^p A_k(y) \varphi_k(y) \right. \right\rangle = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq m_\alpha - 1 \\ 1 \leq \alpha \leq q \end{cases} \quad (7.17)$$

Les polynômes orthogonaux multiples ont été introduits, entre autres, par Aptekarev, Bleher, Kuijlaars et Van Assche (voir [11], [14], [29]). Dans [29], ils ont été appliqués par Daems et Kuijlaars à l'étude de mouvements browniens qui ne s'intersectent pas.

La Proposition ci-dessous précise le lien entre la fonction τ_{mn} définie en (7.14) et ce type de polynômes.

Proposition 7.1 (Adler - Vanhaecke - van Moerbeke [10])

En introduisant des “shifts” dans la fonction τ_{mn} donnée en (7.14), on obtient des polynômes (dépendant de s_α et t_β) satisfaisant certaines relations d'orthogonalité, qui les font reconnaître comme des polynômes orthogonaux multiples de type I ou de type II.

Dans un souci de clarté, nous présentons ces résultats sous la forme de quatre séries d'identités. Les deux premières correspondent à des polynômes orthogonaux multiples Q et P , de type II et I respectivement, tandis que les deux dernières concernent les transformées de Cauchy de ces polynômes.

- Premier type d'identités²⁶ :

$$z^{n_\beta} \frac{\tau_{mn}(t_\beta - [z^{-1}])}{\tau_{mn}} := Q_{mn}^{(\beta, \beta)}(z) = z^{n_\beta} + \dots, \quad (7.18)$$

$$\epsilon_{\beta\beta'}(n) z^{n_{\beta'}-1} \frac{\tau_{m, n+e_\beta-e_{\beta'}}(t_{\beta'} - [z^{-1}])}{\tau_{mn}} := Q_{mn}^{(\beta, \beta')}(z), \quad \begin{cases} \text{de degré} < n_{\beta'} \\ \text{pour } \beta' \neq \beta, \end{cases} \quad (7.19)$$

ce qui vérifie les relations d'orthogonalité :

$$\left\langle x^i \psi_\alpha^{(-s)}(x) \left| \sum_{\beta'=1}^p Q_{mn}^{(\beta, \beta')}(y) \varphi_{\beta'}^{(t)}(y) \right. \right\rangle = 0 \quad \text{pour } \begin{cases} 1 \leq \alpha \leq q \\ 0 \leq i \leq m_\alpha - 1. \end{cases} \quad (7.20)$$

- Deuxième type d'identités²⁷ :

$$\epsilon_{\beta\alpha}(n, m) z^{m_\alpha-1} \frac{\tau_{m-e_\alpha, n-e_\beta}(s_\alpha + [z^{-1}])}{\tau_{mn}} := P_{nm}^{*(\beta, \alpha)}(z), \quad \text{de degré} < m_\alpha, \quad (7.21)$$

ce qui vérifie les relations d'orthogonalité :

$$\begin{cases} \left\langle \sum_{\alpha=1}^q P_{nm}^{*(\beta, \alpha)}(x) \psi_\alpha^{(-s)}(x) \left| y^j \varphi_{\beta'}^{(t)}(y) \right. \right\rangle = 0 & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq \beta' \leq p, \\ 0 \leq j \leq n_{\beta'} - 1, \\ \text{sauf } \beta' = \beta, j = n_\beta - 1 \end{cases} \\ \left\langle \sum_{\alpha=1}^q P_{nm}^{*(\beta, \alpha)}(x) \psi_\alpha^{(-s)}(x) \left| y^{n_\beta-1} \varphi_\beta^{(t)}(y) \right. \right\rangle = 1. \end{cases} \quad (7.22)$$

- Troisième type d'identités :

Les expressions suivantes sont des transformées de Cauchy des polynômes obtenus en (7.21) :

$$z^{-n_\beta} \frac{\tau_{mn}(t_\beta + [z^{-1}])}{\tau_{mn}} = \left\langle \sum_{\alpha=1}^q P_{nm}^{*(\beta, \alpha)}(x) \psi_\alpha^{(-s)}(x) \left| \frac{\varphi_\beta^{(t)}(y)}{z-y} \right. \right\rangle, \quad (7.23)$$

$$\epsilon_{\beta\beta'}(n) z^{-n_{\beta'}-1} \frac{\tau_{m, n+e_{\beta'}-e_\beta}(t_{\beta'} + [z^{-1}])}{\tau_{mn}} = \left\langle \sum_{\alpha=1}^q P_{nm}^{*(\beta, \alpha)}(x) \psi_\alpha^{(-s)}(x) \left| \frac{\varphi_{\beta'}^{(t)}(y)}{z-y} \right. \right\rangle. \quad (7.24)$$

²⁶où $n \pm e_\ell := (n_1, \dots, n_{\ell-1}, n_\ell \pm 1, n_{\ell+1}, \dots, n_p)$ et $\epsilon_{\beta\beta'}(n) := (-1)^{n_{\beta'}+1+n_{\beta'}+2+\dots+n_\beta+1}$ si $\beta > \beta'$ et $\epsilon_{\beta\beta'}(n) := (-1)^{n_{\beta+1}+n_{\beta+2}+\dots+n_{\beta'}}$ si $\beta < \beta'$.

²⁷où $\epsilon_{\alpha\beta}(n, m) := (-1)^{m_1+\dots+m_\alpha} (-1)^{n_1+\dots+n_\beta}$.

- Quatrième type d'identités :

Les expressions suivantes sont des transformées de Cauchy des polynômes obtenus en (7.18) et (7.19) :

$$\epsilon_{\alpha\beta}(m, n) z^{-m_\alpha-1} \frac{\tau_{m+e_\alpha, n+e_\beta}(s_\alpha - [z^{-1}])}{\tau_{mn}} = \left\langle \frac{\psi_\alpha^{(-s)}(x)}{z-x} \middle| \sum_{\beta'=1}^p Q_{mn}^{(\beta, \beta')}(y) \varphi_{\beta'}^{(t)}(y) \right\rangle. \quad (7.25)$$

■

A partir de là, il est possible de déduire une identité bilinéaire généralisant l'équation (3.17). C'est le contenu de la Proposition suivante.

Proposition 7.2 (Adler - Vanhaecke - van Moerbeke [10])

Pour tous $s, t, s^*, t^* \in \mathbb{C}^\infty$, et pour tous m, n, m^*, n^* tels que $|m| = |n|$ et $|m^*| = |n^*|$, nous avons :

$$\oint_{z=\infty} W_{mn}(z; s, t) W_{m^*n^*}^*(z; s^*, t^*)^T dz = 0, \quad (7.26)$$

où W_{mn} et $W_{m^*n^*}^*$ sont deux matrices de taille $(p+q) \times (p+q)$, que nous ne détaillerons pas mais dont les entrées peuvent s'exprimer en termes de la fonction τ_{mn} modifiée par des "shifts" (comparer avec (3.17)).

En fait, en écrivant (7.26) composante par composante, on peut montrer que cette identité bilinéaire est équivalente à l'identité :

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^p \oint_{\infty} (-1)^{\sigma_\beta(n)} \tau_{m, n-e_\beta}(t_\beta - [z^{-1}]) \tau_{m^*, n^*+e_\beta}(t_\beta^* + [z^{-1}]) e^{\sum_{k=1}^\infty (t_{\beta_k} - t_{\beta_k}^*) z^k} z^{n_\beta - n_\beta^* - 2} dz \\ &= \sum_{\alpha=1}^q \oint_{\infty} (-1)^{\sigma_\alpha(m)} \tau_{m+e_\alpha, n}(s_\alpha - [z^{-1}]) \tau_{m^*-e_\alpha, n^*}(s_\alpha^* + [z^{-1}]) e^{\sum_{k=1}^\infty (s_{\alpha_k} - s_{\alpha_k}^*) z^k} z^{m_\alpha^* - m_\alpha - 2} dz, \end{aligned} \quad (7.27)$$

dans laquelle $|m^*| = |n^*| + 1$, $|m| = |n| - 1$, $\sigma_\alpha(m) := \sum_{\alpha'=1}^\alpha (m_{\alpha'} - m_{\alpha'}^*)$ et $\sigma_\beta(n) := \sum_{\beta'=1}^\beta (n_{\beta'} - n_{\beta'}^*)$. ■

La hiérarchie KP à $(p+q)$ composantes apparaît alors comme un corollaire de (7.27). En effet :

Proposition 7.3 (Adler - Vanhaecke - van Moerbeke [10])

En calculant explicitement les résidus dans les intégrales de (7.27), il s'ensuit que la fonction τ_{mn} donnée en (7.14) vérifie :

$$\tau_{mn}^2 \frac{\partial^2}{\partial t_{\beta_{\ell+1}} \partial t_{\beta'_1}} \ln \tau_{mn} = \mathfrak{s}_{\ell+2\delta_{\beta\beta'}} \left(\tilde{\partial}_{t_\beta} \right) \tau_{m,n+e_\beta-e_{\beta'}} \circ \tau_{m,n+e_{\beta'}-e_\beta}, \quad (7.28)$$

$$\tau_{mn}^2 \frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha_{\ell+1}} \partial s_{\alpha'_1}} \ln \tau_{mn} = \mathfrak{s}_{\ell+2\delta_{\alpha\alpha'}} \left(\tilde{\partial}_{s_\alpha} \right) \tau_{m+e_{\alpha'}-e_\alpha,n} \circ \tau_{m+e_\alpha-e_{\alpha'},n}, \quad (7.29)$$

$$\tau_{mn}^2 \frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha_1} \partial t_{\beta_{\ell+1}}} \ln \tau_{mn} = -\mathfrak{s}_\ell \left(\tilde{\partial}_{t_\beta} \right) \tau_{m+e_\alpha,n+e_\beta} \circ \tau_{m-e_\alpha,n-e_\beta}, \quad (7.30)$$

$$\tau_{mn}^2 \frac{\partial^2}{\partial t_{\beta_1} \partial s_{\alpha_{\ell+1}}} \ln \tau_{mn} = -\mathfrak{s}_\ell \left(\tilde{\partial}_{s_\alpha} \right) \tau_{m-e_\alpha,n-e_\beta} \circ \tau_{m+e_\alpha,n+e_\beta}. \quad (7.31)$$

Ici, nous avons adopté les mêmes notations que dans la section 3. En particulier, les polynômes de Schur élémentaires $\mathfrak{s}_k(t)$ sont définis en (3.20), et le symbole de Hirota en (3.19).

Rappelons également que $\mathfrak{s}_k(\tilde{\partial}_{t_\beta}) := \mathfrak{s}_k \left(\frac{\partial}{\partial t_{\beta_1}}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{\beta_2}}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_{\beta_3}}, \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t_{\beta_4}}, \dots \right)$.

En combinant les relations (7.28) à (7.31), on peut obtenir des équations qui ne contiennent plus que la seule fonction τ_{mn} (sans “shifts”) :

$$\frac{\partial}{\partial t_{\beta'_1}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial t_{\beta_2} \partial t_{\beta'_1}} \ln \tau_{mn}}{\frac{\partial^2}{\partial t_{\beta_1} \partial t_{\beta'_1}} \ln \tau_{mn}} \right) + \frac{\partial}{\partial t_{\beta_1}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial t_{\beta'_2} \partial t_{\beta_1}} \ln \tau_{mn}}{\frac{\partial^2}{\partial t_{\beta'_1} \partial t_{\beta_1}} \ln \tau_{mn}} \right) = 0, \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_{\alpha'_1}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha_2} \partial s_{\alpha'_1}} \ln \tau_{mn}}{\frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha_1} \partial s_{\alpha'_1}} \ln \tau_{mn}} \right) + \frac{\partial}{\partial s_{\alpha_1}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha'_2} \partial s_{\alpha_1}} \ln \tau_{mn}}{\frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha'_1} \partial s_{\alpha_1}} \ln \tau_{mn}} \right) = 0, \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_{\alpha_1}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial t_{\beta_2} \partial s_{\alpha_1}} \ln \tau_{mn}}{\frac{\partial^2}{\partial t_{\beta_1} \partial s_{\alpha_1}} \ln \tau_{mn}} \right) + \frac{\partial}{\partial t_{\beta_1}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha_2} \partial t_{\beta_1}} \ln \tau_{mn}}{\frac{\partial^2}{\partial s_{\alpha_1} \partial t_{\beta_1}} \ln \tau_{mn}} \right) = 0. \quad (7.34)$$

■

Ainsi, ce seront finalement les équations de la Proposition 7.3 qui seront concrètement utilisées à propos de la probabilité de transition des mouvements browniens. En conséquence, il vient :

Proposition 7.4

La fonction $\tilde{\tau}_n = \tilde{\tau}_n(\mathbb{E})$, telle que définie en (7.4) et (7.8), est une “fonction tau” pour la hiérarchie intégrable de KP à $(p+1)$ composantes, et elle satisfait les EDP’s suivantes, pour $1 \leq \ell \leq p$:

$$\frac{\partial}{\partial s_1^{(0)}} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial s_2^{(0)} \partial s_1^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n}{\frac{\partial^2}{\partial s_1^{(0)} \partial s_1^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial s_1^{(0)} \partial s_2^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n}{\frac{\partial^2}{\partial s_1^{(0)} \partial s_1^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n}, \quad (7.35)$$

avec $n \pm e_\ell = (n_1, \dots, n_p) \pm e_\ell := (n_1, \dots, n_{\ell-1}, n_\ell \pm 1, n_{\ell+1}, \dots, n_p)$. ■

7.2 Les contraintes de Virasoro

La fonction $\tilde{\tau}_n(\mathbb{E})$ satisfait aussi, et de façon très générale, des *contraintes de Virasoro*.

Associés aux opérateurs “spatiaux” élémentaires :

$$\partial_{E_k} := \sum_{i=1}^{2r} \frac{\partial}{\partial z_i^{(k)}} \quad , \quad \varepsilon_{E_k} := \sum_{i=1}^{2r} z_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial z_i^{(k)}} \quad , \quad (7.36)$$

$$\partial_{b_k}^{(\ell)} := \sum_{i=1}^{p-1} (\kappa_\ell - \delta_{\ell,i}) \frac{\partial}{\partial b_k^{(i)}} \quad \left(\text{ce qui entraîne } \sum_{\ell=1}^p \partial_{b_k}^{(\ell)} = 0 \right) \quad , \quad (7.37)$$

ainsi qu’à la *matrice* $\mathcal{J}$ dont la matrice inverse est donnée par :

$$\mathcal{J}^{-1} := \begin{pmatrix} -1 & c_1 & & & \\ & & \ddots & & 0 \\ c_1 & -1 & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -1 & c_{m-1} \\ 0 & & & \ddots & c_{m-1} & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (7.38)$$

nous définissons, pour $1 \leq \ell \leq p$, les opérateurs :

$$\mathcal{B}_1^{(0)} := \sum_{k=1}^m \mathcal{J}_{1k} \partial_{E_k} - 2 \mathcal{J}_{1m} \sum_{i=1}^{p-1} b_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} \quad , \quad (7.39)$$

$$\mathcal{B}_1^{(\ell)} := \partial_{b_1}^{(\ell)} - \kappa_\ell \left(\sum_{k=1}^m \mathcal{J}_{mk} \partial_{E_k} - 2 \mathcal{J}_{mm} \sum_{i=1}^{p-1} b_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} \right) \quad , \quad (7.40)$$

$$\mathcal{B}_2^{(0)} := -\varepsilon_{E_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} + \delta_{1,m} \left(\sum_{i=1}^{p-1} b_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} + 2 \sum_{i=1}^{p-1} b_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_2^{(i)}} \right) \quad , \quad (7.41)$$

$$\mathcal{B}_2^{(\ell)} := \partial_{b_2}^{(\ell)} - \kappa_\ell \left(-\varepsilon_{E_m} + c_{m-1} \frac{\partial}{\partial c_{m-1}} + \sum_{i=1}^{p-1} b_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} + 2 \sum_{i=1}^{p-1} b_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_2^{(i)}} \right) \quad . \quad (7.42)$$

La Proposition suivante indique comment l’action de ces opérateurs sur la *fonction tau* peut être représentée par des expressions dépendant seulement des variables auxiliaires (comparer avec la Proposition 3.5).

Proposition 7.5 (Adler - Delepine - Vanhaecke - van Moerbeke [2])
L'intégrale déformée $\tilde{\tau}_n(\mathbb{E})$, qui a été définie en (7.4) et (7.8), satisfait²⁸, pour $0 \leq \ell \leq p$ et $k = 1, 2$:

$$\mathcal{B}_k^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n = \left(\frac{\partial}{\partial s_k^{(\ell)}} + \kappa_\ell \Sigma_k^{(\ell)} \right) \ln \tilde{\tau}_n + \kappa_\ell T_k^{(\ell)}, \quad (7.43)$$

où les $T_k^{(\ell)}$ sont des quantités données par :

$$T_1^{(\alpha)} = \begin{cases} -\mathcal{J}_{11} n s_1^{(0)} - \mathcal{J}_{1m} \sum_{\ell=1}^p n_\ell (b_1^{(\ell)} - s_1^{(\ell)}) & , \quad \alpha = 0, \\ -\mathcal{J}_{1m} n s_1^{(0)} - \mathcal{J}_{mm} \sum_{\ell=1}^p n_\ell (b_1^{(\ell)} - s_1^{(\ell)}) & , \quad \alpha \neq 0, \end{cases} \quad (7.44)$$

$$T_2^{(\alpha)} = \begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} n_i n_j & , \quad m = 1, \\ n(n+1)/2 & , \quad \alpha = 0 \text{ et } m > 1, \\ \sum_{\ell=1}^p n_\ell (n_\ell + 1)/2 & , \quad \alpha \neq 0 \text{ et } m > 1, \end{cases} \quad (7.45)$$

et où chaque $\Sigma_k^{(\ell)}$ est un opérateur différentiel du premier ordre, homogène, pouvant dépendre de tous les paramètres de déformation (excepté $b_2^{(\ell)}$), de sorte que $\Sigma_k^{(\ell)}|_{\mathcal{L}} = 0$ lorsqu'on les évalue sur le lieu (7.6). De plus, pour $k = 1, 2$ et pour $1 \leq \ell \leq p$, nous avons les relations de commutation :

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}}, \Sigma_k^{(0)} \right] = \delta_{k,2} \delta_{1,m} \frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} \quad ; \quad \left[\frac{\partial}{\partial s_1^{(0)}}, \Sigma_2^{(\ell)} \right] = \delta_{1,m} \frac{\partial}{\partial s_1^{(0)}}. \quad (7.46)$$

Preuve : Il suffit d'appliquer les opérateurs $\mathcal{B}_1^{(0)}, \mathcal{B}_1^{(\ell)}, \mathcal{B}_2^{(0)}$ et $\mathcal{B}_2^{(\ell)}$, tels que définis de (7.39) à (7.42), sur la fonction $\tilde{\tau}_n$, en utilisant diverses identités (valables seulement lorsque l'on agit sur $\tilde{\tau}_n$) qui permettent d'échanger les dérivées "spatiales" contre des dérivées par rapport aux paramètres de déformation. Un calcul tout à fait explicite est effectué dans [2] pour le cas où $m = 1$ et $m = 2$.

²⁸ dans ce qui suit, il est commode de poser : $\kappa_0 = -1$.

Dans ce calcul, les identités suivantes sont également employées, valables dès qu'on agit sur $\tilde{\tau}_n$:

$$\frac{\partial}{\partial b_k^{(\ell)}} = -\frac{\partial}{\partial s_k^{(\ell)}} + \frac{\kappa_\ell}{\kappa_p} \frac{\partial}{\partial s_k^{(p)}}, \quad 1 \leq \ell \leq p-1, \quad k = 1, 2, \quad (7.47)$$

$$\sum_{\ell=1}^p b_j^{(\ell)} \frac{\partial}{\partial s_k^{(\ell)}} = -\sum_{\ell=1}^{p-1} b_j^{(\ell)} \frac{\partial}{\partial b_k^{(\ell)}}, \quad k, j \in \{1, 2\}, \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_k^{(\ell)}} &= -(1 - \delta_{\ell,p}) \frac{\partial}{\partial b_k^{(\ell)}} + \kappa_\ell \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial s_k^{(j)}} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial b_k^{(j)}} \right) \\ &= \partial_{b_k}^{(\ell)} + \kappa_\ell \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial s_k^{(j)}}, \quad 1 \leq \ell \leq p, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (7.49)$$

où, pour $k = 1, 2$ et $1 \leq \ell \leq p$, nous avons (voir (7.37)) :

$$\partial_{b_k}^{(\ell)} := \sum_{j=1}^{p-1} (\kappa_\ell - \delta_{\ell,j}) \frac{\partial}{\partial b_k^{(j)}} = -(1 - \delta_{\ell,p}) \frac{\partial}{\partial b_k^{(\ell)}} + \kappa_\ell \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial b_k^{(j)}}. \quad (7.50)$$

■

La prochaine étape consiste à évaluer les dérivées partielles par rapport aux variables $s_k^{(\ell)}$, *en se restreignant maintenant au lieu $\mathcal{L}$ sur lequel tous les paramètres de déformation s'annulent*. Remarquons d'ailleurs que, sur ce lieu $\mathcal{L}$, les opérateurs (7.39) à (7.42) deviennent :

$$\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} := \sum_{k=1}^m \mathcal{J}_{1k} \partial_{E_k}, \quad \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} := \partial_{b_1}^{(\ell)} - \kappa_\ell \left(\sum_{k=1}^m \mathcal{J}_{mk} \partial_{E_k} \right), \quad (7.51)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} := -\varepsilon_{E_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} + \delta_{1,m} \left(\sum_{i=1}^{p-1} b_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} \right), \quad (7.52)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_2^{(\ell)} := \partial_{b_2}^{(\ell)} - \kappa_\ell \left(-\varepsilon_{E_m} + c_{m-1} \frac{\partial}{\partial c_{m-1}} + \sum_{i=1}^{p-1} b_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} \right), \quad (7.53)$$

pour $1 \leq \ell \leq p$, tandis que les $\hat{T}_2^{(\ell)}$ restent inchangés, que :

$$\hat{T}_1^{(0)} := -\mathcal{J}_{1m} \sum_{\ell=1}^p n_\ell b_1^{(\ell)}, \quad \hat{T}_1^{(\alpha)} := -\mathcal{J}_{mm} \sum_{\ell=1}^p n_\ell b_1^{(\ell)} \quad (7.54)$$

pour $1 \leq \alpha \leq p$, et que les $\hat{\Sigma}_k^{(\ell)}$ s'annulent tous (voir la Proposition 7.5).

Nous trouvons alors les résultats ci-après.

Proposition 7.6 (*Adler - Delepine - Vanhaecke - van Moerbeke [2]*)
Les formules suivantes sont valables sur le lieu $\mathcal{L}$ considéré en (7.6). Pour $0 \leq \ell \leq p$ et $k = 1, 2$:

$$\frac{\partial}{\partial s_k^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n = \hat{\mathcal{B}}_k^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n - \kappa_\ell \hat{T}_k^{(\ell)}, \quad (7.55)$$

tandis que pour $1 \leq \ell \leq p$, nous obtenons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^{(0)} \partial s_1^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n = \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n + n_\ell \mathcal{J}_{1m}, \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2^{(0)} \partial s_1^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n = \left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} + \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n - 2 \mathcal{J}_{1m}^2 \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)}, \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_1^{(0)} \partial s_2^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n &= \left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(\ell)} - \kappa_\ell \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n \\ &\quad - 2 \mathcal{J}_{1m} \left(\mathcal{J}_{mm} \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} + \partial_{b_1}^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \right). \end{aligned} \quad (7.58)$$

Preuve : Les égalités (7.55) sont une conséquence directe de (7.43), lorsqu'on se restreint au lieu $\mathcal{L}$. En revanche, le calcul des dérivées secondes est plus long. En guise d'exemple, nous allons démontrer (7.57) ci-dessous (les égalités (7.56) et (7.58) s'obtenant par des méthodes semblables).

Notons tout d'abord que, en utilisant le fait que :

$$c_1 \frac{\partial \mathcal{J}_{mm}}{\partial c_1} = \begin{cases} 0 & \text{pour } m = 1 \\ -2 \mathcal{J}_{1m}^2 & \text{pour } m > 1 \end{cases}, \quad (7.59)$$

ce qui se montre facilement par récurrence à partir de la définition (7.38) de la matrice $\mathcal{J}$, nous avons :

$$\mathcal{B}_2^{(0)} T_1^{(\ell)} \Big|_{\mathcal{L}} = -c_1 \frac{\partial \mathcal{J}_{mm}}{\partial c_1} \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} - \underbrace{\delta_{1,m} \mathcal{J}_{mm}}_{+\delta_{1,m}} \sum_{i=1}^{p-1} b_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(i)}} \left(\sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \right),$$

si bien que, dans tous les cas (si $m = 1$ ou si $m > 1$), on pourra écrire :

$$\mathcal{B}_2^{(0)} T_1^{(\ell)} \Big|_{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \left(2 \mathcal{J}_{1m}^2 - \delta_{1,m} \right). \quad (7.60)$$

Dès lors, en utilisant successivement (7.40) et (7.41), la Proposition 7.5, l'équation (7.60), le commutateur (7.46) et finalement (7.55), il vient :

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} = \mathcal{B}_2^{(0)} \mathcal{B}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} = \mathcal{B}_2^{(0)} \left(\frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} + \kappa_\ell \Sigma_1^{(\ell)} \right) \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + \kappa_\ell \mathcal{B}_2^{(0)} T_1^{(\ell)} \Big|_{\mathcal{L}} \\
& = \left(\frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} + \kappa_\ell \Sigma_1^{(\ell)} \right) \mathcal{B}_2^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} (2\mathcal{J}_{1m}^2 - \delta_{1,m}) \\
& = \frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial s_2^{(0)}} + \underbrace{\kappa_0 \Sigma_2^{(0)}}_{-\Sigma_2^{(0)}} \right) \ln \tilde{\tau}_n + \kappa_0 T_2^{(0)} \right) \Big|_{\mathcal{L}} + \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} (2\mathcal{J}_{1m}^2 - \delta_{1,m}) \\
& = \frac{\partial^2}{\partial s_1^{(\ell)} \partial s_2^{(0)}} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - \left[\frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}}, \Sigma_2^{(0)} \right] \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} (2\mathcal{J}_{1m}^2 - \delta_{1,m}) \\
& = \frac{\partial^2}{\partial s_1^{(\ell)} \partial s_2^{(0)}} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - \delta_{1,m} \frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} (2\mathcal{J}_{1m}^2 - \delta_{1,m}) \\
& = \frac{\partial^2}{\partial s_1^{(\ell)} \partial s_2^{(0)}} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - \delta_{1,m} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \left(2\mathcal{J}_{1m}^2 - \underbrace{\delta_{1,m} (1 + \mathcal{J}_{mm})}_0 \right).
\end{aligned}$$

■

7.3 EDP pour la probabilité de transition

Nous sommes à présent en mesure de combiner les équations résultant de la hiérarchie intégrable de KP à $(p+1)$ composantes (Proposition 7.4) et les contraintes de Virasoro (Propositions 7.5 et 7.6). L'aspect remarquable de la Proposition 7.6 est précisément d'avoir exprimé les dérivées partielles (premières et secondes) par rapport aux $s_k^{(\ell)}$ sur le lieu $\mathcal{L}$ où tous les paramètres auxiliaires s'annulent, permettant ainsi de déduire une EDP satisfaite par la fonction *non déformée* $\tau_n = \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}}$ et, par extension, une EDP satisfaite par la probabilité originelle (voir (6.13) et (6.18)).

Il reste cependant un problème : le lecteur attentif aura remarqué que $\hat{\mathcal{B}}_2^{(\ell)} = \mathcal{B}_2^{(\ell)} \Big|_{\mathcal{L}}$, donné en (7.53), contient encore l'opérateur $\partial_{b_2}^{(\ell)}$, qui dépend des dérivées partielles par rapport aux $b_2^{(\ell)}$ (qui, pour rappel, font partie des variables auxiliaires). En fin de compte, il conviendra donc d'isoler puis d'éliminer les termes faisant intervenir $\partial_{b_2}^{(\ell)}$.

Proposition 7.7 (Adler - Delepine - Vanhaecke - van Moerbeke [2])

Pour $1 \leq \ell \leq p$, la fonction $X_\ell := \partial_{b_2}^{(\ell)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}}$ vérifie l'équation :

$$\{X_\ell, F_\ell\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}} = \left\{H_\ell^{(1)}, F_\ell\right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}} - \left\{H_\ell^{(2)}, F_\ell\right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)}}, \quad (7.61)$$

dans laquelle $\{f, g\}_X := (Xf)g - f(Xg)$ désigne le wronskien associé aux fonctions f et g et à l'opérateur X , et où l'on a posé :

$$\begin{aligned} F_\ell &:= -\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \mathbb{P}_n - n_\ell \mathcal{J}_{1m}, \\ H_\ell^{(1)} &:= \left(\kappa_\ell (\delta_{1,m} - \varepsilon_m) \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} + 2 \mathcal{J}_{1m} \partial_{b_1}^{(\ell)}\right) \ln \mathbb{P}_n + C_\ell, \\ H_\ell^{(2)} &:= \left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} + \delta_{1,m} + 2 \mathcal{J}_{1m} b_1^{(\ell)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}\right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \mathbb{P}_n, \\ \varepsilon_m &:= \varepsilon_{E_m} - c_{m-1} \frac{\partial}{\partial c_{m-1}} - \sum_{\ell=1}^{p-1} b_1^{(\ell)} \frac{\partial}{\partial b_1^{(\ell)}}, \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$C_\ell := 2 n_\ell \mathcal{J}_{1m} \left(\mathcal{J}_{mm} b_1^{(\ell)} - \sum_{i \neq \ell} \frac{n_i}{b_1^{(\ell)} - b_1^{(i)}} \right). \quad (7.63)$$

Remarquons que le logarithme de la probabilité $\mathbb{P}_n(\mathbb{E})$ est donné par :

$$\ln \mathbb{P}_n(\mathbb{E}) = \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{E}) \Big|_{\mathcal{L}} - \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}}. \quad (7.64)$$

Preuve : En utilisant les contraintes de Virasoro (7.55) sur le lieu $\mathcal{L}$, nous avons, pour $1 \leq \ell \leq p$:

$$\frac{\partial}{\partial s_1^{(0)}} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} \Big|_{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} \Big|_{\mathcal{L}} - 2 \mathcal{J}_{1m} b_1^{(\ell)}, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1^{(\ell)}} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} \Big|_{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} \Big|_{\mathcal{L}} + 2 \kappa_\ell \mathcal{J}_{mm} b_1^{(\ell)}. \quad (7.66)$$

Si nous substituons ces expressions, ainsi que les contraintes de Virasoro (7.56) à (7.58), dans les équations (7.35) de la hiérarchie intégrable, nous trouvons, toujours sur le lieu $\mathcal{L}$ et pour $1 \leq \ell \leq p$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} \Big|_{\mathcal{L}} - 2 \mathcal{J}_{1m} b_1^{(\ell)} &= -\frac{1}{F_\ell} \left(\left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} + \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - 2 \mathcal{J}_{1m}^2 \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \right), \\ \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \frac{\tilde{\tau}_{n+e_\ell}}{\tilde{\tau}_{n-e_\ell}} \Big|_{\mathcal{L}} + 2 \kappa_\ell \mathcal{J}_{mm} b_1^{(\ell)} &= \frac{1}{F_\ell} \left(\left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(\ell)} - \kappa_\ell \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \mathcal{J}_{1m} \left(\mathcal{J}_{mm} \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} + \partial_{b_1}^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} \right) \right), \end{aligned}$$

avec $F_\ell := -\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - n_\ell \mathcal{J}_{1m} = -\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \mathbb{P}_n - n_\ell \mathcal{J}_{1m}$.

Il est alors possible de se débarrasser des termes qui contiennent $\ln \frac{\tilde{\tau}_n + e_\ell}{\tilde{\tau}_n - e_\ell}$, simplement en agissant avec $\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)}$ sur la première équation, en agissant avec $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}$ sur la deuxième équation, puis en soustrayant les deux et en utilisant le fait que $\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)}$ et $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}$ commutent. On déduit ainsi l'égalité suivante (en notant par ailleurs que $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} [2\kappa_\ell \mathcal{J}_{mm} b_1^{(\ell)}] = 0$) :

$$\begin{aligned} & \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \left(\frac{2 \mathcal{J}_{1m} b_1^{(\ell)} F_\ell - \left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} + \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + 2 \mathcal{J}_{1m}^2 \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)}}{F_\ell} \right) \\ &= \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \left(\frac{\left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(\ell)} - \kappa_\ell \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - 2 \mathcal{J}_{1m} \left(\mathcal{J}_{mm} \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} + \partial_{b_1}^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} \right)}{F_\ell} \right), \end{aligned}$$

laquelle, par la formule de la dérivée d'un quotient, peut également s'écrire en faisant apparaître des *wronskiens*. Puisque $\hat{\mathcal{B}}_2^{(\ell)} = \partial_{b_2}^{(\ell)} + \kappa_\ell \varepsilon_m$ par (7.53), avec ε_m défini en (7.62), cela conduit à :

$$\begin{aligned} & - \left\{ \partial_{b_2}^{(\ell)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}}, F_\ell \right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}} \tag{7.67} \\ &= \left\{ \left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} + \delta_{1,m} + 2 \mathcal{J}_{1m} b_1^{(\ell)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} + 2 \mathcal{J}_{1m}^2 \left(n_\ell b_1^{(\ell)} - \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \right), F_\ell \right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)}} \\ &+ \left\{ \left(\kappa_\ell (\varepsilon_m - \delta_{1,m}) \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} - 2 \mathcal{J}_{1m} \partial_{b_1}^{(\ell)} \right) \ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}} - 2 \kappa_\ell \mathcal{J}_{1m} \mathcal{J}_{mm} \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)}, F_\ell \right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}}. \end{aligned}$$

Finalement, pour obtenir (7.61), il faut se souvenir du lien (7.64) entre $\ln \tilde{\tau}_n \Big|_{\mathcal{L}}$ et $\ln \mathbb{P}_n$. En effet, si l'on intègre la fonction τ_n (voir (7.2) et (7.3)) *sur tout l'espace*, alors on montre (voir l'Appendice dans [2]) que :

$$\tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}} = g_n(c) e^{-\frac{\mathcal{J}_{mm}}{2} \sum_{\ell=1}^p n_\ell b_1^{(\ell)^2}} \prod_{1 \leq i < j \leq p} \left(b_1^{(j)} - b_1^{(i)} \right)^{n_i n_j}, \tag{7.68}$$

où $g_n(c)$ est une certaine fonction dépendant seulement de $c_1, \dots, c_{m-1}$ et de

n . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}} &= -\frac{\mathcal{J}_{mm}}{2} \sum_{\ell=1}^p n_\ell \left(b_1^{(\ell)} \right)^2 \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} n_i n_j \ln \left(b_1^{(j)} - b_1^{(i)} \right) + \ln g(c). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Lorsqu'on substitue (7.64) et (7.69) dans (7.67), il convient donc de tenir compte de quelques termes, qui apparaissent quand on agit sur $\ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}}$ avec un opérateur différentiel. Un calcul direct établit que, pour $1 \leq \ell \leq p$:

- $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}} = 0.$
- $\partial_{b_1}^{(\ell)} b_1^{(i)} = \kappa_\ell - \delta_{\ell,i} \quad (1 \leq i \leq p).$
- $-2\mathcal{J}_{1m} \partial_{b_1}^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}} = -2\mathcal{J}_{1m} \left[\mathcal{J}_{mm} \left(n_\ell b_1^{(\ell)} - \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \right) - n_\ell \sum_{i \neq \ell} \frac{n_i}{b_1^{(\ell)} - b_1^{(i)}} \right].$
- $\left(\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} + \delta_{1,m} \right) \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} \ln \tilde{\tau}_n(\mathbb{R}^m) \Big|_{\mathcal{L}} = 2\mathcal{J}_{1m}^2 \left(-n_\ell b_1^{(\ell)} + \kappa_\ell \sum_{k=1}^p n_k b_1^{(k)} \right).$

En utilisant ces identités dans (7.67), on se ramène au résultat souhaité pour (7.61), ce qui achève de prouver la Proposition 7.7. ■

Les équations (7.61) sont de la forme générale :

$$\{X_\ell, F_\ell\} = H_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq p, \quad \text{avec} \quad \sum_{\ell=1}^p X_\ell = 0, \quad (7.70)$$

où :

$$H_\ell := \left\{ H_\ell^{(1)}, F_\ell \right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}} - \left\{ H_\ell^{(2)}, F_\ell \right\}_{\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)}}, \quad (7.71)$$

et où le wronskien dans (7.70) est pris par rapport à l'opérateur $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} =: '.$

Le fait que $\sum_{\ell=1}^p X_\ell = 0$ provient de ce que $\sum_{\ell=1}^p \partial_{b_2}^{(\ell)} = 0$ (voir (7.37)).

L'avantage de cette forme est que nous avons isolé (dans X_ℓ) les termes contenant encore des dérivées partielles par rapport aux variables $b_2^{(\ell)}$.

La Proposition suivante nous montre comment il est possible de résoudre (7.70), c'est-à-dire d'éliminer les X_ℓ . Elle nous apprend aussi que, en faisant

cela, on obtiendra une équation qui peut s'écrire comme le déterminant d'une matrice de taille $(p+1) \times (p+1)$ qui est égal à zéro.

Notons aussi que ce déterminant a une *structure* et n'est pas *quelconque* : il s'agit "presque" d'un *multi-wronskien*. Plus précisément, seule la dernière colonne de la matrice fait en sorte que ce n'est pas un *multi-wronskien*.

Proposition 7.8 (Adler - Delepine - Vanhaecke - van Moerbeke [2])

Etant donné le système (7.70), tel que le multi-wronskien des fonctions²⁹ $F'_1, \dots, F'_p$ est différent de zéro, c'est-à-dire :

$$D := \det \begin{pmatrix} F'_1 & F'_2 & F'_3 & \dots & F'_p \\ F''_1 & F''_2 & F''_3 & \dots & F''_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1^{(p)} & F_2^{(p)} & F_3^{(p)} & \dots & F_p^{(p)} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (7.72)$$

alors il existe une solution unique pour $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ qui est donnée, pour $\ell = 1, \dots, p$, par :

$$X_\ell = \frac{F_\ell}{D} \det \begin{pmatrix} F'_1 & F'_2 & F'_3 & \dots & -G_1 & \dots & F'_p \\ F''_1 & F''_2 & F''_3 & \dots & -G_2 & \dots & F''_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ F_1^{(p)} & F_2^{(p)} & F_3^{(p)} & \dots & -G_p & \dots & F_p^{(p)} \end{pmatrix}. \quad (7.73)$$

Ci-dessus, les G_i 's se placent dans la ℓ -ème colonne, et ils sont définis par induction selon la formule :

$$G_0 = 0, \quad G_1 = \sum_{\ell=1}^p \frac{H_\ell}{F_\ell} \quad ; \quad G_{i+1} = G'_i + \sum_{\ell=1}^p \frac{H_\ell F_\ell^{(i)}}{F_\ell^2}. \quad (7.74)$$

De plus, l'équation suivante est satisfaite, dans laquelle le membre de gauche correspond au déterminant d'une matrice $(p+1) \times (p+1)$:

$$\det \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_p & G_0 \\ F'_1 & F'_2 & F'_3 & \dots & F'_p & G_1 \\ F''_1 & F''_2 & F''_3 & \dots & F''_p & G_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_1^{(p)} & F_2^{(p)} & F_3^{(p)} & \dots & F_p^{(p)} & G_p \end{pmatrix} = 0. \quad (7.75)$$

²⁹Ici, comme nous l'avons déjà indiqué, le symbole $'$ est employé pour désigner l'action de l'opérateur $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}$. Cette notation s'avère particulièrement utile, surtout quand il faut agir plusieurs fois avec $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)}$.

Preuve : Soit X_ℓ une solution de l'équation $\{X_\ell, F_\ell\} = H_\ell$, soumise à la condition $\sum_{\ell=1}^p X_\ell = 0$. Ecrivons :

$$X_\ell^{(i)} = G_{\ell,i} + X_\ell \frac{F_\ell^{(i)}}{F_\ell}. \quad (7.76)$$

En utilisant (7.76) et le fait que $X'_\ell = \frac{1}{F_\ell} (H_\ell + X_\ell F'_\ell)$, on calcule que :

$$\begin{aligned} X_\ell^{(i+1)} &= G'_{\ell,i} + X'_\ell \frac{F_\ell^{(i)}}{F_\ell} + X_\ell \frac{F_\ell^{(i+1)}}{F_\ell} - X_\ell \frac{F'_\ell F_\ell^{(i)}}{F_\ell^2} \\ &= \underbrace{\left(G'_{\ell,i} + \frac{H_\ell F_\ell^{(i)}}{F_\ell^2} \right)}_{G_{\ell,i+1}} + X_\ell \frac{F_\ell^{(i+1)}}{F_\ell}, \end{aligned}$$

ce qui montre que, pour chaque ℓ fixé, les $G_{\ell,i}$'s sont définis par induction selon :

$$G_{\ell,0} = 0, \quad G_{\ell,1} = \frac{H_\ell}{F_\ell} \quad ; \quad G_{\ell,i+1} = G'_{\ell,i} + \frac{H_\ell F_\ell^{(i)}}{F_\ell^2}. \quad (7.77)$$

Ensuite, en sommant (7.76) pour ℓ allant de 1 à p , on tire :

$$0 = G_i + \sum_{\ell=1}^p X_\ell \frac{F_\ell^{(i)}}{F_\ell}, \quad \text{où } G_i := \sum_{\ell=1}^p G_{\ell,i}. \quad (7.78)$$

Il suffit alors de résoudre le système linéaire (7.78) afin de déduire la solution (7.73) pour X_ℓ . Après quoi, en exprimant dans cette solution le fait que $\sum_{\ell=1}^p X_\ell = 0$, on obtient du même coup l'égalité (7.75). ■

En conclusion de tout ce qui vient d'être dit dans cette section, nous avons établi le Théorème suivant (Proposition 7.9). Dans le but d'alléger au maximum les notations, nous y avons posé :

$$\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} =: \partial_\ell \quad (0 \leq \ell \leq p) \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} =: -\varepsilon_0, \quad (7.79)$$

où les $\hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)}$ et $\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)}$ sont donnés en (7.51) et (7.52). En particulier, cela signifie que $\hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} =: \partial_0 =: '$. Rappelons aussi que l'opérateur $\partial_b^{(\ell)} \equiv \partial_{b_1}^{(\ell)}$ a été défini en (7.37), et l'opérateur ε_m en (7.62).

Proposition 7.9 (Adler - Delepine - Vanhaecke - van Moerbeke [2])

Le logarithme de la probabilité $\mathbb{P}_n$, définie en (6.13) et (6.18), liée aux mouvements browniens via les changements de variables (6.14) à (6.17), et soumise à la contrainte linéaire (7.1) sur les $b_1^{(\ell)} \equiv b_\ell$ ($1 \leq \ell \leq p$), vérifie l'EDP non linéaire :

$$\det \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_p & G_0 \\ F'_1 & F'_2 & F'_3 & \dots & F'_p & G_1 \\ F''_1 & F''_2 & F''_3 & \dots & F''_p & G_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_1^{(p)} & F_2^{(p)} & F_3^{(p)} & \dots & F_p^{(p)} & G_p \end{pmatrix} = 0, \quad (7.80)$$

où les F_ℓ et les G_ℓ correspondent aux quantités :

$$F_\ell := -\partial_0 \partial_\ell \ln \mathbb{P}_n - n_\ell \mathcal{J}_{1m}, \quad (7.81)$$

$$G_0 := 0,$$

$$G_{\ell+1} := \partial_0 G_\ell + \sum_{i=1}^p [(\partial_0)^\ell F_i] \left(\partial_0 \frac{H_i^{(1)}}{F_i} - \partial_i \frac{H_i^{(2)}}{F_i} \right), \quad (7.82)$$

$$H_\ell^{(1)} := \left(\kappa_\ell (\delta_{1,m} - \varepsilon_m) \partial_0 + 2 \mathcal{J}_{1m} \partial_b^{(\ell)} \right) \ln \mathbb{P}_n + C_\ell, \quad (7.83)$$

$$H_\ell^{(2)} := \left(\delta_{1,m} - \varepsilon_0 + 2 \mathcal{J}_{1m} b_\ell \partial_0 \right) \partial_\ell \ln \mathbb{P}_n, \quad (7.84)$$

et où la constante C_ℓ dans (7.83) vaut :

$$C_\ell := 2 n_\ell \mathcal{J}_{1m} \left(\mathcal{J}_{mm} b_\ell - \sum_{i \neq \ell} \frac{n_i}{b_\ell - b_i} \right). \quad (7.85)$$

■

7.4 Cas particulier pour un temps

Nous pouvons maintenant envisager une situation particulière de la Proposition 7.9, ce qui nous aidera, dans la troisième partie de cette thèse, à en étudier l'asymptotique dans certains cas concrets.

La simplification que nous allons effectuer ici consiste à poser $m = 1$ dans (7.80), c'est-à-dire que nous considérons la *probabilité à un temps* $\mathbb{P}_{Br}^{(n)}(t, \tilde{E})$, où le temps t des mouvements browniens est tel que $0 < t < 1$.

Dans ce cas, (6.18) se réduit au modèle matriciel (6.10) à une matrice, ce qui signifie que les variables de couplage c_k n'apparaissent plus. Les

opérateurs de la Proposition 7.9 s'écrivent alors :

$$\partial_0 := \hat{\mathcal{B}}_1^{(0)} = -\partial_E, \quad (7.86)$$

$$\partial_\ell := \hat{\mathcal{B}}_1^{(\ell)} = \partial_b^{(\ell)} + \kappa_\ell \partial_E \quad (1 \leq \ell \leq p), \quad (7.87)$$

$$\varepsilon := \varepsilon_0 = -\hat{\mathcal{B}}_2^{(0)} = \varepsilon_m = \varepsilon_E - \sum_{\ell=1}^{p-1} b_\ell \frac{\partial}{\partial b_\ell}, \quad (7.88)$$

où ∂_E , ε_E et $\partial_b^{(\ell)}$ ont été définis en (7.36) et (7.37). Cette simplification permet d'observer l'identité suivante, dans la parenthèse à droite de (7.82) :

$$\begin{aligned} \partial_0 \frac{H_\ell^{(1)}}{F_\ell} - \partial_\ell \frac{H_\ell^{(2)}}{F_\ell} &= \partial_E \left(\frac{-H_\ell^{(1)} - \kappa_\ell H_\ell^{(2)} + 2\kappa_\ell b_\ell F_\ell}{F_\ell} \right) - \partial_b^{(\ell)} \frac{H_\ell^{(2)}}{F_\ell} \\ &= \partial_E \frac{\bar{H}_\ell^{(1)}}{F_\ell} - \partial_b^{(\ell)} \frac{H_\ell^{(2)}}{F_\ell}, \end{aligned}$$

en ayant posé ci-dessus (pour $1 \leq \ell \leq p$) :

$$\bar{H}_\ell^{(1)} := -H_\ell^{(1)} - \kappa_\ell H_\ell^{(2)} + 2\kappa_\ell b_\ell F_\ell. \quad (7.89)$$

Ainsi, on trouve, en corollaire de la Proposition 7.9 :

Proposition 7.10 (*Adler - Delepine - Vanhaecke - van Moerbeke [2]*)

Lorsque $m = 1$, l'équation non linéaire (7.80) garde exactement la même forme, mais avec cette fois³⁰ $' := \partial_E$, et avec les expressions ci-après pour les F_ℓ et les G_ℓ ($1 \leq \ell \leq p$) :

$$F_\ell := \left(\partial_b^{(\ell)} + \kappa_\ell \partial_E \right) \partial_E \ln \mathbb{P}_n + n_\ell, \quad (7.90)$$

$$G_0 := 0,$$

$$G_{\ell+1} := \partial_E G_\ell + \sum_{i=1}^p \left[(\partial_E)^\ell F_i \right] \left(\partial_E \frac{\bar{H}_i^{(1)}}{F_i} - \partial_b^{(i)} \frac{H_i^{(2)}}{F_i} \right), \quad (7.91)$$

$$\bar{H}_\ell^{(1)} := \left(-\kappa_\ell \partial_E \varepsilon + \left(\kappa_\ell (\varepsilon - 1) + 2 \right) \left(\partial_b^{(\ell)} + \kappa_\ell \partial_E \right) \right) \ln \mathbb{P}_n + \bar{C}_\ell, \quad (7.92)$$

$$H_\ell^{(2)} := \left(1 - \varepsilon + 2b_\ell \partial_E \right) \left(\partial_b^{(\ell)} + \kappa_\ell \partial_E \right) \ln \mathbb{P}_n, \quad (7.93)$$

et où la constante $\bar{C}_\ell$ dans (7.92) vaut :

$$\bar{C}_\ell := -2n_\ell \left((1 - \kappa_\ell) b_\ell + \sum_{i \neq \ell} \frac{n_i}{b_\ell - b_i} \right). \quad (7.94)$$

■

³⁰plutôt que $' := \partial_0$, comme on l'avait posé dans (7.80).

8 Noyau de corrélation brownien

Avant de terminer ce chapitre, nous mentionnons encore un autre résultat, qui se révélera utile lorsque nous considérerons les mouvements browniens contraints dans la limite où le nombre total n de particules tend vers l'infini, et ce dans différents régimes.

Il exprime qu'il s'agit d'un *processus déterminantal*, associé à un noyau de corrélation qui peut être calculé :

Proposition 8.1 (*Tracy - Widom [39]*)

La probabilité de transition (6.13) pour les mouvements browniens à m temps, est aussi égale au déterminant de Fredholm étendu (voir (5.8)) :

$$\det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{t_k, t_l}^{(n)} \chi_{E_l} \right)_{1 \leq k, l \leq m} \right). \quad (8.1)$$

Ci-dessus, le noyau matriciel $K_{t_i, t_j}^{(n)}(x, y)$ dépend des temps intermédiaires t_k ($1 \leq k \leq m$), et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} K_{t_i, t_j}^{(n)}(x, y) &= \frac{(-1)}{2\pi^2 \sqrt{(1-t_i)(1-t_j)}} \int_{\mathcal{C}} dv \int_{\Gamma_L} du \frac{e^{-\frac{t_i v^2}{(1-t_i)} + \frac{2xv}{(1-t_i)}}}{e^{-\frac{t_j u^2}{(1-t_j)} + \frac{2yu}{(1-t_j)}}} \\ &\times \prod_{\ell=1}^p \left(\frac{u - \beta_\ell}{v - \beta_\ell} \right)^{n_\ell} \frac{1}{(u - v)} \\ &- \begin{cases} 0 & , \text{ si } t_i \geq t_j, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi(t_j - t_i)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{(t_j - t_i)} + \frac{x^2}{(1-t_i)} - \frac{y^2}{(1-t_j)}} & , \text{ si } t_i < t_j, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2)$$

où $\mathcal{C}$ est un contour fermé entourant une fois tous les points β_ℓ , et situé à la gauche de la ligne $\Gamma_L := L + i\mathbb{R}$, avec L choisi suffisamment grand, de sorte que $\Re(u - v) > 0$. ■

Notons que la représentation explicite du noyau (8.2) sous la forme d'une intégrale double dans le plan complexe, se prête particulièrement bien à l'application de certaines techniques d'analyse asymptotique (la méthode du point col, par exemple : voir [17]).

Part IV

Processus infinis

Considérons à nouveau le modèle de mouvements browniens contraints à une dimension, ne s'intersectant pas, tel que décrit dans la section 6. Nous allons examiner diverses situations-limites de ce modèle, lorsque le nombre total n de particules devient très grand ($n \nearrow \infty$).

En prenant cette limite, nous perdrons évidemment notre interprétation intuitive de ces mouvements en termes de “chemins browniens individuels”, mais celle-ci sera remplacée au profit de la représentation que nous ferons du “nuage de particules” ainsi obtenu. Il sera nécessaire également de connaître la façon précise dont se transforment les variables d'espace et de temps lors du passage à la limite, car nous voulons trouver un processus correctement défini. Autrement dit, il faudra déterminer au préalable les *rescalings* appropriés, aussi bien sur l'*espace* que sur le *temps* des mouvements browniens.

En fait, dans cette troisième partie, deux grandes questions principales seront systématiquement abordées et retiendront notre attention :

1. Quels *rescalings* (changements de variables) faut-il adopter avant de passer à la limite $n \nearrow \infty$? Est-on certain qu'avec ces *rescalings*, le processus sera bien défini ? Peut-on exprimer la probabilité limitante comme un *déterminant de Fredholm* associé à un certain *noyau de corrélation* ? Si oui, quelle est la forme de ce noyau limitant ?
2. Les probabilités de transition limitantes satisfont-elles, tout comme celles du modèle fini, des équations aux dérivées partielles ? Et peut-on en déduire des liens entre les différents processus étudiés ?

Tandis que la première question nous conduira à effectuer une analyse asymptotique du noyau fini (8.2), la seconde question sera résolue en prenant une limite aux équations obtenues dans les Propositions 7.9 et 7.10.

9 Le processus d'Airy

Le cas le plus simple que l'on puisse imaginer se produit lorsque les particules browniennes s'éloignent de l'origine ($x = 0$) au temps $t = 0$, et *reviennent toutes* en $x = 0$ au temps final $t = 1$.

Il est alors possible de montrer ([4], [33]) que, pour n très grand, la densité moyenne des particules prend son support, à chaque instant intermédiaire t tel que $0 < t < 1$, sur le *seul* intervalle $[-\sqrt{2nt(1-t)}, \sqrt{2nt(1-t)}]$.

Le *processus d’Airy* décrit le comportement et les fluctuations du *bord supérieur droit* du nuage de particules, après un *rescaling* convenable effectué sur l’espace et le temps. Il est à noter qu’initialement, le processus d’Airy fut d’abord défini en prenant un *rescaling* par rapport au *processus de Dyson* (voir section 5), de la même façon que la distribution de Tracy-Widom (4.21) est apparue en considérant un *rescaling* au bord du spectre, sur l’ensemble matriciel GUE (voir les Propositions 4.2 et 4.4).

Tracy et Widom [38], parmi d’autres (voir aussi [27], [35]), avaient très tôt mis en évidence le résultat suivant :

Proposition 9.1 (*Tracy - Widom [38]*)

En prenant la limite ci-dessous sur les mouvements browniens de Dyson (définis à la section 5), nous trouvons le “processus d’Airy”, qui est un processus stationnaire (c’est-à-dire indépendant du temps) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Dyson} \left(\text{tous les } \lambda_i \left(\frac{\tau}{n^{1/3}} \right) \leq \sqrt{2n} + \frac{x}{\sqrt{2} n^{1/6}} \right) &=: \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x) \\ &= F(x), \end{aligned} \quad (9.1)$$

où $F(x)$ correspond à la distribution de Tracy-Widom donnée en (4.21).

Plus généralement, si $E \subseteq \mathbb{R}$, la limite de la probabilité est égale à un déterminant de Fredholm :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Dyson} \left(\text{tous les } \lambda_i \left(\frac{\tau}{n^{1/3}} \right) \in \sqrt{2n} + \frac{E^c}{\sqrt{2} n^{1/6}} \right) \\ =: \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \cap E = \emptyset) = \det \left(I - K^{(0)} \right)_E, \end{aligned} \quad (9.2)$$

où $K^{(0)}$ est le noyau d’Airy, qui admet la représentation suivante en termes de la fonction d’Airy (4.12) :

$$\begin{aligned} K^{(0)}(u, v) &= \frac{Ai(u) Ai'(v) - Ai'(u) Ai(v)}{u - v} \\ &= \int_0^\infty dw Ai(u + w) Ai(v + w). \end{aligned} \quad (9.3)$$

■

En d'autres termes, avec ce changement d'échelle, la particule "la plus à droite" dans les mouvements browniens de Dyson se comporte statistiquement (et à *chaque* instant) de la même manière que la plus grande valeur propre d'une matrice hermitienne aléatoire appartenant à l'ensemble GUE.

Peut-on déduire la même chose en ce qui concerne les mouvements browniens *contraints* de la section 6 ? La réponse est affirmative, ce qui d'ailleurs n'est guère étonnant, dans la mesure où les mouvements browniens de Dyson et les mouvements browniens contraints *revenant tous à l'origine en $t = 1$* , sont en fait reliés par des changements de variables.

En effet, nous avons (voir [20]) :

$$\mathbb{P}_{Dyson}(\text{tous les } \lambda_i(t') \in E') = \frac{1}{Z_n} \int_{\text{spec}(M) \in (\sqrt{2} E')} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr } M^2} dM, \quad (9.4)$$

où M est une matrice hermitienne $n \times n$.

D'autre part, en notant $\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0}$ la probabilité associée aux mouvements browniens contraints *revenant tous à l'origine*, nous voyons, par (6.5), (6.7) et (6.8) avec $A = 0$, que :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0}(\text{tous les } x_i(t) \in E) = \frac{1}{Z_n} \int_{\text{spec}(M) \in (\sqrt{\frac{2}{t(1-t)}} E)} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr } M^2} dM. \quad (9.5)$$

En combinant (9.4) et (9.5), il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}_{Dyson}(\text{tous les } \lambda_i(t') \in E') = \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0}(\text{tous les } x_i(t) \in E), \quad (9.6)$$

les variables spatiales entre les deux processus dynamiques étant liées par :

$$\sqrt{2} E' = \sqrt{\frac{2}{t(1-t)}} E. \quad (9.7)$$

Afin d'obtenir la relation entre les variables temporelles ($t' \longleftrightarrow t$), il faut aller plus loin et considérer les *probabilités jointes*, par exemple pour deux temps distincts. Dans le modèle de Dyson, nous avons (voir [7], [20]) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Dyson}(\text{tous les } \lambda_i(t'_1) \in E'_1, \text{ tous les } \lambda_i(t'_2) \in E'_2) \\ &= \frac{1}{Z_n} \iint_{\substack{\text{spec}(M_1) \in \frac{\sqrt{2} E'_1}{\sqrt{1-c^2}} \\ \text{spec}(M_2) \in \frac{\sqrt{2} E'_2}{\sqrt{1-c^2}}}} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(M_1^2 + M_2^2 - 2c M_1 M_2)} dM_1 dM_2, \end{aligned} \quad (9.8)$$

avec $c := e^{-(t'_2 - t'_1)}$ (où l'on suppose $0 < t'_1 < t'_2$), et en termes des deux matrices hermitiennes $n \times n$ *couplées* M_1 et M_2 .

Dans le cas des mouvements browniens contraints *revenant à l'origine*, nous voyons, par (6.13), (6.18) et les changements de variables (6.14) à (6.17) avec $A = 0$ et $m = 2$, que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0} \left(\text{tous les } x_i(t_1) \in E_1, \text{ tous les } x_i(t_2) \in E_2 \right) \\ &= \frac{1}{Z_n} \iint_{\substack{\text{spec}(M_1) \in \sqrt{\frac{2t_2}{t_1(t_2-t_1)}} E_1 \\ \text{spec}(M_2) \in \sqrt{\frac{2(1-t_1)}{(1-t_2)(t_2-t_1)}} E_2}} e^{-\text{Tr} \frac{1}{2} \left(M_1^2 + M_2^2 - 2 \sqrt{\frac{t_1(1-t_2)}{t_2(1-t_1)}} M_1 M_2 \right)} dM_1 dM_2. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Une comparaison de (9.8) et (9.9) entraîne aussitôt que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Dyson} (\text{tous les } \lambda_i(t'_1) \in E'_1, \text{ tous les } \lambda_i(t'_2) \in E'_2) \\ &= \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0} \left(\text{tous les } x_i(t_1) \in E_1, \text{ tous les } x_i(t_2) \in E_2 \right), \end{aligned} \quad (9.10)$$

où les variables des deux processus sont reliées par les formules :

$$\frac{\sqrt{2} E'_1}{\sqrt{1-c^2}} = E_1 \sqrt{\frac{2t_2}{t_1(t_2-t_1)}} \quad , \quad \frac{\sqrt{2} E'_2}{\sqrt{1-c^2}} = E_2 \sqrt{\frac{2(1-t_1)}{(1-t_2)(t_2-t_1)}} \quad , \quad (9.11)$$

$$c = \frac{e^{t'_1}}{e^{t'_2}} = \frac{\sqrt{\frac{t_1}{1-t_1}}}{\sqrt{\frac{t_2}{1-t_2}}} \quad . \quad (9.12)$$

En simplifiant les équations (9.11) et (9.12), on trouve encore :

$$e^{t'_i} = \sqrt{\frac{t_i}{1-t_i}} \Leftrightarrow t_i = \frac{1}{1+e^{-2t'_i}} \quad , \quad (9.13)$$

$$\sqrt{2} E'_i = \sqrt{\frac{2}{t_i(1-t_i)}} E_i \quad . \quad (9.14)$$

Proposition 9.2 (Adler - Delepine - van Moerbeke [1])

En prenant la limite ci-dessous sur les mouvements browniens contraints revenant tous à l'origine, nous retrouvons également le “processus d’Airy”, qui est un processus stationnaire (c’est-à-dire indépendant du temps) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0} \left(\text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1+e^{-2\tau/n^{1/3}}} \right) \leq \frac{\sqrt{2n} + \frac{x}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh(\tau/n^{1/3})} \right) &= \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x) \\ &= F(x), \end{aligned} \quad (9.15)$$

où $F(x)$ correspond à la distribution de Tracy-Widom donnée en (4.21).

Plus généralement, si $E \subseteq \mathbb{R}$, la limite de la probabilité est égale à un déterminant de Fredholm :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=0} \left(\text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1 + e^{-2\tau/n^{1/3}}} \right) \in \frac{\sqrt{2n} + \frac{E^c}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh(\tau/n^{1/3})} \right) \\ & =: \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \cap E = \emptyset) = \det \left(I - K^{(0)} \right)_E, \end{aligned} \quad (9.16)$$

où $K^{(0)}$ est le noyau d'Airy (9.3).

Preuve : C'est un corollaire de la Proposition 9.1. La forme précise du *rescaling* s'obtient en utilisant l'identité (9.6) et les changements de variables (9.13) et (9.14), puis en insérant tout cela dans la Proposition 9.1. ■

Observons en particulier la correspondance :

temps t (initial)	temps τ (après <i>rescaling</i>)
$t = 0$	$\tau = -\infty$
$t = 1/2$	$\tau = 0$
$t = 1$	$\tau = +\infty$

En ce qui concerne les équations, dans l'introduction, nous avons déjà déduit que $\log \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \cap E = \emptyset) = \log \det (I - K^{(0)})_E$ satisfaisait l'EDP (4.16) : voir Proposition 4.3.

Adler et van Moerbeke ont également calculé l'équation obtenue dans le cas de *deux temps* τ_1 et τ_2 . Nous la donnons ci-dessous, lorsque E_1 et E_2 correspondent chacun à un seul intervalle non borné :

Proposition 9.3 (Adler - van Moerbeke [7])

Posons :

$$H(s, x, y) := \log \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau_1) \leq x + y, \mathcal{A}(\tau_2) \leq x - y), \quad (9.17)$$

avec $s := (\tau_2 - \tau_1)/2$, et où le membre de droite est défini de la même manière que dans (9.15), c'est-à-dire avec le même *rescaling*, mais adapté cette fois à deux temps τ_1, τ_2 tels que $\tau_1 < \tau_2$.

Alors $H(s, x, y)$ satisfait l'EDP suivante, où le crochet désigne, comme d'habitude, un wronskien par rapport à $\partial/\partial x$:

$$2s \frac{\partial^3 H}{\partial s \partial x \partial y} = \left(2s^2 \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) + \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}}. \quad (9.18)$$

■

10 Le processus de r-Airy

Nous allons maintenant étudier une généralisation du processus précédent. Dans le modèle fini de mouvements browniens contraints³¹, nous supposons que les n particules partent de l'origine au temps $t = 0$, tandis qu'au temps $t = 1$, $(n - r)$ de ces particules reviennent en $x = 0$, les r autres particules (avec $r \geq 0$) aboutissant à une *cible positive* $x = a \geq 0$. Bien entendu, on retrouve la situation précédente en prenant $r = 0$, ou encore, ce qui revient au même, en posant $a = 0$.

Nous effectuerons d'abord l'analyse dans le cas de *un* temps, ce qui nous conduit, étant donné $E \subseteq \mathbb{R}$, à considérer la probabilité :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)} \Big|_a \left(\begin{array}{c} \text{tous les } x_j(t) \in E \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{tous les } x_j(0) = 0, \\ \text{les } (n - r) \text{ chemins } \textit{de gauche} \text{ sont forcés} \\ \text{d'atteindre } 0 \text{ lorsque } t = 1, \\ \text{les } r \text{ chemins } \textit{de droite} \text{ sont forcés} \\ \text{d'atteindre } a \geq 0 \text{ lorsque } t = 1 \end{array} \right). \quad (10.1)$$

On peut ensuite définir un nouveau processus, qui s'obtient à partir de (10.1) en faisant tendre n vers l'infini. Nous supposons que cette limite est soumise aux exigences suivantes :

- Le nombre total n de particules tend vers l'infini, de même que le nombre de particules $(n - r)$ revenant à l'origine. Par contre, le nombre r de particules atteignant le point a en $t = 1$ reste *fini et constant*.
- On utilise les mêmes changements d'échelle (*rescalings*) sur les variables d'espace et de temps, que ceux utilisés pour le *processus d'Airy* (voir Proposition 9.2), et obtenus par comparaison avec le *processus de Dyson*.
- La position du point $x = a$ tend également vers l'infini, et ce comme la racine carrée de n . Plus précisément, nous poserons, avant le passage à la limite :

$$a = \rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad (10.2)$$

où ρ_0 est un paramètre.

³¹rappelons qu'il s'agit de mouvements browniens ne s'intersectant pas.

Le choix particulier de (10.2) nous est en fait suggéré par un article de Pécché [34], ainsi que par les travaux de Baik, Ben Arous et Pécché [12], [13], qui relie cette question à un problème statistique d'analyse multivariée.

En effet, dans [34], l'auteur montre que, si l'on désigne par :

$$\mathbb{P}_n(\alpha, x) := \frac{1}{Z_n} \int_{\text{spec}(M) \in (-\infty, x)} e^{-\text{Tr} \left(\frac{M^2}{2} - AM \right)} dM \quad (10.3)$$

la probabilité associée à une matrice hermitienne M appartenant à l'ensemble gaussien déformé par une source externe A (voir (6.8)), dans le cas où A est diagonale et :

$$A := \text{diag} \left(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r)} \right), \quad (10.4)$$

alors la distribution limitante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n \left(\rho \sqrt{n}, 2\sqrt{n} + \frac{x}{n^{1/6}} \right) \quad (10.5)$$

admet une *transition de phase* lorsque $\rho = 1$. En effet, pour $\rho < 1$, la distribution trouvée est celle de Tracy-Widom (comme si la matrice source n'existait pas !), tandis que, pour $\rho = 1$, on obtient une *nouvelle* distribution, dépendante de r , et dont nous aurons l'occasion de reparler plus loin.

Retournons à présent à nos mouvements browniens. Dans la mesure où (10.1) et (10.3) sont reliés par des changements de variables, on s'attend également à observer une *transition de phase* dans notre modèle de chemins browniens. Mais *où* et *quand* cette transition aura-t-elle lieu ?

A vrai dire, et c'est ce que nous avons démontré dans [1], il existe une interprétation géométrique très simple qui nous permet de connaître et de visualiser le point "autour duquel" la transition va se dérouler.

Pour n très grand, la densité moyenne de particules est toujours bordée à droite par la courbe :

$$\mathcal{C} : \left\{ x = \sqrt{2nt(1-t)} \right\}. \quad (10.6)$$

Dans le plan (x, t) , relier le point $(\rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}, 1)$ au point de *tangence* à la courbe $\mathcal{C}$ qui est situé sur la courbe $\mathcal{C}$. Appelons ce point de tangence (x_0, t_0) , de sorte que nous avons, par un calcul très simple :

$$(x_0, t_0) = \left(\frac{\rho_0 \sqrt{2n}}{1 + \rho_0^2}, \frac{1}{1 + \rho_0^2} \right). \quad (10.7)$$

Notons que le temps $t = t_0$ correspond, dans la nouvelle échelle déduite de (9.13), au temps $\tau = \tau_0$, où le paramètre τ_0 vérifie :

$$e^{-\tau_0} = \sqrt{\frac{1-t_0}{t_0}} = \rho_0 . \quad (10.8)$$

En exprimant les coordonnées du point (x_0, t_0) en termes de ce paramètre τ_0 , il vient encore :

$$(x_0, t_0) = \left(\frac{\rho_0 \sqrt{2n}}{1 + \rho_0^2}, \frac{1}{1 + \rho_0^2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2n}}{2 \cosh(\tau_0)}, \frac{e^{\tau_0}}{2 \cosh(\tau_0)} \right). \quad (10.9)$$

Il se fait que ce *point de tangence* (x_0, t_0) indique précisément l'endroit où se produit une *transition de phase*. En effet, si l'on effectue le *rescaling* (sur le bord droit du nuage de particules) autour d'un temps $t < t_0$, on retrouve le *processus d'Airy* défini à la section précédente. Intuitivement, cela signifie que le système ne “ressent” pas encore l'éloignement des r particules de droite. En revanche, si le *rescaling* a lieu autour du temps $t = t_0$, une nouvelle distribution apparaît. Celle-ci définit un nouveau processus, *non stationnaire et dépendant de r* , généralisant le *processus d'Airy*, et que nous avons appelé le *processus de r -Airy*.

La Proposition ci-dessous établit non seulement l'existence du processus étudié, mais donne aussi la forme exacte de la distribution limitante :

Proposition 10.1 (Adler - Delepine - van Moerbeke [1])

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \Big|_{a=\rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}} \left(\text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1 + e^{-2\left(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)}} \right) \in \frac{\sqrt{2n} + \frac{E^c}{\sqrt{2} n^{1/6}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)} \right) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \cap E = \emptyset) = \det(I - K^{(0)})_E, & \text{si } \sigma < \tau_0 \\ \quad \quad \quad \text{(ce qui correspond à } 0 \leq t < t_0) \\ \mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \cap E = \emptyset) = \det(I - K_\tau^{(r)})_E, & \text{si } \sigma = \tau_0 \\ \quad \quad \quad \text{(ce qui correspond à } t = t_0) \end{cases} \quad (10.10) \end{aligned}$$

où t_0 est l'ordonnée du point de tangence (10.9), et τ_0 est un paramètre relié à t_0 et à ρ_0 via (10.8). Ci-dessus, $K^{(0)}$ représente le noyau d'Airy donné en (9.3), tandis que $K_\tau^{(r)}$ est un nouveau noyau, qui dépend à la fois de r et τ , et que l'on appelle le noyau de r -Airy.

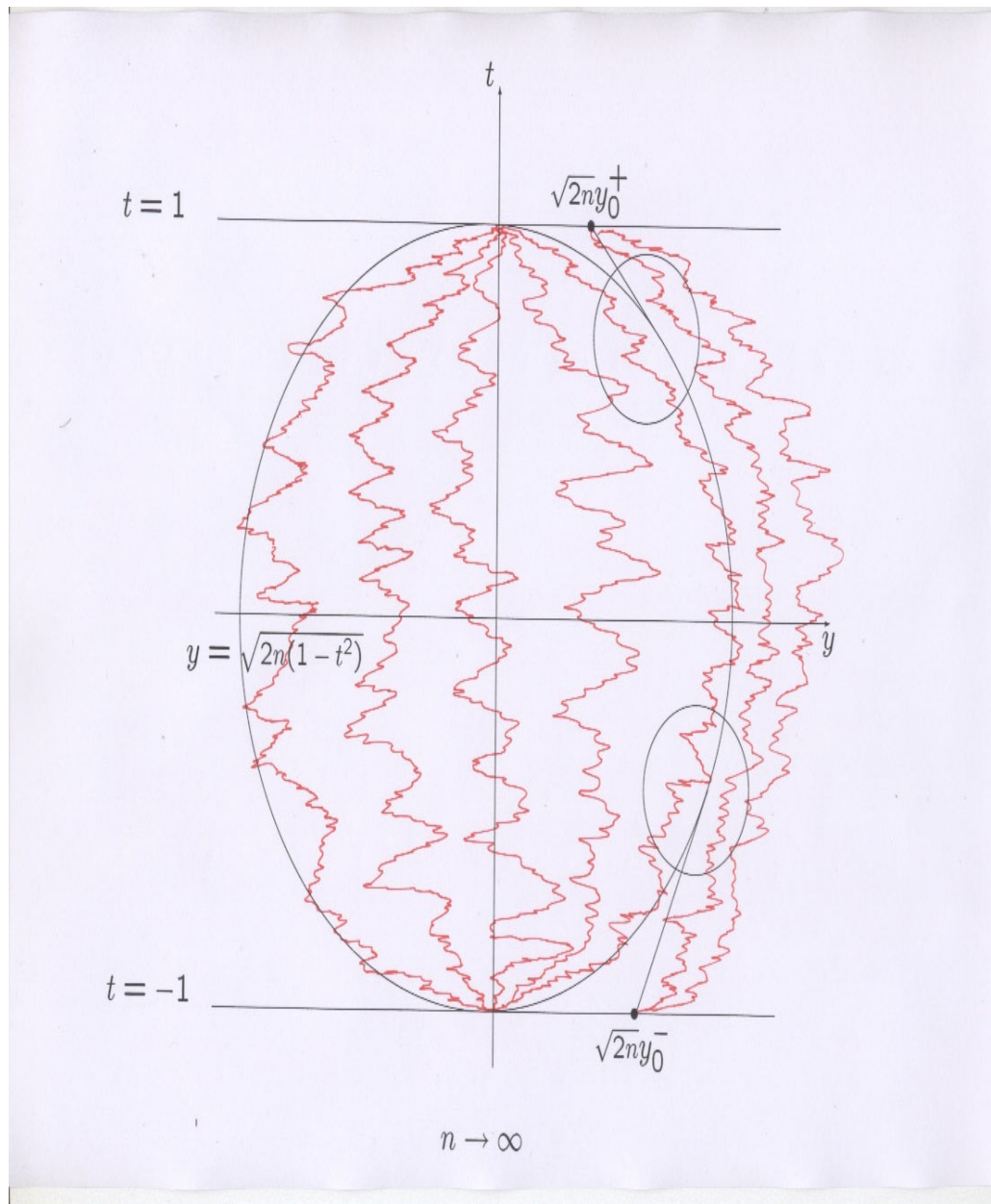


Figure 2
(dans le texte, on suppose que $y_0^- = 0$)

De plus, le noyau de r -Airy peut se définir de la façon suivante :

$$K_\tau^{(r)}(u, v) = \int_0^\infty dw \, A_r^-(w+u; \tau) A_r^+(w+v; \tau) , \quad (10.11)$$

en termes des fonctions d'Airy modifiées³² :

$$A_r^+(u; \tau) := \int_{\mathcal{C}} \frac{da}{2\pi} e^{\frac{1}{3}ia^3 + iau} (-ia - \tau)^r , \quad (10.12)$$

$$A_r^-(u; \tau) := \int_{\mathcal{C}} \frac{da}{2\pi} e^{\frac{1}{3}ia^3 + iau} \frac{1}{(ia - \tau)^r} . \quad (10.13)$$

En particulier, la fonction d'Airy $A(u)$, telle que donnée en (4.12), coïncide avec $A_0^\pm(u; \tau)$, et de même $K^{(0)}(u, v) = K_\tau^{(r)}(u, v)|_{r=0}$.

Preuve : Nous présentons ci-dessous quelques arguments destinés à convaincre au moins le lecteur de la convergence ponctuelle du noyau de corrélation. Pour davantage de détails, on peut également se reporter aux grandes lignes des articles de Pécché (voir [13], [34]), qui appliquent la méthode asymptotique du point col.

En utilisant la Proposition 8.1 lorsque $m = 1$, nous avons :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a(\text{tous les } x_i(t) \in E) = \det(I - K_n^{(r)})_{E^c} \quad (10.14)$$

avec :

$$K_n^{(r)}(x, y) dy = \frac{-dy}{2\pi^2(1-t)} \int_{\mathcal{D}} dz \int_{\Gamma_L} dw \, e^{-\frac{t z^2}{(1-t)} + \frac{2xz}{(1-t)} + \frac{t w^2}{(1-t)} - \frac{2wy}{(1-t)}} \left(\frac{w}{z}\right)^{n-r} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^r \frac{1}{(w-z)} , \quad (10.15)$$

où $\mathcal{D}$ est un contour fermé entourant une fois les points 0 et a , et qui est situé à gauche de la ligne $\Gamma_L := L + i\mathbb{R}$, avec L choisi assez grand pour que $\Re(w - z) > 0$. Il s'agit alors de faire les substitutions :

$$x = \frac{\sqrt{2n} + \frac{u}{\sqrt{2n^{1/6}}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)} , \quad y = \frac{\sqrt{2n} + \frac{v}{\sqrt{2n^{1/6}}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)} ,$$

$$t = \frac{1}{1 + e^{-2\left(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)}} , \quad a = \rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}} = e^{-\tau_0} \sqrt{\frac{n}{2}} .$$

³²où $\mathcal{C}$ est un contour du plan complexe allant de $\infty e^{5i\pi/6}$ à $\infty e^{i\pi/6}$, tel que $(-i\tau)$ se trouve *au-dessus* du contour.

En insérant cela dans (10.15), il semble commode de changer les variables d'intégration z et w comme suit :

$$z := \tilde{z} \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})} \quad \text{et} \quad w := \tilde{w} \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})} . \quad (10.16)$$

Une vérification immédiate établit que :

$$\begin{aligned} \frac{t}{1-t} &= e^{2(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})} \quad , \quad \frac{dy}{1-t} \frac{dz dw}{w-z} = \frac{n^{1/3}}{2} \frac{dv d\tilde{z} d\tilde{w}}{(\tilde{w} - \tilde{z})} , \\ \frac{2xz}{1-t} &= (2n + u n^{1/3}) \tilde{z} \quad , \quad \frac{t z^2}{1-t} = \frac{n}{2} \tilde{z}^2 . \end{aligned}$$

Par conséquent, le noyau fini (10.15) devient :

$$\begin{aligned} K_n^{(r)}(x, y) dy &= - \left(\frac{n^{1/3}}{2\pi} \right)^2 dv \int_{\mathcal{D}} d\tilde{z} \int_{\Gamma_L} d\tilde{w} e^{(-\frac{n}{2} \tilde{z}^2 + (2n + n^{1/3}u)\tilde{z})} e^{(-\frac{n}{2} \tilde{w}^2 + (2n + n^{1/3}v)\tilde{w})} \\ &\quad \times \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{z}} \right)^n \left(\frac{\tilde{w} - e^{(\sigma - \tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}}{\tilde{w}} \right)^r \left(\frac{\tilde{z} - e^{(\sigma - \tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}}{\tilde{z}} \right)^{-r} \frac{1}{n^{1/3} (\tilde{w} - \tilde{z})} . \end{aligned}$$

Afin de simplifier cette expression davantage, nous allons poser :

$$F(z) := \frac{z^2}{2} - 2z + \log(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} , \quad (10.17)$$

où $\log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme. Nous poserons également $\zeta := 1 + \frac{\gamma}{n^{1/3}}$, γ étant un paramètre, et aussi :

$$Z_n := \begin{cases} n^{-r/3} e^{nF(1)} & , \quad \text{si } \sigma = \tau_0 \\ (1 - e^{(\sigma - \tau_0)})^r e^{nF(1)} & , \quad \text{si } \sigma < \tau_0 \end{cases} . \quad (10.18)$$

Alors, en utilisant l'identité :

$$\frac{1}{n^{1/3} (\tilde{w} - \tilde{z})} = \int_0^\infty dw e^{-w n^{1/3} (\tilde{w} - \tilde{z})} , \quad (10.19)$$

qui est valable car $\Re(\tilde{w} - \tilde{z}) > 0$, nous obtenons pour le noyau :

$$\begin{aligned} K_n^{(r)}(x, y) dy &= -e^{\zeta n^{1/3}(u-v)} dv \int_0^\infty dw \frac{Z_n n^{1/3}}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} d\tilde{z} e^{-nF(\tilde{z})} \left(\frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - e^{(\sigma - \tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}} \right)^r e^{n^{1/3}(u+w)(\tilde{z} - \zeta)} \\ &\quad \times \frac{n^{1/3}}{2\pi Z_n} \int_{\Gamma_L} d\tilde{w} e^{nF(\tilde{w})} \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{w} - e^{(\sigma - \tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}} \right)^{-r} e^{-n^{1/3}(v+w)(\tilde{w} - \zeta)} . \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant le noyau de corrélation par $e^{n^{1/3}(v-u)}$, ce qui ne modifie pas le déterminant de Fredholm, on trouve :

$$e^{n^{1/3}(v-u)} K_n^{(r)}(x, y) dy = -dv e^{\gamma(u-v)} \int_0^\infty dw \mathcal{I}_\tau^{(n)}(w+u) \mathcal{J}_\tau^{(n)}(w+v), \quad (10.20)$$

avec :

$$\mathcal{I}_\tau^{(n)}(x) = \frac{n^{1/3} Z_n}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} d\tilde{z} e^{-nF(\tilde{z})} \left(\frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - e^{(\sigma-\tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}} \right)^r e^{n^{1/3} x (\tilde{z}-\zeta)}, \quad (10.21)$$

$$\mathcal{J}_\tau^{(n)}(y) = \frac{n^{1/3}}{2\pi Z_n} \int_{\Gamma_L} d\tilde{w} e^{nF(\tilde{w})} \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{w} - e^{(\sigma-\tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}} \right)^{-r} e^{-n^{1/3} y (\tilde{w}-\zeta)}. \quad (10.22)$$

Comme la fonction $F(z)$ donnée en (10.17) possède un point critique (c'est-à-dire un point où $F'(z)$ s'annule) en $z = 1$, cela suggère d'introduire une nouvelle variable u , telle que $(\tilde{z} - 1) = \frac{u}{n^{1/3}}$. De plus, le développement en série de Taylor de $F(z)$ autour de $z = 1$ s'écrit :

$$F(z) = F(1) + \frac{1}{3} (z-1)^3 + O(z-1)^4, \quad (10.23)$$

d'où l'on déduit, en utilisant la définition (10.18) de Z_n :

$$\begin{aligned} & n^{1/3} Z_n d\tilde{z} e^{-nF(\tilde{z})} \left(\frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - e^{(\sigma-\tau_0)} e^{\tau/n^{1/3}}} \right)^r e^{n^{1/3} x (\tilde{z}-\zeta)} \\ &= n^{1/3} Z_n \frac{du}{n^{1/3}} \left(e^{-nF(1)-\frac{u^3}{3}} + O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) \right) \\ & \quad \times \left(\frac{u + n^{1/3}}{u + n^{1/3} - e^{(\sigma-\tau_0)} \left(1 + \frac{\tau}{n^{1/3}} + \dots\right) n^{1/3}} \right)^r e^{x(u-\gamma)} \\ &= \begin{cases} e^{-x\gamma} du e^{-\frac{u^3}{3}+xu} & + \text{termes d'ordre inférieur, si } \sigma < \tau_0 \\ e^{-x\gamma} du e^{-\frac{u^3}{3}+xu} \left(\frac{1}{u-\tau}\right)^r & + \text{termes d'ordre inférieur, si } \sigma = \tau_0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ce résultat est bien en accord avec la preuve fournie par la méthode du point col (voir [34]), qui montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_\tau^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-x\gamma} A(x) & \text{si } \sigma < \tau_0 \\ e^{-x\gamma} A_r^-(x, \tau) & \text{si } \sigma = \tau_0 \end{cases}, \quad (10.24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\tau^{(n)}(y) = \begin{cases} -e^{y\gamma} A(y) & \text{si } \sigma < \tau_0 \\ -e^{y\gamma} A_r^+(y, \tau) & \text{si } \sigma = \tau_0 \end{cases}, \quad (10.25)$$

où $A(x)$ est la fonction d'Airy (4.12), et $A_r^\pm(x)$ sont les fonctions (10.12) et (10.13). Dès lors, quand $n \rightarrow \infty$, le noyau limitant correspond au *noyau d'Airy* $K^{(0)}$ si $\sigma < \tau_0$, et au *noyau de r -Airy* $K_\tau^{(r)}$ si $\sigma = \tau_0$. ■

Remarque : En fait, une estimation plus précise (mais beaucoup plus technique à démontrer : voir le Corollaire 2.4 dans [1]) permet d'obtenir la majoration suivante, qui est valable pour $x \in \mathbb{R}$ "suffisamment grand", C étant une constante indépendante de n :

$$\left| \log \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \Big|_{a=\rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}} \left(\text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1 + e^{-2\left(\tau_0 + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)}} \right) \leq \frac{\sqrt{2n} + \frac{x}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh\left(\tau_0 + \frac{\tau}{n^{1/3}}\right)} \right) - \log \mathbb{P} \left(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x \right) \right| \leq C n^{-1/3}. \quad (10.26)$$

Examinons à présent les équations aux dérivées partielles satisfaites par le processus de r -Airy.

Pour $E \subseteq \mathbb{R}$, appelons $\mathbb{P}_n(\alpha, E)$ la probabilité associée à l'ensemble hermitien gaussien déformé par une matrice A , c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}_n(\alpha, E) := \frac{1}{Z_n} \int_{\text{spec}(M) \in E} e^{-\text{Tr} \left(\frac{M^2}{2} - AM \right)} dM, \quad (10.27)$$

dans le cas où A est diagonale et constituée de r valeurs propres égales à α , et de $(n - r)$ valeurs propres nulles, comme en (10.4). La Proposition 7.10, appliquée dans la situation qui nous intéresse (lorsque $p = 2$, $n_1 = r$, $n_2 = n - r$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, $\partial_b^{(1)} = (-\partial/\partial\alpha)$, $\partial_b^{(2)} = (\partial/\partial\alpha)$), montre alors que $\log \mathbb{P}_n$ est une solution de l'EDP non linéaire³³ :

$$0 = \det \begin{pmatrix} F_+ & F_- & 0 \\ F'_+ & F'_- & \frac{G_+}{F_+} + \frac{G_-}{F_-} \\ F''_+ & F''_- & \frac{G'_+}{F_+} + \frac{G'_-}{F_-} \end{pmatrix}, \quad (10.28)$$

qui est équivalente à l'équation :

$$\begin{aligned} 0 = & \left(F_+ (\mathcal{B}_{-1} G_-) + F_- (\mathcal{B}_{-1} G_+) \right) \left(F_+ (\mathcal{B}_{-1} F_-) - F_- (\mathcal{B}_{-1} F_+) \right) \\ & - \left(F_+ G_- + F_- G_+ \right) \left(F_+ (\mathcal{B}_{-1}^2 F_-) - F_- (\mathcal{B}_{-1}^2 F_+) \right), \end{aligned} \quad (10.29)$$

³³Comme à notre habitude, si $E = \bigcup_{i=1}^r [z_{2i-1}, z_{2i}]$, nous avons posé $\mathcal{B}_k := \sum_{i=1}^{2r} z_i^{k+1} \frac{\partial}{\partial z_i}$. De même, pour plus de facilité, on note parfois aussi $\mathcal{B}_{-1} := '.$

avec :

$$\begin{aligned}
F_+ &= \mathcal{B}_{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n - r \quad , \quad F_- = -\mathcal{B}_{-1} \left(\mathcal{B}_{-1} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \log \mathbb{P}_n - (n - r) , \\
G_{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ H_1^{\pm}, F_{\pm} \right\}_{\mathcal{B}_{-1}} \mp \frac{1}{2} \left\{ H_2^{\pm}, F_{\pm} \right\}_{\partial/\partial \alpha} , \\
H_1^+ &= 4 \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n + 4 \alpha r + \frac{4 r (n - r)}{\alpha} , \\
H_1^- &= -2 \left(\mathcal{B}_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n - \frac{4 r (n - r)}{\alpha} , \\
H_2^+ &= 2 \left(\mathcal{B}_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - 1 - 2 \alpha \mathcal{B}_{-1} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n , \\
H_2^- &= -2 \left(\mathcal{B}_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - 1 \right) \left(\mathcal{B}_{-1} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \log \mathbb{P}_n .
\end{aligned}$$

Pour rappel, le lien entre la probabilité $\mathbb{P}_n$ (voir (10.27)) et la probabilité $\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a$ relative aux mouvements browniens contraints (voir (10.1)), est donné par les changements de variables (6.7), c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a (\text{tous les } x_i(t) \in E) = \mathbb{P}_n \left(\underbrace{\sqrt{\frac{2t}{1-t}} a}_{\alpha} , \underbrace{\sqrt{\frac{2}{t(1-t)}} E}_{E'} \right). \quad (10.30)$$

Par conséquent, avec le *rescaling* utilisé, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=\rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}} \left(\text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1 + e^{-2(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})}} \right) \in \frac{\sqrt{2n} + \frac{E}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})} \right) \\
&= \mathbb{P}_n \left(\rho_0 \sqrt{n} e^{(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})} , 2 \sqrt{n} + \frac{E}{n^{1/6}} \right). \quad (10.31)
\end{aligned}$$

Ceci suggère de définir, à la place de n , un nouveau paramètre z tel que :

$$z := n^{-1/6}, \quad (10.32)$$

de sorte que $z \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Dans le cas où $E =] -\infty, x]$, on peut donc écrire, en fonction de τ , x et z :

$$\begin{aligned}
&\log \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=\rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}} \left(\text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1 + e^{-2(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})}} \right) \leq \frac{\sqrt{2n} + \frac{x}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh(\sigma + \frac{\tau}{n^{1/3}})} \right) \\
&= \log \mathbb{P}_n \left(\frac{\rho_0}{z^3} e^{(\sigma + \tau z^2)} , \frac{2}{z^3} + x z \right) \\
&=: Q(\tau, x; z). \quad (10.33)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour extraire une équation différentielle satisfaite par le processus, il nous faut estimer (voir (10.29)) :

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \left(F_+ (\mathcal{B}_{-1} G_-) + F_- (\mathcal{B}_{-1} G_+) \right) \left(F_+ (\mathcal{B}_{-1} F_-) - F_- (\mathcal{B}_{-1} F_+) \right) \\ - \left(F_+ G_- + F_- G_+ \right) \left(F_+ (\mathcal{B}_{-1}^2 F_-) - F_- (\mathcal{B}_{-1}^2 F_+) \right) \end{array} \right\} \Bigg|_{\substack{\alpha \rightarrow (\rho_0/z^3) e^{(\sigma+\tau z^2)} \\ x' \rightarrow x z + (2/z^3) \\ n \rightarrow (1/z^6)}} , \quad (10.34)$$

puis déterminer l'asymptotique du résultat obtenu lorsque $z \rightarrow 0$.

Proposition 10.2 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [1]*)

Considérons la fonction $Q(\tau, x; z)$ définie en (10.33), et soit :

$$Q(\tau, x) := \lim_{z \rightarrow 0} Q(\tau, x; z). \quad (10.35)$$

Si $\rho_0 e^\sigma = 1$ (notons que cette valeur caractérise, en vertu de (10.8) et de la Proposition 10.1, le processus de r -Airy), alors $Q(\tau, x)$ est une solution de l'EDP non linéaire :

$$\begin{aligned} 0 = & 2 \left(r - \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2}, \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right\}_{\partial/\partial x} \\ & + 2 \left(r - \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2}, \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \tau \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - x \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) \right\}_{\partial/\partial x} \\ & + \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2}, \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^2 \partial x} \left(2 r \tau + \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} \right) \right\}_{\partial/\partial x} \\ & + \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (10.36)$$

dans laquelle les crochets sont des wronskiens par rapport à $(\partial/\partial x)$. Un calcul direct montre que (10.36) peut également s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2}, \left[\begin{array}{l} r^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + r \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau} + 2 \tau \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 (xQ)}{\partial \tau \partial x^2} + 2 \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^2 \partial x} \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^3} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x}, \frac{\partial (\tau Q)}{\partial \tau^2} \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}} \right] \right\}_{\partial/\partial x} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^3} - 4 \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (10.37)$$

Preuve : Comme nous l'avons expliqué plus haut, il s'agit d'évaluer (10.34) en faisant les substitutions indiquées. Remarquons à ce sujet qu'en

inversant la relation (10.33), il vient :

$$Q \left(\frac{1}{z^2} \log \left(\frac{\alpha z^3}{\rho_0 e^\sigma} \right), \frac{x'}{z} - \frac{2}{z^4} \right) = \log \mathbb{P}_n(\alpha, x'), \quad (10.38)$$

ce qui entraîne aussitôt :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathbb{P}_n}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha z^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau} \right) = \frac{z}{\rho_0 e^\sigma} e^{-\tau z^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau} \right), \\ \frac{\partial \log \mathbb{P}_n}{\partial x'} &= \frac{1}{z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en calculant (10.34), et ensuite en développant asymptotiquement la réponse en une série de puissances de z , on trouve (en tenant compte seulement des termes dominants lorsque $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $z \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \begin{aligned} &(F_+ (\mathcal{B}_{-1} G_-) + F_- (\mathcal{B}_{-1} G_+)) (F_+ (\mathcal{B}_{-1} F_-) - F_- (\mathcal{B}_{-1} F_+)) \\ &- (F_+ G_- + F_- G_+) (F_+ (\mathcal{B}_{-1}^2 F_-) - F_- (\mathcal{B}_{-1}^2 F_+)) \end{aligned} \right\} \Bigg|_{\substack{\alpha \rightarrow (\rho_0/z^3) e^{(\sigma+\tau z^2)} \\ x' \rightarrow x z + (2/z^3) \\ n \rightarrow (1/z^6)}} \\ &= \frac{4 (\rho_0 e^\sigma - 1)}{(\rho_0 e^\sigma)^4 z^{16}} \left(2r \rho_0 e^\sigma - \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^2 \partial x}, \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2} \right\}_{\partial/\partial x} \\ &\quad + \frac{\mathcal{E}(Q) + (\rho_0 e^\sigma - 1) \mathcal{F}(Q)}{z^{14}} + O\left(\frac{1}{z^{12}}\right), \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}(Q)$ correspond au membre de droite de (10.36), et où $\mathcal{F}(Q)$ est une autre expression qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

Il s'ensuit que, si $0 \leq \rho_0 e^\sigma < 1$, le terme dominant ci-dessus est d'ordre $(1/z^{16})$, et en prenant la limite $z \rightarrow 0$, nous tombons sur l'équation :

$$\left(2r \rho_0 e^\sigma - \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^2 \partial x}, \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2} \right\}_{\partial/\partial x} = 0, \quad (10.39)$$

qui est évidemment satisfaite, puisque nous savons que, dans ce cas, par (10.10) et les résultats donnés dans l'introduction, Q est le logarithme de la distribution de Tracy-Widom, qui est indépendante de τ (le *processus d'Airy* à un temps est *stationnaire*) !

Par contre, si $\rho_0 e^\sigma = 1$, le coefficient du terme en $(1/z^{16})$ s'annule identiquement, si bien que le terme dominant est maintenant d'ordre $(1/z^{14})$, témoignant de la *transition de phase* qui s'opère vers le *processus de r-Airy*. L'équation obtenue quand $z \rightarrow 0$ est alors :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{E}(Q(\tau, x; z)) = \mathcal{E}(Q(\tau, x)) = 0. \quad (10.40)$$

■

11 Asymptotique du processus de r-Airy dans le passé

Dans cette section, nous allons établir le comportement asymptotique du *processus de r-Airy* lorsque le temps $\tau \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire $t \rightarrow 0$ dans l'échelle initiale : voir (9.13). Autrement dit, étant donné le logarithme du déterminant de Fredholm :

$$Q(\tau, x) := \log \mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x) = \log \det (I - K_\tau^{(r)})_{(x, \infty)}, \quad (11.1)$$

où $K_\tau^{(r)}$ est le *noyau de r-Airy* (10.11), nous nous proposons de déterminer les premiers termes du développement en série :

$$Q(\tau, x) = Q_0(x) + \frac{Q_1(x)}{\tau} + \frac{Q_2(x)}{\tau^2} + \frac{Q_3(x)}{\tau^3} + \dots, \quad (11.2)$$

en prenant pour “*condition initiale*” le logarithme de la distribution de Tracy-Widom (4.21), $K^{(0)}$ étant le noyau d’Airy (9.3) :

$$Q_0(x) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} Q(\tau, x) = \log \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x) = \log \det (I - K^{(0)})_{(x, \infty)}. \quad (11.3)$$

L’une des premières choses que l’on peut remarquer, c’est que cette limite est compatible avec le contour d’intégration intervenant dans la définition des fonctions $A_r^\pm$: voir (10.12) et (10.13). En effet, l’intégrand dans A_r^- possède un *pôle* en $a = (-i\tau)$, et ce pôle doit se situer *au-dessus* du contour $\mathcal{C}$. Cela restera bien sûr le cas si nous passons à la limite $\tau \rightarrow -\infty$.

Ensuite, il se fait que l’EDP (10.36) de la Proposition 10.2 constitue un outil de choix dans la détermination des premiers termes de cette expansion. Ceci fournit du même coup un *exemple concret d’application*, et montre l’intérêt d’avoir calculé cette EDP.

Notre travail est cependant loin d’être terminé, car, en insérant (11.2) dans l’EDP (10.36), il subsistera certaines *constantes d’intégration* qui ne pourront pas être directement fixées par l’équation aux dérivées partielles. C’est pourquoi notre stratégie consistera aussi à obtenir, au préalable, le comportement *pour $x \rightarrow \infty$* des fonctions $Q_n(x)$.

On peut également se poser la question de connaître les premiers termes du développement asymptotique, pour $\tau \rightarrow -\infty$, du *noyau de r-Airy* lui-même, c’est-à-dire :

$$K_\tau^{(r)} = K^{(0)} + \frac{K_1^{(r)}}{\tau} + \frac{K_2^{(r)}}{\tau^2} + \frac{K_3^{(r)}}{\tau^3} + \dots, \quad (11.4)$$

sachant que $K^{(0)}$ coïncide avec le noyau d'Airy. La Proposition suivante répond à cette question.

Proposition 11.1 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [1]*)

En termes de la fonction d'Airy $A(u)$ donnée en (4.12), qui satisfait l'équation $A''(u) = uA(u)$, et de ses dérivées, nous avons :

$$K^{(0)}(u, v) = \frac{A(u) A'(v) - A'(u) A(v)}{u - v}, \quad (11.5)$$

$$K_1^{(r)}(u, v) = -r A(u) A(v),$$

$$K_2^{(r)}(u, v) = -\frac{r^2}{2} (A'(u) A(v) + A(u) A'(v)) + \frac{r}{2} (A(u) A'(v) - A'(u) A(v)),$$

$$\begin{aligned} K_3^{(r)}(u, v) &= -\frac{r^3}{6} (A''(u) A(v) + 2 A'(u) A'(v) + A(u) A''(v)) \\ &\quad - \frac{r^2}{2} (u - v) A(u) A(v) - \frac{r}{3} (A''(u) A(v) - A'(u) A'(v) + A(u) A''(v)). \end{aligned}$$

Plus généralement, si $n \geq 1$, l'expression $K_n^{(r)}$ est de la forme :

$$\begin{aligned} K_n^{(r)}(u, v) &= -\frac{r^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{n-1} A(u+w) A(v+w) \Big|_{w=0} \\ &\quad - \frac{r^{n-1}}{2(n-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{n-2} (A'(u+w) A(v+w) - A(u+w) A'(v+w)) \Big|_{w=0} \\ &\quad - \frac{r^{n-2}}{(n-3)!} \left(-\frac{(3n-1)}{24} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{n-1} A(u+w) A(v+w) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{n-3} A'(u+w) A'(v+w) \right) \Big|_{w=0} \\ &\quad + \left[\text{polynôme en } r \text{ de degré } (n-3) \right]. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Notons que, contrairement au noyau de r -Airy (10.11), les fonctions $K_n^{(r)}$ contiennent des dérivées mais jamais d'intégrales de la fonction d'Airy. Les expressions sont d'ailleurs quadratiques en $A(u)$ et en ses dérivées. De plus, $K_n^{(r)}(u, v)$ est un polynôme en r de degré n , sans terme indépendant, avec des coefficients qui sont alternativement symétriques et anti-symétriques en u et v (le coefficient du terme dominant étant toujours symétrique).

Preuve : La Proposition 11.1 admet une démonstration relativement simple, essentiellement basée sur un développement de Taylor. En effet, le noyau de r -Airy $K_\tau^{(r)}$ peut s'écrire, par (10.11) :

$$K_\tau^{(r)}(u, v) = \int_0^\infty dw \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} \frac{da db}{4\pi^2} e^{\frac{1}{3} i b^3 + i b(w+v)} e^{\frac{1}{3} i a^3 + i a(w+u)} \left(\frac{-i b - \tau}{i a - \tau} \right)^r.$$

Or, la dépendance en τ se fait à travers le dernier facteur qui apparaît dans l'intégrand, et celui-ci admet le développement de Taylor en $(1/\tau)$ suivant, où l'on a posé $\alpha = ia$ et $\beta = ib$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-\beta - \tau}{\alpha - \tau}\right)^r &= \left(1 + \frac{\left(\frac{\alpha + \beta}{\tau}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)}\right)^r \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^n} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\frac{(r(\alpha + \beta))^{n-2j}}{(r(\alpha + \beta))^{n-2j-1}} \frac{Q_{2j}(\alpha, \beta)}{(\alpha - \beta)} \tilde{Q}_{2j}(\alpha, \beta) \right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau^n} \left(\frac{(r(\alpha + \beta))^n}{n!} + \frac{(r(\alpha + \beta))^{n-1}(\alpha - \beta)}{2(n-2)!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(r(\alpha + \beta))^{n-2}}{(n-3)!} \left(\frac{(3n-1)(\alpha + \beta)^2}{24} - \frac{(n-1)\alpha\beta}{2} \right) + \dots \right).
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Dans cette formule, Q_{2j} et $\tilde{Q}_{2j}$ sont en général des polynômes homogènes à deux variables, de degré $(2j)$, qui sont *symétriques* en leurs arguments α et β , car la première expression est invariante sous l'involution $r \rightarrow -r$, $\alpha \rightarrow -\beta$. Notons également que les coefficients de $(1/\tau^n)$ sont tous divisibles par r , ce qui est logique, l'expression étant égale à 1 si $r = 0$. Ainsi donc, nous avons :

$$\left(\frac{-ib - \tau}{ia - \tau}\right)^r = 1 + \frac{r}{\tau}(ia + ib) + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{r^2}{2}(ia + ib)^2 + \frac{r}{2}(ia + ib)(ia - ib) \right) + \dots$$

Ce développement apparaît à l'intérieur du noyau $K_\tau^{(r)}$. Si on s'arrêtait à l'ordre 0, on retrouverait le noyau d'Airy. On peut cependant observer que multiplier l'intégrand du *noyau d'Airy* $K^{(0)}(u, v)$ par (ia) , cela revient au même que de prendre $(\partial K^{(0)}/\partial u)$; et multiplier l'intégrand de $K^{(0)}(u, v)$ par (ib) , cela revient au même que de prendre $(\partial K^{(0)}/\partial v)$. En fait, il est facile de remarquer que cela induit la “recette” suivante :

$$\begin{aligned}
&(ia)^{k_1} (ib)^{k_2} (ia + ib)^n \\
\iff &\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{k_2} A(u + w) A(v + w) dw \\
&= - \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{n-1} A^{(k_1)}(u + w) A^{(k_2)}(v + w) \Big|_{w=0}.
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Les propriétés de la Proposition 11.1 découlent alors immédiatement de l'expansion (11.7) ainsi que de la “recette” (11.8) dont nous disposons. En particulier, les premiers termes $K_n^{(r)}$ sont tels qu'annoncés en (11.5). De plus, les noyaux obtenus ne contiendront jamais *d'intégrations*, puisque le facteur $(ia + ib)$ est présent dans chaque terme d'ordre $n \geq 1$ de (11.7). ■

Intéressons-nous maintenant au développement de $Q(\tau, x)$, qui correspond au logarithme du déterminant de Fredholm de $K_\tau^{(r)}$ sur (x, ∞) : voir (11.1) et (11.2). La *fonction d'Airy* $A(x)$ intervient très souvent dans les calculs qui vont suivre, et son comportement pour $x \rightarrow \infty$ est donné par :

$$A(x) = \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{(x^{3/2})^i} + \dots \right) \text{ pour } x \rightarrow \infty. \quad (11.9)$$

C'est pourquoi il est souhaitable d'adopter systématiquement la notation suivante, valable lorsque $x \rightarrow \infty$, $\ell \geq 1$ étant un entier :

$$O(A^\ell) = O\left(\left(\frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\right)^\ell x^k\right) \quad (\text{pour tout } k \in \mathbb{R}). \quad (11.10)$$

Par exemple, et ceci nous sera utile dans la suite, on peut sans peine déduire les estimations (voir [1], [24], [32]) :

$$\int_x^\infty A(u) du = O(A), \quad (11.11)$$

$$\int_x^\infty A^2(u) du = A'^2(x) - A''(x)A(x) = O(A^2). \quad (11.12)$$

L'égalité intermédiaire dans (11.12) est une conséquence du fait que la fonction d'Airy satisfait l'ODE $A''(x) = xA(x)$, et que $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0$. $A^2(x)$ est donc bien la dérivée par rapport à x de $(A''(x)A(x) - A'^2(x))$.

Dans la Proposition ci-dessous, nous relierons les termes $Q_n(x)$ apparaissant dans (11.2) à la *trace* des noyaux $K_n^{(r)}$ (voir (11.6)), et nous établissons aussi le comportement asymptotique des $Q_n(x)$ pour $x \rightarrow \infty$.

Proposition 11.2 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [1]*)

La fonction $Q(\tau, x)$ admet, si $\tau \rightarrow -\infty$, un développement de la forme :

$$Q(\tau, x) = \log \mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x) = Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{\tau^n}, \quad (11.13)$$

dans lequel $Q_0(x) = \log \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x)$ est le logarithme de la distribution de Tracy-Widom (voir (11.3)), et où, pour $n \geq 1$:

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{n-2j} Q_{n,n-2j}(x) = -\text{Tr } K_n^{(r)} + O(A^4), \quad (11.14)$$

$K_n^{(r)}$ étant le noyau intermédiaire d'ordre n , décrit dans la Proposition 11.1. En outre, quand $x \rightarrow \infty$, les $Q_n(x)$ et toutes leurs dérivées $\rightarrow 0$, et plus précisément nous avons :

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= r \left(A'^2(x) - A(x) A''(x) + O(A^4) \right), \\
Q_2(x) &= -\frac{r^2}{2} (A^2(x) + O(A^4)), \\
Q_3(x) &= -\frac{r^3}{3!} \left((A^2(x))' + O(A^4) \right) \\
&\quad - \frac{r}{3} \left((A^2(x))' + 3 \int_x^\infty A'^2(u) du + O(A^4) \right) + O(A^4), \\
&\vdots \\
Q_n(x) &= -\frac{r^n}{n!} \left((A^2(x))^{(n-2)} + O(A^4) \right) \\
&\quad - \frac{r^{n-2}}{(n-3)!} \left(\frac{(3n-1)}{24} (A^2(x))'' - \frac{(n-1)}{2} (A'(x))^2 + O(A^4) \right)^{(n-4)} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{n-2j} T_{n,n-2j}(A) + O(A^4),
\end{aligned}$$

où $T_{n,n-2j}(A)$ désigne un certain polynôme quadratique en A et A' , dont les coefficients dépendent de x et de $\int_x^\infty du$ (polynôme quadratique en A et A' , avec des coefficients pouvant dépendre de u).

Preuve : En utilisant l'expansion (11.4) pour le noyau de r -Airy, on tire aussitôt l'identité ³⁴ :

$$\begin{aligned}
I - K_\tau^{(r)} &= I - K^{(0)} - \frac{K_1^{(r)}}{\tau} - \frac{K_2^{(r)}}{\tau^2} - \frac{K_3^{(r)}}{\tau^3} - \dots \\
&= (I - K^{(0)}) \left(I - \sum_{n=1}^\infty \frac{L_n}{\tau^n} \right),
\end{aligned} \tag{11.15}$$

avec :

$$L_n = (I - K^{(0)})^{-1} K_n^{(r)} =: (I + R) K_n^{(r)}. \tag{11.16}$$

En langage algébrique, on dit que R est le *résolvant* du noyau d'Airy $K^{(0)}$, défini en (9.3). Etant donné que $\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$, et puisque

³⁴Dans ce qui suit, les opérateurs seront toujours supposés agir sur l'espace $L^2(x, \infty)$, de sorte que la dépendance en x ne sera pas systématiquement indiquée.

le *logarithme d'un déterminant* est égal à la *trace du logarithme* (identité valable aussi pour les déterminants de Fredholm), il vient par (11.15) :

$$\begin{aligned}
Q(\tau, x) &= \log \det \left(I - K_\tau^{(r)} \right)_{(x, \infty)} = \text{Tr} \log \left(I - K_\tau^{(r)} \right) \\
&= \text{Tr} \log \left(I - K^{(0)} \right) + \text{Tr} \log \left(I - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{\tau^n} \right) \\
&= \text{Tr} \log \left(I - K^{(0)} \right) - \text{Tr} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{\tau^n} \right)^m \right), \quad (11.17)
\end{aligned}$$

et en identifiant les coefficients des puissances de $(1/\tau)$ avec les fonctions $Q_n(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= -\text{Tr}(L_1) \quad , \quad Q_2(x) = -\text{Tr} \left(L_2 + \frac{L_1^2}{2} \right), \\
Q_3(x) &= -\text{Tr} \left(L_3 + L_1 L_2 + \frac{L_1^3}{3} \right), \\
Q_4(x) &= -\text{Tr} \left(L_4 + \frac{L_2^2}{2} + L_1 L_3 + L_1^2 L_2 + \frac{L_1^4}{4} \right), \quad \dots
\end{aligned}$$

Plus généralement, le coefficient de $(1/\tau^n)$ est de la forme :

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= -\text{Tr}(L_n) + \text{Tr} P_n(L_1, \dots, L_{n-1}) \\
&= -\text{Tr} \left((I + R) K_n^{(r)} \right) + \text{Tr} P_n(L_1, \dots, L_{n-1}) \\
&= -\text{Tr} K_n^{(r)} + \text{Tr} S_n(K_1^{(r)}, \dots, K_{n-1}^{(r)}, R), \quad (11.18)
\end{aligned}$$

où P_n et S_n sont des polynômes dont tous les termes apparaissent avec un degré ≥ 2 (ils ne comportent donc pas de terme indépendant ni de terme linéaire). Il s'avère que la *contribution dominante* de $Q_n(x)$, pour $x \rightarrow \infty$, est donnée par le premier terme $(-\text{Tr} K_n^{(r)})$, et que :

$$\text{Tr} S_n(K_1^{(r)}, \dots, K_{n-1}^{(r)}, R) = O(A^4), \quad (11.19)$$

comme indiqué dans le membre de droite de (11.14). On peut en comprendre la raison en regardant un exemple typique :

$$\begin{aligned}
\left| \text{Tr} S_1 \right| &= \left| -\text{Tr} \left(R K_1^{(r)} \right) \right| \leq \left| \text{Tr} \left((R - K^{(0)}) K_1^{(r)} \right) \right| + \left| \text{Tr} \left(K^{(0)} K_1^{(r)} \right) \right| \\
&\leq \left(\|R - K^{(0)}\|_\infty + \|K^{(0)}\|_\infty \right) \int_x^\infty du \int_x^\infty dv |K_1^{(r)}(u, v)|,
\end{aligned}$$

où l'on a introduit la *norme* $\|\cdot\|_\infty$, qui est définie simplement par :

$$\|B\|_\infty := \sup_{u, v \in (x, \infty)} |B(u, v)|, \quad (11.20)$$

pour un noyau B agissant sur $L^2(x, \infty)$. Mais on calcule alors aussitôt, sachant que la fonction d'Airy $A(u)$ est *positive* et *décroissante* pour $u \geq 0$, que :

$$\begin{aligned} \|K^{(0)}\|_{\infty} &= \sup_{u,v \in (x, \infty)} \left| \int_0^{\infty} A(u+w) A(v+w) dw \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} A(x+w)^2 dw = \int_x^{\infty} A(w)^2 dw = O(A^2), \end{aligned} \quad (11.21)$$

en vertu de (11.12). L'estimation de $\|R - K^{(0)}\|_{\infty}$ est, quant à elle, un peu plus difficile à obtenir. On peut cependant remarquer, en se souvenant de la définition du *résolvant* R du noyau d'Airy (voir (11.16)), que :

$$\begin{aligned} R - K^{(0)} &= (I - K^{(0)})^{-1} - I - K^{(0)} = K^{(0)^2} (I + K^{(0)} + K^{(0)^2} + K^{(0)^3} + \dots) \\ &= (I - K^{(0)})^{-1} K^{(0)^2}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

D'autre part, en partant de l'égalité suivante, valable pour un noyau $F(u, v)$ et une fonction continue à valeurs réelles $f(v)$:

$$\begin{aligned} \|Ff\|_{\infty} &= \sup_{u \in (x, \infty)} \left| \int_x^{\infty} F(u, v) f(v) dv \right| \\ &\leq \sup_{v \in (x, \infty)} |f(v)| \cdot \sup_{u \in (x, \infty)} \int_x^{\infty} |F(u, v)| dv =: \|f\|_{\infty} \cdot \|F\|_1, \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $\|K^{(0)}\|_1 = O(A^2)$ pour $x \rightarrow \infty$ (exercice facile, du même genre que (11.21) pour la norme " ∞ "), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \|R - K^{(0)}\|_{\infty} &= \|(I - K^{(0)})^{-1} K^{(0)^2}\|_{\infty} \\ &= \sup_{v \in (x, \infty)} \|(I - K^{(0)})^{-1} K^{(0)^2}(\cdot, v)\|_{\infty} \\ &\leq \sup_{v \in (x, \infty)} \left(\|(I - K^{(0)})^{-1}\|_1 \cdot \|K^{(0)^2}(\cdot, v)\|_{\infty} \right) \\ &\leq \sup_{v \in (x, \infty)} \left(\frac{1}{1 - \|K^{(0)}\|_1} \cdot \|K^{(0)}\|_1 \cdot \|K^{(0)}(\cdot, v)\|_{\infty} \right) \\ &= \left(\frac{\|K^{(0)}\|_1}{1 - \|K^{(0)}\|_1} \right) \cdot \|K^{(0)}\|_{\infty} = O(A^4). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Par conséquent, en combinant (11.21) et (11.23), ajouté au fait que

$K_1^{(r)}(u, v) = -r A(u) A(v)$ par la Proposition 11.1, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \left| \text{Tr } S_1 \right| &\leq \left(\|R - K^{(0)}\|_\infty + \|K^{(0)}\|_\infty \right) \int_x^\infty du \int_x^\infty dv |K_1^{(r)}(u, v)| \\ &\leq (O(A^4) + O(A^2)) \cdot \int_x^\infty du \int_x^\infty dv A(u) A(v) \\ &\leq O(A^2) \cdot \left(\int_x^\infty A(u) du \right)^2 \leq O(A^4), \end{aligned}$$

en vertu de (11.11). De la même façon, en général, si l'on considère la *trace* d'un terme de degré ℓ en $K_1^{(r)}, \dots, K_{n-1}^{(r)}, R$, elle sera d'ordre $O(A^{2\ell})$ pour $x \rightarrow \infty$. Comme le polynôme S_n ne contient que des termes au minimum *quadratiques*, cela établit (11.19).

Enfin, il s'agit de connaître le comportement de $(-\text{Tr } K_n^{(r)})$. Pour cela, il suffit d'évaluer les noyaux $K_n^{(r)}$ sur la *diagonale*, et d'intégrer sur (x, ∞) . Notons que les parties *anti-symétriques* des noyaux ne vont pas contribuer, car elles s'annulent sur la diagonale. Ainsi, par la Proposition 11.1, nous voyons que $K_n^{(r)}(u, u)$ est un polynôme en r de degré n , dont un coefficient sur deux est nul, et qui a la forme :

$$\begin{aligned} K_n^{(r)}(u, u) &= -\frac{r^n}{n!} (A^2(u))^{(n-1)} \\ &\quad - \frac{r^{n-2}}{(n-3)!} \left(\frac{(3n-1)}{24} (A^2(u))^{(n-1)} - \frac{(n-1)}{2} (A'^2(u))^{(n-3)} \right) + \dots \end{aligned}$$

L'asymptotique des $Q_n(x)$ pour $x \rightarrow \infty$ en découle immédiatement, ce qui achève la démonstration de la Proposition 11.2. ■

Nous sommes à présent en mesure de calculer explicitement les fonctions $Q_n(x)$ (du moins pour les premières valeurs de n). Rappelons que, pour y parvenir, nous allons exploiter le fait que $Q(\tau, x)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles (10.36). Les *constantes d'intégration* qui vont inévitablement apparaître seront alors fixées par la connaissance du comportement asymptotique des $Q_n(x)$ pour $x \rightarrow \infty$ (voir Proposition 11.2).

Proposition 11.3 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [1]*)

La fonction $Q(\tau, x)$ admet, si $\tau \rightarrow -\infty$, un développement de la forme :

$$Q(\tau, x) = \log \mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x) = Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{\tau^n}, \quad (11.24)$$

dans lequel $Q_0(x) = \log \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x)$ est le logarithme de la distribution de Tracy-Widom (voir (11.3)), et où nous avons :

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= r Q'_0(x) \quad , \quad Q_2(x) = \frac{r^2}{2!} Q''_0(x) \quad , \quad Q_3(x) = \frac{r^3}{3!} Q'''_0(x) + \frac{r}{3} x Q'_0(x) , \\
Q_4(x) &= \frac{r^4}{4!} Q_0^{(4)}(x) + r^2 \left[\frac{x}{3} Q''_0(x) + \frac{7}{12} Q'_0(x) \right] , \\
Q_5(x) &= \frac{r^5}{5!} Q_0^{(5)}(x) + r^3 \left[\frac{x}{3(2!)} Q'''_0(x) + \frac{7}{12} Q''_0(x) \right] + \frac{r}{5} \mathcal{F}_5(x) , \\
Q_6(x) &= \frac{r^6}{6!} Q_0^{(6)}(x) + r^4 \left[\frac{x}{3(3!)} Q_0^{(4)}(x) + \frac{7}{12(2!)} Q'''_0(x) \right] \\
&\quad + \frac{r^2}{5} \left[\mathcal{F}'_5(x) + \frac{5}{18} \left(x^2 Q''_0(x) + 13(x + c_6) Q'_0(x) \right) \right] , \\
&\quad \vdots \\
Q_n(x) &= \frac{r^n}{n!} Q_0^{(n)}(x) + r^{n-2} \left[\frac{x}{3(n-3)!} Q_0^{(n-2)}(x) + \frac{7}{12(n-4)!} Q_0^{(n-3)}(x) \right] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} r^{n-2j} Q_{n,n-2j}(x) .
\end{aligned}$$

Ci-dessus, c_6 est une certaine constante (indépendante de x) qui apparaît dans la formule pour $Q_6(x)$; tandis que $\mathcal{F}_5(x)$, qui intervient dans les formules pour $Q_5(x)$ et $Q_6(x)$, est une expression égale à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_5(x) &:= x^2 Q'_0(x) + 4x Q_0(x) + Q_0'^2(x) + 10 \left(\int_x^\infty du \, Q_0(u) \right) \\
&\quad - 6 \left(\int_x^\infty dy \int_y^\infty du \, Q_0''^2(u) \right) .
\end{aligned} \tag{11.25}$$

Preuve : Tout d'abord, rappelons que $Q(\tau, x)$ peut s'écrire sous la forme développée suivante (voir (11.13) et (11.14)) :

$$\begin{aligned}
Q(\tau, x) &= Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{\tau^n} \\
&= Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\tau} \right)^n \left(Q_{nn}(x) + \frac{1}{r^2} Q_{n,n-2}(x) + \frac{1}{r^4} Q_{n,n-4}(x) + \dots \right) .
\end{aligned} \tag{11.26}$$

Ensuite, si l'on examine attentivement l'équation aux dérivées partielles (10.37), qui est équivalente à (10.36), on se rend compte qu'il est possible de la hiérarchiser en attribuant un poids égal à 1 aux variables r et τ . L'équation

devient alors³⁵ :

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2}, r^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \right\} \quad (\text{poids} = 1) \\
&+ \left\{ \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau \partial x^2}, r \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\tau \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 (x Q)}{\partial \tau \partial x^2} + 2 \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau \partial x}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right\} \right) \right\} \quad (\text{poids} = -1) \\
&+ \left[\text{autres termes de poids} < -1 \right].
\end{aligned}$$

En injectant (11.26) dans cette EDP, et puis en regroupant les termes qui contribuent à un même poids, on obtient une équation de la forme :

$$0 = W_1 + W_{-1} + W_{-3} + \dots, \quad (11.27)$$

où W_j possède un *poids global* égal à j . Puisque cette égalité est valable pour $\tau \rightarrow -\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $r > 0$, ceci entraîne en fait que chaque $W_j = 0$ ($j = 1, -1, -3, \dots$). Un calcul explicite permet d'établir que :

$$\begin{aligned}
W_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+2}}{\tau^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ (n-j) Q''_{n-j, n-j}, Q'''_{jj} \right\}, \\
W_{-1} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\tau^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left\{ (n-j) Q''_{n-j, n-j}, \begin{pmatrix} Q'''_{j, j-2} + 2(j-1)^2 Q'_{j-1, j-1} \\ + (j-1) x Q''_{j-1, j-1} \\ - 2 \sum_{\ell+k=j-1} \ell \{Q'_{\ell\ell}, Q''_{kk}\} \end{pmatrix} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \{ (n-j) Q''_{n-j, n-j-2}, Q'''_{jj} \} \right).
\end{aligned}$$

L'information selon laquelle $W_1 = 0$ sera utilisée afin de déterminer la forme du coefficient $Q_{nn}(x)$. Nous allons pour cela procéder par récurrence. Notons, pour commencer, que $W_1 = 0$ est vérifié pour $\tau \rightarrow -\infty$ et pour tout entier $r > 0$, et par conséquent nous avons :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \{ (n-j) Q''_{n-j, n-j}, Q'''_{jj} \} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}_0 \\ Q_{00}(x) = Q_0(x) \end{cases}. \quad (11.28)$$

- Si $n = 1$, cette équation donne simplement $\{Q''_{11}, Q'''_0\} = 0$. Or, un wronskien $\{f, g\}$ ne peut être nul que si les fonctions f et g sont proportionnelles. Ceci conduit, par une intégration directe, à :

$$Q_{11}(x) = c_0 Q'_0(x) + \alpha x + \beta, \quad (11.29)$$

³⁵Les crochets ci-dessous sont tous des *wronskiens* par rapport à $(\partial/\partial x)$.

c_0 , α et β étant des constantes. Compte tenu de l'asymptotique pour $x \rightarrow \infty$ des $Q_n(x)$ (Proposition 11.2), il faut que $\alpha = \beta = 0$. On peut également utiliser le fait bien connu (voir [1], [24]) que les dérivées du logarithme de la distribution de Tracy-Widom se comportent à l'infini selon :

$$Q'_0(x) = A'^2(x) - A(x) A''(x) + O(A^3), \quad (11.30)$$

$$Q_0^{(n)}(x) = -(A^2)^{(n-2)}(x) + O(A^3) \quad (n \geq 2). \quad (11.31)$$

Dès lors, par la Proposition 11.2 et par (11.30), on a pour $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 0 = Q_{11} - c_0 Q'_0 &= (A'^2 - A A'')(1 - c_0) + O(A^3) \\ &= (1 - c_0) O(A^2) + O(A^3), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $c_0 = 1$, et donc $Q_{11}(x) = Q'_0(x)$.

- Si $n = 2$, l'équation (11.28) se réduit à :

$$0 = \{2 Q''_{22}, Q_0'''\} + \{Q_{11}'', Q_{11}'''\} = \{Q_0''', -2 Q''_{22} + Q_0^{(4)}\},$$

dont la solution, par intégration directe, est donnée par :

$$Q_{22}(x) = \frac{1}{2} Q_0''(x) + c_1 Q'_0(x) + \alpha' x + \beta', \quad (11.32)$$

pour certaines constantes c_1 , α' et β' . A nouveau, et pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\alpha' = \beta' = 0$. D'où, en utilisant la Proposition 11.2 ainsi que (11.30) et (11.31), il vient, lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 0 = Q_{22} - \frac{Q_0''}{2} - c_1 Q'_0 &= -\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} - c_1 (A'^2 - A A'') + O(A^3) \\ &= c_1 O(A^2) + O(A^3), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $c_1 = 0$, et donc $Q_{22}(x) = \frac{1}{2} Q_0''(x)$.

- Par récurrence, supposons que $Q_{jj}(x) = \frac{Q_0^{(j)}(x)}{j!}$ pour tout entier j tel que $0 \leq j < n$. Il s'agit de montrer que $Q_{nn}(x) = \frac{Q_0^{(n)}(x)}{n!}$. Posons :

$$Q_{nn}(x) = \frac{Q_0^{(n)}(x)}{n!} + R_n(x). \quad (11.33)$$

En insérant ces expressions dans l'équation (11.28), on trouve que la plupart des termes se simplifient deux à deux, conduisant finalement à $\{Q_0''', R_n''\} = 0$, dont la solution est évidemment :

$$R_n(x) = c_n Q_0'(x) + \alpha_n'' x + \beta_n'', \quad (11.34)$$

pour certaines constantes c_n , α_n'' et β_n'' . A nouveau, et toujours pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\alpha_n'' = \beta_n'' = 0$. Ainsi, en utilisant la Proposition 11.2, (11.30) et (11.31), nous obtenons pour $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 0 &= Q_{nn} - \frac{Q_0^{(n)}}{n!} - c_n Q_0' \\ &= -\frac{1}{n!} (A^2)^{(n-2)} + \frac{1}{n!} (A^2)^{(n-2)} - c_n (A'^2 - A A'') + O(A^3) \\ &= c_n O(A^2) + O(A^3), \end{aligned}$$

ce qui entraîne $c_n = 0 = R_n$, et établit par la même occasion la forme annoncée pour tous les $Q_{nn}(x)$.

De la même façon, il est possible de calculer certains des termes $Q_{n,n-2k}(x)$ avec $k > 0$, mais pour cela il faut exploiter les autres identités découlant de (11.27). Par exemple, en utilisant le fait que $W_{-1} = 0$, on peut démontrer l'égalité :

$$Q_{n,n-2}(x) = \frac{x}{3(n-3)!} Q_0^{(n-2)}(x) + \frac{7}{12(n-4)!} Q_0^{(n-3)}(x). \quad (11.35)$$

Les calculs requis sont tout à fait similaires à ce qui précède (incluant un raisonnement par récurrence), et ils sont tous détaillés dans [1]. Cela permet d'établir la Proposition 11.3. ■

En corollaire, nous avons :

Proposition 11.4 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [1]*)

Comparaison entre les processus d'Airy et de r -Airy.

Appelons $\mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x)$ (resp. $\mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x)$) la probabilité associée au processus de r -Airy (resp. au processus d'Airy simple). Lorsque $\tau \rightarrow -\infty$, ces deux quantités sont reliées par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x) &= \mathbb{P}\left(\mathcal{A}(\tau) \leq \left(x + \frac{r}{\tau}\right) \left(1 + \frac{r}{3\tau^3}\right) + \frac{r^2}{4\tau^4}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{r\mathcal{F}_5}{5\tau^5} + O\left(\frac{1}{\tau^6}\right)\right). \end{aligned} \quad (11.36)$$

Intuitivement, cela signifie que, dans le processus de r -Airy et ce dès le départ, la présence des r particules “forcées” d’atteindre une cible strictement positive a pour effet de déplacer le bord supérieur du nuage de particules vers la droite (au premier ordre comme $\left|\frac{r}{\tau}\right|$).

De plus, la moyenne et la variance du bord supérieur se comportent comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup \mathcal{A}^{(r)}(\tau)\right) &= \mathbb{E}\left(\sup \mathcal{A}^{(0)}(\tau)\right) \left(1 - \frac{r}{3\tau^3}\right) \\ &\quad - \frac{r}{\tau} - \frac{r^2}{4\tau^4} + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right), \end{aligned} \quad (11.37)$$

$$\text{Var}\left(\sup \mathcal{A}^{(r)}(\tau)\right) = \text{Var}\left(\sup \mathcal{A}^{(0)}(\tau)\right) \left(1 - \frac{2r}{3\tau^3}\right) + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right). \quad (11.38)$$

Preuve : En utilisant les résultats de la Proposition 11.3, et en identifiant deux séries de Taylor (pour Q_0 et Q'_0) dans l’égalité ci-dessous, on voit que :

$$\begin{aligned} Q(\tau, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\tau}\right)^n \frac{Q_0^{(n)}(x)}{n!} + \left(\frac{xr}{3\tau^3} + \frac{7r^2}{12\tau^4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\tau}\right)^n \frac{Q_0^{(n+1)}(x)}{n!} \\ &\quad + \frac{r}{5\tau^5} \mathcal{F}_5 + O\left(\frac{1}{\tau^6}\right) \\ &= Q_0\left(x + \frac{r}{\tau}\right) + \left(\frac{xr}{3\tau^3} + \frac{7r^2}{12\tau^4}\right) Q'_0\left(x + \frac{r}{\tau}\right) + \frac{r}{5\tau^5} \mathcal{F}_5 + O\left(\frac{1}{\tau^6}\right) \\ &= Q_0\left(x + \frac{r}{\tau} + \frac{xr}{3\tau^3} + \frac{7r^2}{12\tau^4}\right) + \frac{r}{5\tau^5} \mathcal{F}_5 + O\left(\frac{1}{\tau^6}\right). \end{aligned}$$

La probabilité $\mathbb{P}\left(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x\right)$ s’obtient alors en prenant l’exponentielle de $Q(\tau, x)$, ce qui, compte tenu du fait que $e^{Q_0(x)} = \mathbb{P}\left(\mathcal{A}(\tau) \leq x\right)$, fournit la comparaison (11.36). Il reste à établir l’affirmation concernant la *moyenne* et la *variance* du processus. Pour cela, considérons le *moment d’ordre ℓ* par rapport à la densité de probabilité $\frac{d}{dx}\mathbb{P}$, qui est défini par :

$$\mu_\ell^{(r)}(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^\ell \left[\frac{d}{dx} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x\right) \right] dx \quad (11.39)$$

dans le cas du processus de r -Airy, et par :

$$\mu_\ell^{(0)} := \int_{-\infty}^{+\infty} x^\ell \left[\frac{d}{dx} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}(\tau) \leq x\right) \right] dx \quad (11.40)$$

dans le cas du processus d’Airy. Remarquons, en particulier, que la *moyenne* est donnée par μ_1 , et que la *variance* s’obtient en évaluant $(\mu_2 - \mu_1^2)$.

En partant de (11.36), et en notant dans ce qui suit $P_0(x) := \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq x)$ pour plus de facilité, on calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \mathbb{P}(\mathcal{A}^{(r)}(\tau) \leq x) &= \left(1 + \frac{r}{3\tau^3}\right) \frac{d}{dy} \mathbb{P}(\mathcal{A}(\tau) \leq y) \Big|_{y=(x+\frac{r}{\tau})(1+\frac{r}{3\tau^3})+\frac{r^2}{4\tau^4}} + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right) \\
&= \left(1 + \frac{r}{3\tau^3}\right) P'_0\left(x + \left[\frac{r}{\tau} + \frac{xr}{3\tau^3} + \frac{7r^2}{12\tau^4}\right]\right) + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right) \\
&= P'_0(x) + \frac{r}{\tau} P''_0(x) + \frac{r^2}{2\tau^2} P'''_0(x) \\
&\quad + \frac{r}{6\tau^3} \left(r^2 P_0^{(4)}(x) + (2x P'_0(x))'\right) \\
&\quad + \frac{r^2}{24\tau^4} \left(r^2 P_0^{(5)}(x) + 14 P''_0(x) + 8(x P'_0(x))'\right) + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right).
\end{aligned}$$

En substituant cette expression dans (11.39), et en effectuant quelques intégrations élémentaires par parties, il vient :

$$\begin{aligned}
\mu_\ell^{(r)}(\tau) &= \mu_\ell^{(0)} - \ell \frac{r}{\tau} \mu_{\ell-1}^{(0)} + \frac{r^2}{2\tau^2} \ell(\ell-1) \mu_{\ell-2}^{(0)} \\
&\quad + \frac{r}{6\tau^3} \left(-r^2 \ell(\ell-1)(\ell-2) \mu_{\ell-3}^{(0)} - 2\ell \mu_\ell^{(0)}\right) \\
&\quad + \frac{r^2}{24\tau^4} \left(r^2 \ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3) \mu_{\ell-4}^{(0)} + \ell(8\ell-14) \mu_{\ell-1}^{(0)}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right).
\end{aligned}$$

En particulier, les *moments* d'ordre $\ell = 1$ et d'ordre $\ell = 2$ valent (notons aussi que $\mu_0^{(0)} = 1$) :

$$\mu_1^{(r)}(\tau) = \mu_1^{(0)} - \frac{r}{\tau} - \frac{r}{3\tau^3} \mu_1^{(0)} - \frac{r^2}{4\tau^4} + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right), \quad (11.41)$$

$$\mu_2^{(r)}(\tau) = \mu_2^{(0)} - \frac{2r}{\tau} \mu_1^{(0)} + \frac{r^2}{\tau^2} - \frac{2r}{3\tau^3} \mu_2^{(0)} + \frac{r^2}{6\tau^4} \mu_1^{(0)} + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right), \quad (11.42)$$

ce qui, en utilisant la propriété (déjà mentionnée) que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup \mathcal{A}^{(r)}(\tau)) &= \mu_1^{(r)}(\tau), \\
Var(\sup \mathcal{A}^{(r)}(\tau)) &= \mu_2^{(r)}(\tau) - \mu_1^{(r)2}(\tau),
\end{aligned}$$

permet de prouver les formules (11.37) et (11.38). ■

12 Le processus de r-Airy à plusieurs temps

Dans ce chapitre, notre objectif sera de montrer que le *processus de r-Airy*, défini à la section précédente, peut être généralisé dans le but de traiter les *probabilités jointes* pour plusieurs temps distincts. Il est également intéressant de dériver l'analogue des équations (10.36) et (10.37) dans cette situation plus générale. Toutefois, dans la mesure où les diverses expressions à manipuler deviennent très vite assez lourdes, nous nous contenterons de détailler les calculs pour les probabilités jointes dans le cas de *deux* temps seulement. Nous suivrons pour cela l'article [3] (non publié).

La probabilité pour le modèle *fini* de mouvements browniens s'écrit :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a \left(\begin{array}{l} \bigcap_{k=1}^m \{ \text{tous les } x_j(t_k) \in E_k \} \\ \left. \begin{array}{l} \text{tous les } x_j(0) = 0, \\ \text{les } (n-r) \text{ chemins de gauche sont} \\ \text{forcés d'atteindre 0 lorsque } t = 1, \\ \text{les } r \text{ chemins de droite sont forcés} \\ \text{d'atteindre } a \geq 0 \text{ lorsque } t = 1 \end{array} \right\} \end{array} \right), \quad (12.1)$$

et l'on s'intéressera plus particulièrement au cas où $m = 2$.

La Proposition suivante montre que la *transition de phase* conduisant au *processus de r-Airy* existe, quelle que soit la valeur de m , et donne également l'expression exacte du noyau limitant. Il s'agit de l'équivalent de la Proposition 10.1 dans le cas de m temps.

Proposition 12.1 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [3]*)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{a=\rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}}} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_i \left(\frac{1}{1 + e^{-2\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)}} \right) \in \frac{\sqrt{2n} + \frac{E_k^c}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)} \right\} \right) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \mathcal{A}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right) &= \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{\tau_k \tau_\ell}^{(0)} \chi_{E_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq m} \right), \quad \text{si } \sigma < \tau_0 \\ \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \mathcal{A}^{(r)}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right) &= \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{\tau_k \tau_\ell}^{(r)} \chi_{E_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq m} \right), \quad \text{si } \sigma = \tau_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.2)$$

où τ_0 est un paramètre tel que $e^{-\tau_0} = \rho_0$ (voir (10.8)), et où $K_{\tau_k \tau_\ell}^{(0)}$ et $K_{\tau_k \tau_\ell}^{(r)}$ représentent respectivement³⁶ le noyau d'Airy étendu et le noyau de r-Airy

³⁶voir (5.8) pour la définition du déterminant de Fredholm associé à un noyau "étendu".

étendu. Ceux-ci sont définis explicitement par les formules (à comparer avec (9.3) et (10.11)) :

$$K_{\tau_k \tau_\ell}^{(0)}(u, v) := \begin{cases} \int_0^\infty dw e^{w(\tau_\ell - \tau_k)} A(w+u) A(w+v) \\ \quad - p(\tau_\ell - \tau_k, u, v), & \text{si } \tau_\ell > \tau_k, \\ \int_0^\infty dw e^{w(\tau_\ell - \tau_k)} A(w+u) A(w+v), & \text{si } \tau_\ell \leq \tau_k, \end{cases} \quad (12.3)$$

ainsi que :

$$K_{\tau_k \tau_\ell}^{(r)}(u, v) := \begin{cases} \int_0^\infty dw e^{w(\tau_\ell - \tau_k)} A_r^-(w+u; \tau_k) A_r^+(w+v; \tau_\ell) \\ \quad - p(\tau_\ell - \tau_k, u, v), & \text{si } \tau_\ell > \tau_k, \\ \int_0^\infty dw e^{w(\tau_\ell - \tau_k)} A_r^-(w+u; \tau_k) A_r^+(w+v; \tau_\ell), & \text{si } \tau_\ell \leq \tau_k, \end{cases} \quad (12.4)$$

en termes des mêmes fonctions d'Airy modifiées $A_r^\pm(u, \tau)$ que celles données en (10.12) et (10.13), qui coïncident avec la fonction d'Airy classique $A(u)$, donnée en (4.12), lorsque $r = 0$. De plus, $p(t, x, y)$ désigne ici la fonction :

$$p(t, x, y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp \left[-\frac{1}{4t} \left((x-y)^2 + 2t^2(x+y) - \frac{t^4}{3} \right) \right], \quad (12.5)$$

définie pour $t > 0$.

Preuve : En appliquant la Proposition 8.1 dans ce cas précis, on a :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a \left(\bigcap_{k=1}^m \{\text{tous les } x_j(t_k) \in E_k^c\} \right) = \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{t_k t_\ell}^{(n;r)} \chi_{E_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq m} \right), \quad (12.6)$$

en termes du noyau de corrélation *fini* $K_{t_k t_\ell}^{(n;r)}$, dont les composantes valent :

$$K_{t_k t_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) = H_{t_k t_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) - E_{t_k t_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell), \quad (12.7)$$

avec (pour $1 \leq k, \ell \leq m$) :

$$\begin{aligned} H_{t_k t_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) &= \frac{(-1)}{2\pi^2 \sqrt{1-t_k} \sqrt{1-t_\ell}} \\ &\times \int_{\mathcal{D}} dz \int_{\Gamma_L} dw e^{-\frac{t_k z^2}{(1-t_k)} + \frac{2x_k z}{(1-t_k)} + \frac{t_\ell w^2}{(1-t_\ell)} - \frac{2y_\ell w}{(1-t_\ell)}} \left(\frac{w}{z} \right)^{n-r} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^r \frac{1}{(w-z)}, \end{aligned} \quad (12.8)$$

$$E_{t_k t_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } t_\ell \leq t_k \\ \frac{1}{\sqrt{\pi(t_\ell - t_k)}} e^{-\frac{(x_k - y_\ell)^2}{(t_\ell - t_k)}} e^{\frac{x_k^2}{(1-t_k)}} e^{\frac{-y_\ell^2}{(1-t_\ell)}} & , \text{ pour } t_\ell > t_k \end{cases} \quad (12.9)$$

Ci-dessus, et comme en (10.15), $\mathcal{D}$ est un contour fermé d'intégration, entourant une fois les points 0 et a , et situé à gauche de la ligne $\Gamma_L := L + i\mathbb{R}$, avec L choisi suffisamment grand pour que $\Re(w - z) > 0$.

Le membre de gauche de (12.2) nous indique le *rescaling* à utiliser quand $n \rightarrow \infty$. Celui-ci est semblable au *rescaling* du processus de r -Airy à un temps. Il faut donc poser, pour $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{\sqrt{2n} + \frac{u_k}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)} \quad , \quad y_\ell = \frac{\sqrt{2n} + \frac{v_\ell}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau_\ell}{n^{1/3}}\right)} \\ t_k &= \frac{1}{1 + e^{-2\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)}} \quad , \quad a = \rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}} = e^{-\tau_0} \sqrt{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

En introduisant ces changements dans (12.8), et en modifiant les variables d'intégration z et w selon :

$$z := \tilde{z} \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)} \quad \text{et} \quad w := \tilde{w} \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\left(\sigma + \frac{\tau_\ell}{n^{1/3}}\right)} \quad , \quad (12.10)$$

la première contribution au noyau (12.7) devient :

$$\begin{aligned} H_{\tau_k \tau_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) \sqrt{dx_k dy_\ell} &= - \left(\frac{n^{1/3}}{2\pi} \right)^2 e^{n^{2/3}(\tau_k - \tau_\ell)} \sqrt{du_k dv_\ell} \\ &\times \int_{\mathcal{D}} d\tilde{z} \int_{\Gamma_L} d\tilde{w} e^{\left(-\frac{n}{2}\tilde{z}^2 + (2n + n^{1/3}u_k)\tilde{z}\right)} e^{\left(-\frac{n}{2}\tilde{w}^2 + (2n + n^{1/3}v_\ell)\tilde{w}\right)} \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{z}}\right)^n \\ &\times \left(\frac{\tilde{w} - e^{(\sigma - \tau_0)} e^{\tau_\ell/n^{1/3}}}{\tilde{w}} \right)^r \left(\frac{\tilde{z} - e^{(\sigma - \tau_0)} e^{\tau_k/n^{1/3}}}{\tilde{z}} \right)^{-r} \frac{1}{n^{1/3} \left(\tilde{w} e^{\left(\frac{\tau_k - \tau_\ell}{2n^{1/3}}\right)} - \tilde{z} e^{\left(\frac{\tau_\ell - \tau_k}{2n^{1/3}}\right)} \right)}. \end{aligned}$$

A partir de là, par un raisonnement tout à fait identique à celui employé dans la preuve de la Proposition 10.1, en utilisant le développement de Taylor de la fonction $F(z) = \frac{z^2}{2} - 2z + \log z$ autour de $z = 1$ (voir (10.17) et (10.23)), ainsi que l'identité :

$$\frac{1}{n^{1/3}(\tilde{w}\alpha - \tilde{z}\beta)} = \int_0^\infty dw e^{-wn^{1/3}(\tilde{w}\alpha - \tilde{z}\beta)} \quad , \quad (12.11)$$

on parvient aisément à établir³⁷ :

$$e^{n^{2/3}(\tau_\ell - \tau_k)} e^{n^{1/3}(v_\ell - u_k)} H_{\tau_k \tau_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) \sqrt{dx_k dy_\ell} = -\sqrt{du_k dv_\ell} e^{\gamma(u_k - v_\ell)} \quad (12.12)$$

$$\times \int_0^\infty dw e^{\left(2w(n^{1/3} + \gamma) \sinh\left(\frac{\tau_\ell - \tau_k}{2n^{1/3}}\right)\right)} \mathcal{I}_{\tau_k}^{(n)}\left(u_k + w e^{\left(\frac{\tau_\ell - \tau_k}{2n^{1/3}}\right)}\right) \mathcal{J}_{\tau_\ell}^{(n)}\left(v_\ell + w e^{\left(\frac{\tau_k - \tau_\ell}{2n^{1/3}}\right)}\right),$$

avec (voir aussi [13], [34]) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{\tau_k}^{(n)}(u_k) = \begin{cases} e^{-u_k \gamma} A(u_k) & \text{si } \sigma < \tau_0 \\ e^{-u_k \gamma} A_r^-(u_k, \tau_k) & \text{si } \sigma = \tau_0 \end{cases}, \quad (12.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{\tau_\ell}^{(n)}(v_\ell) = \begin{cases} -e^{v_\ell \gamma} A(v_\ell) & \text{si } \sigma < \tau_0 \\ -e^{v_\ell \gamma} A_r^+(v_\ell, \tau_\ell) & \text{si } \sigma = \tau_0 \end{cases}. \quad (12.14)$$

Ceci montre la convergence attendue pour le noyau $H_{\tau_k \tau_\ell}^{(n;r)}$, dans la limite où $n \rightarrow \infty$. Enfin, et contrairement au cas d'un temps, il faut encore tenir compte de la contribution due à $E_{\tau_k \tau_\ell}^{(n;r)}$ quand $\tau_\ell > \tau_k$. Mais un calcul direct à partir de (12.9) entraîne que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^{2/3}(\tau_\ell - \tau_k)} e^{n^{1/3}(v_\ell - u_k)} E_{\tau_k \tau_\ell}^{(n;r)}(x_k, y_\ell) \sqrt{dx_k dy_\ell} \\ = p(\tau_\ell - \tau_k, u_k, v_\ell) \sqrt{du_k dv_\ell}, \end{aligned} \quad (12.15)$$

en termes de la fonction $p(t, x, y)$ donnée en (12.5).

Ceci achève la démonstration de la Proposition 12.1. ■

Dans le modèle à *deux* temps (τ_1 et τ_2), il est préférable de travailler avec la *somme* et la *différence* de ces temps, c'est pourquoi nous poserons :

$$t := \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \quad s := \frac{\tau_1 - \tau_2}{2}. \quad (12.16)$$

Pour $E'_1, E'_2 \subset \mathbb{R}$, désignons par $\mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2)$ la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2) := \frac{1}{Z_n} \int_{\substack{\text{spec}(M_1) \in E'_1 \\ \text{spec}(M_2) \in E'_2}} e^{-\text{Tr}\left(\frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) - cM_1 M_2 - \alpha M_2\right)} dM_1 dM_2, \quad (12.17)$$

qui correspond à un modèle de *deux* matrices hermitiennes *couplées* M_1 et M_2 , soumises à une mesure gaussienne déformée (en ce qui concerne M_2) par

³⁷rappelons que la multiplication des composantes du noyau par $e^{n^{2/3}(\tau_\ell - \tau_k)} e^{n^{1/3}(v_\ell - u_k)}$ ne modifie pas le déterminant de Fredholm, ni donc les probabilités.

la matrice diagonale fixe A . Nous supposons ici que la matrice A contient seulement r valeurs propres non nulles et égales à α , exactement comme en (10.4). Alors, l'application de la formule due à Karlin-McGregor (voir la section 6, en particulier les relations (6.13) et (6.18)) implique que nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a \left(\text{tous les } x_j(t_1) \in \tilde{E}_1, \text{ tous les } x_j(t_2) \in \tilde{E}_2 \right) \\ &= \mathbb{P}_n \left(\underbrace{a \sqrt{\frac{2(t_2 - t_1)}{(1 - t_2)(1 - t_1)}}}_{\alpha}; \underbrace{\sqrt{\frac{(1 - t_2)t_1}{(1 - t_1)t_2}}}_{c}; \underbrace{\tilde{E}_1 \sqrt{\frac{2t_2}{(t_2 - t_1)t_1}}}_{E'_1}; \underbrace{\tilde{E}_2 \sqrt{\frac{2(1 - t_1)}{(1 - t_2)(t_2 - t_1)}}}_{E'_2} \right). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Pour renforcer l'analogie avec notre analyse du processus de r -Airy dans la section précédente, nous allons supposer que $\tilde{E}_1$ et $\tilde{E}_2$ se réduisent à un seul intervalle non borné, la généralisation à effectuer dans le cas de plusieurs intervalles étant évidente. Ainsi :

$$\tilde{E}_1 = (-\infty, \tilde{x}_1) \quad ; \quad \tilde{E}_2 = (-\infty, \tilde{x}_2), \quad (12.19)$$

et, de même qu'en (12.16), il nous arrivera de travailler de préférence avec la *somme* et la *différence* :

$$\tilde{x} := \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2} \quad , \quad \tilde{y} := \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}{2}. \quad (12.20)$$

Par ailleurs, la Proposition 12.1 nous indique de considérer les changements de variables suivants pour les mouvements browniens :

$$t_k = \frac{1}{1 + e^{-2\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-2(\sigma + z^2 \tau_k)}}, \quad (12.21)$$

$$\tilde{x}_k = \frac{\sqrt{2n} + \frac{x_k}{\sqrt{2}n^{1/6}}}{2 \cosh\left(\sigma + \frac{\tau_k}{n^{1/3}}\right)} = \frac{2 + z^4 x_k}{2\sqrt{2} z^3 \cosh(\sigma + z^2 \tau_k)}, \quad (12.22)$$

pour $k = 1, 2$, et où nous avons défini $z := n^{-1/6}$ comme “petit” paramètre, de la même façon qu'en (10.32), si bien que $z \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. De plus, nous avons :

$$a = \rho_0 \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{2} z^3}. \quad (12.23)$$

En substituant ces résultats dans (12.18), on tire :

$$\begin{aligned}
& \log \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_a \left(\text{tous les } x_j(t_1) \in (-\infty, \tilde{x}_1) , \text{ tous les } x_j(t_2) \in (-\infty, \tilde{x}_2) \right) \\
&= \log \mathbb{P}_n \left(\underbrace{\frac{\rho_0}{z^3} e^\sigma \sqrt{e^{2z^2\tau_2} - e^{2z^2\tau_1}}}_{\alpha}; \underbrace{e^{-z^2(\tau_2-\tau_1)}}_c; \underbrace{\frac{\frac{2}{z^3} + z(-\infty, x_1)}{\sqrt{1-c^2}}}_{E'_1}; \underbrace{\frac{\frac{2}{z^3} + z(-\infty, x_2)}{\sqrt{1-c^2}}}_{E'_2} \right) \\
&=: \tilde{\mathbb{Q}}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2; z) = \mathbb{Q}(t, s, x, y; z). \tag{12.24}
\end{aligned}$$

Si nous inversons la relation (12.24), afin d'exprimer les variables (t, s, x, y) ou $(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2)$ en fonction des variables (α, c, x'_1, x'_2) , il vient :

$$\begin{aligned}
& \log \mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2) \\
&= \tilde{\mathbb{Q}} \left(\underbrace{\frac{1}{2z^2} \ln \left(\frac{\alpha^2 z^6 c^2}{\rho_0^2 e^{2\sigma} (1-c^2)} \right)}_{\tau_1}; \underbrace{\frac{1}{2z^2} \ln \left(\frac{\alpha^2 z^6}{\rho_0^2 e^{2\sigma} (1-c^2)} \right)}_{\tau_2}; \underbrace{\frac{\sqrt{1-c^2} x'_k}{z} - \frac{2}{z^4}}_{x_k} (k=1,2) \right) \\
&= \mathbb{Q} \left(\underbrace{\frac{1}{2z^2} \ln \left(\frac{\alpha^2 z^6 c}{\rho_0^2 e^{2\sigma} (1-c^2)} \right)}_t; \underbrace{\frac{\ln(c)}{2z^2}}_s; \underbrace{\frac{\sqrt{1-c^2} (x'_1 + x'_2)}{2z} - \frac{2}{z^4}}_x; \underbrace{\frac{\sqrt{1-c^2} (x'_1 - x'_2)}{2z}}_y \right). \tag{12.25}
\end{aligned}$$

Maintenant, la Proposition 7.9 appliquée à la fonction $\log \mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2)$, avec $m = 2$, $p = 2$, $n_1 = r$, $n_2 = n - r$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, $b_1 = \alpha$, $b_2 = 0$, $\partial_b^{(1)} = (-\partial/\partial\alpha)$, $\partial_b^{(2)} = (\partial/\partial\alpha)$, ainsi que $\mathcal{J}_{11} = \mathcal{J}_{22} = \frac{-1}{(1-c^2)}$ et $\mathcal{J}_{12} = \mathcal{J}_{21} = \frac{-c}{(1-c^2)}$, montre que $\log \mathbb{P}_n$ est une solution de l'équation non linéaire³⁸ :

$$0 = \det \begin{pmatrix} F_+ & F_- & 0 \\ F'_+ & F'_- & \frac{G_+}{F_+} + \frac{G_-}{F_-} \\ F''_+ & F''_- & \frac{G'_+}{F_+} + \frac{G'_-}{F_-} \end{pmatrix}, \tag{12.26}$$

c'est-à-dire (remarquons que cette EDP possède exactement la même *forme* que l'équation (10.28) que l'on avait obtenue dans le cas où $m = 1$) :

$$\begin{aligned}
0 &= \left(F_+ (\mathcal{C}_1 G_-) + F_- (\mathcal{C}_1 G_+) \right) \left(F_+ (\mathcal{C}_1 F_-) - F_- (\mathcal{C}_1 F_+) \right) \\
&\quad - \left(F_+ G_- + F_- G_+ \right) \left(F_+ (\mathcal{C}_1^2 F_-) - F_- (\mathcal{C}_1^2 F_+) \right), \tag{12.27}
\end{aligned}$$

³⁸ dans laquelle $' := \mathcal{C}_1$, où $\mathcal{C}_1$ est un opérateur qui sera défini dans un moment.

avec cette fois (les crochets représentant toujours des *wronskiens*) :

$$\begin{aligned}
F^+ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{C}_1 \log \mathbb{P}_n - \frac{cr}{1-c^2} \quad ; \quad F^- = \mathcal{A}_1 \mathcal{C}_1 \log \mathbb{P}_n - \frac{c(n-r)}{1-c^2} \\
G^+ &= \{H_1^+, F^+\}_{\mathcal{C}_1} + \{H_2^+, F^+\}_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} \\
G^- &= \{H_1^-, F^-\}_{\mathcal{C}_1} - \{H_2^-, F^-\}_{\mathcal{A}_1} \\
H_1^+ &= \frac{-2c}{1-c^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n - \frac{2cr(n-r)}{\alpha(1-c^2)} - \frac{2\alpha rc}{(1-c^2)^2} \\
H_1^- &= \left(\mathcal{A}_2 \mathcal{C}_1 + \frac{2c}{1-c^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \log \mathbb{P}_n + \frac{2cr(n-r)}{\alpha(1-c^2)} \\
H_2^+ &= \left(\mathcal{C}_2 - \frac{2\alpha c}{1-c^2} \mathcal{C}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n \quad ; \quad H_2^- = -\mathcal{C}_2 \mathcal{A}_1 \log \mathbb{P}_n,
\end{aligned}$$

exprimés en termes des opérateurs différentiels :

$$\mathcal{C}_1 := \frac{-1}{1-c^2} \left(\mathcal{B}_{-1}^{(1)} + c \mathcal{B}_{-1}^{(2)} \right), \quad (12.28)$$

$$\mathcal{C}_2 := -\mathcal{B}_0^{(1)} + c \frac{\partial}{\partial c}, \quad (12.29)$$

$$\mathcal{A}_1 := \frac{1}{1-c^2} \left(c \mathcal{B}_{-1}^{(1)} + \mathcal{B}_{-1}^{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (12.30)$$

$$\mathcal{A}_2 := \mathcal{B}_0^{(2)} - c \frac{\partial}{\partial c} - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (12.31)$$

où, si nous avons $E'_1 = \bigcup_{i=1}^r [a_{2i-1}, a_{2i}]$ et $E'_2 = \bigcup_{i=1}^s [b_{2i-1}, b_{2i}]$, nous supposons comme d'habitude que les opérateurs spatiaux *élémentaires* sont égaux à $\mathcal{B}_k^{(1)} := \sum_{i=1}^{2r} a_i^{k+1} \frac{\partial}{\partial a_i}$ et $\mathcal{B}_k^{(2)} := \sum_{i=1}^{2s} b_i^{k+1} \frac{\partial}{\partial b_i}$.

Il suffit alors d'utiliser le *rescaling* donné par (12.25), avec $E'_1 = (-\infty, x'_1)$, $E'_2 = (-\infty, x'_2)$, et de l'injecter dans (12.27) pour en déduire l'équation différentielle satisfaite par $\mathbb{Q}$. Autrement dit, il nous faut estimer :

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{ \begin{array}{l} (F_+ (\mathcal{C}_1 G_-) + F_- (\mathcal{C}_1 G_+)) (F_+ (\mathcal{C}_1 F_-) - F_- (\mathcal{C}_1 F_+)) \\ - (F_+ G_- + F_- G_+) (F_+ (\mathcal{C}_1^2 F_-) - F_- (\mathcal{C}_1^2 F_+)) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \alpha \mapsto \frac{\rho_0}{z^3} e^{\sigma + (t-s)z^2} \\ \times \sqrt{1 - e^{4sz^2}} \\ c \mapsto e^{2sz^2} \quad ; \quad n \mapsto \frac{1}{z^6} \\ x'_1 \mapsto \frac{\frac{2}{z^3} + (x \pm y)z}{\sqrt{1 - e^{4sz^2}}}. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Les différentes expressions apparaissant dans le crochet ci-dessus doivent donc être évaluées en fonction de $\mathbb{Q}(t, s, x, y; z)$ et de ses dérivées. Par

exemple, on calcule facilement à partir de (12.25) que :

$$\frac{\partial \log \mathbb{P}_n}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha z^2} \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} \right) = \frac{z}{\rho_0 e^\sigma} \frac{e^{-(t-s)z^2}}{\sqrt{1-e^{4sz^2}}} \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} \right), \quad (12.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathbb{P}_n}{\partial c} &= \frac{1}{2cz^2} \left[\left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial s} \right) + \left(\frac{1+c^2}{1-c^2} \right) \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} \right) \right] \\ &\quad - \frac{c}{2z\sqrt{1-c^2}} \left[(x'_1 + x'_2) \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right) + (x'_1 - x'_2) \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{e^{-2sz^2}}{2z^2} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial s} \right) + \left(\frac{1+e^{4sz^2}}{1-e^{4sz^2}} \right) \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{e^{2sz^2}}{2z(1-e^{4sz^2})} \left\{ \left(\frac{4}{z^3} + 2xz \right) \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right) + 2yz \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12.33)$$

$$\frac{\partial \log \mathbb{P}_n}{\partial x'_1} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{2z} \left(\left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right) \pm \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial y} \right) \right) = \frac{\sqrt{1-e^{4sz^2}}}{2z} \left(\left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right) \pm \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial y} \right) \right). \quad (12.34)$$

Développons ensuite asymptotiquement l'équation (12.27) en puissances de z . En considérant uniquement les termes dominants pour $z \rightarrow 0$, et en utilisant le fait que, par la Proposition 12.1, la fonction $\mathbb{Q}(t, s, x, y; z)$ possède une limite bien définie et indépendante de z (notée $\mathbb{Q}(t, s, x, y)$) lorsque $z \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), il est possible de voir que le coefficient du premier terme dominant est proportionnel à $(\rho_0 e^\sigma - 1)$. Ceci reflète l'existence de la *transition de phase* qui se produit lorsque $\rho_0 e^\sigma = 1$, et qui est semblable à ce qu'on avait obtenu dans le cas de *un temps*. Nous pouvons ainsi établir :

Proposition 12.2 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [3]*)

Commençons par définir les expressions :

$$“\text{Airy-EDP}” := \left(2s^2 \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial x^2} \right) - 2s \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial s \partial x \partial y} + \left\{ \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial x^2} \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}}, \quad (12.35)$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \left[“r\text{-Airy à 1 temps}” \right] &:= \left(r - \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial x^3} \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}} \\ &+ \left(r - \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} + t \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right) - x \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial x^2} \right) \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t^2 \partial x} \left(2rt + \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t^2} \right) \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left(\frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (12.36)$$

Les noms sont là pour rappeler que “Airy-EDP” = 0 se réfère à l’équation satisfaite par le processus d’Airy (simple) à deux temps (voir la Proposition 9.3), qui ne dépend que de la différence s de ces temps, tandis que “ r -Airy à 1 temps” = 0 est l’équation satisfaite par le processus de r -Airy à un temps (voir la Proposition 10.2).

Alors, si $\rho_0 e^\sigma = 1$ et si les ensembles spatiaux sont réduits chacun à un intervalle non borné (voir (12.19)), la fonction $\mathbb{Q}(t, s, x, y)$, qui caractérise le logarithme du processus de r -Airy à deux temps, avec $\tau_1 = t + s$, $\tau_2 = t - s$, $x_1 = x + y$ et $x_2 = x - y$, est une solution de l’équation aux dérivées partielles non linéaire :

$$0 = \left[\text{“}r\text{-Airy à 1 temps”} \right] + s \left(\frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t^2 \partial x} \left\{ \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial y} \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}} - \left\{ \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial y} \right\}_{\frac{\partial}{\partial t}} \right) + \left(r - \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \left[\begin{array}{l} -2y \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x \partial y} + 4s (\text{“Airy-EDP”}) \\ + 4s \left(3s \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial y^2} + 2 \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial s \partial x} + t \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x \partial y} \right) \end{array} \right] \right\}_{\frac{\partial}{\partial x}}, \quad (12.37)$$

où les crochets sont des wronskiens par rapport à $(\partial/\partial x)$.

■

13 Asymptotique du processus de r -Airy à deux temps dans le passé

Regardons maintenant comment se comporte le processus de r -Airy à deux temps dans le lointain passé, c’est-à-dire lorsque $(\tau_1 + \tau_2) = 2t \rightarrow -\infty$, tout en gardant $(\tau_2 - \tau_1) = -2s$ fixé (après le rescaling des variables accompli dans la Proposition 12.1).

Pour cela, nous suivrons exactement le même raisonnement que dans la section 11, à ceci près qu’il faudra parfois tenir compte de quelques subtilités, liées au fait que le noyau de corrélation est ici un noyau étendu (= noyau matriciel).

A ce sujet, nous aurons besoin de comparer les composantes du noyau de r -Airy à deux temps, avec celles du noyau d’Airy simple (à deux temps). Rappelons que ce dernier s’écrit, en vertu de (12.3) :

$$K^{(0)}(u, v) = \begin{pmatrix} K_{\tau_1 \tau_1}^{(0)}(u, v) & K_{\tau_1 \tau_2}^{(0)}(u, v) \\ K_{\tau_2 \tau_1}^{(0)}(u, v) & K_{\tau_2 \tau_2}^{(0)}(u, v) \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

avec :

$$K_{\tau_1 \tau_1}^{(0)}(u, v) = K_{\tau_2 \tau_2}^{(0)}(u, v) = \underbrace{\int_0^\infty dz A(u+z) A(v+z)}_{=: K_A(u, v)}, \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned} K_{\tau_1 \tau_2}^{(0)}(u, v) &= \int_0^\infty e^{-2sz} A(u+z) A(v+z) dz - p(-2s, u, v) \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-2sz} A(u+z) A(v+z) dz, \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$K_{\tau_2 \tau_1}^{(0)}(u, v) = \int_0^\infty e^{2sz} A(u+z) A(v+z) dz. \quad (13.4)$$

Notons que la deuxième égalité dans (13.3) découle de l'identité suivante pour la fonction (12.5), qui fut d'abord observée par Johansson (voir [27]) :

$$p(t, u, v) = \int_{-\infty}^\infty e^{zt} A(u+z) A(v+z) dz. \quad (13.5)$$

Nous avons alors :

Proposition 13.1 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [3]*)

En développant asymptotiquement le noyau étendu de r -Airy pour $t = (\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}) \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire en écrivant :

$$K_{t,s}^{(r)} = K^{(0)} + \frac{K_1^{(r)}}{t} + \frac{K_2^{(r)}}{t^2} + \frac{K_3^{(r)}}{t^3} + \frac{K_4^{(r)}}{t^4} + \dots, \quad (13.6)$$

où les $K_j^{(r)}$ peuvent dépendre de s mais pas de t , et où $K^{(0)}$ correspond au noyau matriciel d'Airy (13.1), il est possible de calculer explicitement la forme des premiers termes. Par exemple :

$$K_1^{(r)}(u, v) = -r A(u) A(v) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} K_2^{(r)}(u, v) &= -\frac{r}{2} \left(r (A'(u) A(v) + A(u) A'(v)) + (A'(u) A(v) - A(u) A'(v)) \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - r s A(u) A(v) \begin{pmatrix} -1 & -r \\ r & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

et ainsi de suite, les coefficients des puissances de r étant toujours quadratiques en la fonction d'Airy $A(u)$ et en ses dérivées.

Preuve : Soit $\tau_1 = t + s$ et $\tau_2 = t - s$. En se souvenant de la définition (12.4) du noyau de r -Airy étendu, et aussi des fonctions d’Airy modifiées $A_r^\pm$ telles que données en (10.12) et (10.13), les composantes de $K_{t,s}^{(r)}$ peuvent s’écrire comme une intégrale *triple*. Ainsi, pour la première composante par exemple, nous avons³⁹ :

$$\begin{aligned} K_{\tau_2\tau_1}^{(r)}(u, v) &= \int_0^\infty dw e^{w(\tau_1-\tau_2)} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i(u+w)a+i\frac{a^3}{3}}}{(ia-\tau_2)^r} \frac{da}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i(v+w)b+i\frac{b^3}{3}}}{(-ib-\tau_1)^{-r}} \frac{db}{2\pi} \\ &= \int_0^\infty dw e^{2ws} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i(u+w)a+i\frac{a^3}{3}}}{(ia-t+s)^r} \frac{da}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i(v+w)b+i\frac{b^3}{3}}}{(-ib-t-s)^{-r}} \frac{db}{2\pi} \\ &= \int_0^\infty dw \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{(ia+s)w+iau+i\frac{a^3}{3}}}{((ia+s)-t)^r} \frac{da}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{(ib+s)w+ibv+i\frac{b^3}{3}}}{(-(ib+s)-t)^{-r}} \frac{db}{2\pi} . \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor (11.7) en $(1/t)$, où l’on a posé ici $\alpha = (ia + s)$ et $\beta = (ib + s)$, on obtient l’expansion suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-(ib+s)-t}{(ia+s)-t} \right)^r &= 1 + \frac{r}{t} (ia + ib + 2s) \\ &+ \frac{r}{2t^2} (ia + ib + 2s) \left[r(ia + ib + 2s) + i(a - b) \right] + O\left(\frac{1}{t^3}\right) . \end{aligned} \quad (13.9)$$

Remarquons ensuite que les multiplications de l’intégrand de $K_{\tau_2\tau_1}^{(r)}$ par ia , par ib et par $(ia + ib + 2s)$, peuvent être réalisées en prenant une dérivée du noyau, en accord avec la “recette” ci-dessous :

$$ia \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u} , \quad ib \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial v} , \quad (ia + ib + 2s) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial w} . \quad (13.10)$$

Par conséquent, en exploitant (13.9) et (13.10) dans l’expression pour $K_{\tau_2\tau_1}^{(r)}$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} K_{\tau_2\tau_1}^{(r)}(u, v) &= K_{\tau_2\tau_1}^{(0)}(u, v) + \frac{r}{t} \int_0^\infty dw \frac{\partial}{\partial w} \left(e^{2ws} A(u+w) A(v+w) \right) \\ &+ \frac{r}{2t^2} \left(r \int_0^\infty dw \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(e^{2ws} A(u+w) A(v+w) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty dw \frac{\partial}{\partial w} \left(e^{2ws} (A'(u+w) A(v+w) - A(u+w) A'(v+w)) \right) \right) \\ &+ O\left(\frac{1}{t^3}\right) \end{aligned}$$

³⁹où $\mathcal{C}$ est un contour du plan complexe allant de $-\infty e^{5i\pi/6}$ à $\infty e^{i\pi/6}$, tel que $(-i\tau_2)$ se trouve *au-dessus* du contour.

$$\begin{aligned}
&= K_{\tau_2 \tau_1}^{(0)}(u, v) - \frac{r A(u) A(v)}{t} \\
&\quad - \frac{r}{2t^2} \left(\begin{array}{l} r \left(2s A(u) A(v) + A'(u) A(v) + A(u) A'(v) \right) \\ + A'(u) A(v) - A(u) A'(v) \end{array} \right) + O\left(\frac{1}{t^3}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien en accord avec (13.7) et (13.8).

Considérons à présent la composante $K_{\tau_1 \tau_2}^{(r)}$ du noyau, pour laquelle on suppose $\tau_1 < \tau_2$. Celle-ci est égale à :

$$\begin{aligned}
K_{\tau_1 \tau_2}^{(r)}(u, v) &= \int_0^\infty dw e^{-2ws} \int_C \frac{e^{i(u+w)a + i\frac{a^3}{3}}}{((ia-s)-t)^r} \frac{da}{2\pi} \int_C \frac{e^{i(v+w)b + i\frac{b^3}{3}}}{(-(ib-s)-t)^{-r}} \frac{db}{2\pi} \\
&\quad - p(-2s, u, v),
\end{aligned}$$

où la fonction $p(t, x, y)$ a été donnée en (12.5). Grâce au développement de Taylor (11.7), il est clair que l'expansion en puissances de $(1/t)$ s'obtient cette fois en substituant $s \mapsto -s$ dans (13.9). On déduit donc aussitôt du résultat précédent que :

$$\begin{aligned}
K_{\tau_1 \tau_2}^{(r)}(u, v) &= K_{\tau_2 \tau_1}^{(r)}(u, v) \Big|_{s \mapsto -s} - p(-2s, u, v) \\
&= K_{\tau_1 \tau_2}^{(0)}(u, v) - \frac{r A(u) A(v)}{t} \\
&\quad - \frac{r}{2t^2} \left(\begin{array}{l} r \left(-2s A(u) A(v) + A'(u) A(v) + A(u) A'(v) \right) \\ + A'(u) A(v) - A(u) A'(v) \end{array} \right) + O\left(\frac{1}{t^3}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on procède exactement de la même façon pour les entrées *diagonales* du noyau. Dans le cas de $K_{\tau_1 \tau_1}^{(r)}$, on tire :

$$K_{\tau_1 \tau_1}^{(r)}(u, v) = \int_0^\infty dw \int_C \frac{e^{i(u+w)a + i\frac{a^3}{3}}}{((ia-s)-t)^r} \frac{da}{2\pi} \int_C \frac{e^{i(v+w)b + i\frac{b^3}{3}}}{(-(ib+s)-t)^{-r}} \frac{db}{2\pi}.$$

Quitte à poser $\alpha = (ia-s)$ et $\beta = (ib+s)$, on se ramène au même développement de Taylor en $(1/t)$ que dans (11.7), ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-(ib+s)-s}{(ia-s)-t} \right)^r &= 1 + \frac{r}{t} (ia+ib) \\
&\quad + \frac{r}{2t^2} (ia+ib) \left[r(ia+ib) + (ia-ib-2s) \right] + O\left(\frac{1}{t^3}\right).
\end{aligned} \tag{13.11}$$

L'analogie de la "recette" (13.10) pour l'intégrand de $K_{\tau_1 \tau_1}^{(r)}$ se lit maintenant :

$$ia \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u}, \quad ib \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial v}, \quad (ia+ib) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial w}. \tag{13.12}$$

Dès lors, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
K_{\tau_1 \tau_1}^{(r)}(u, v) &= K_{\tau_1 \tau_1}^{(0)}(u, v) + \frac{r}{t} \int_0^\infty dw \frac{\partial}{\partial w} (A(u+w)A(v+w)) \\
&+ \frac{r}{2t^2} \left[r \int_0^\infty dw \frac{\partial^2}{\partial w^2} (A(u+w)A(v+w)) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty dw \frac{\partial}{\partial w} (A'(u+w)A(v+w) - A(u+w)A'(v+w)) \right] + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \\
&= K_{\tau_1 \tau_1}^{(0)}(u, v) - \frac{r A(u) A(v)}{t} \\
&\quad - \frac{r}{2t^2} \left(r (A'(u) A(v) + A(u) A'(v)) \right. \\
&\quad \left. + A'(u) A(v) - A(u) A'(v) - 2s A(u) A(v) \right) + O\left(\frac{1}{t^3}\right),
\end{aligned}$$

à nouveau en accord avec (13.7) et (13.8).

Enfin, pour $K_{\tau_2 \tau_2}^{(r)}$, il suffit d'observer que :

$$K_{\tau_2 \tau_2}^{(r)}(u, v) = K_{\tau_1 \tau_1}^{(r)}(u, v) \Big|_{s \mapsto -s}. \quad (13.13)$$

En conclusion, il est possible de calculer les termes du développement en série (13.6) par la méthode expliquée ci-dessus, et ce pour chacune des composantes du noyau matriciel, ce qui prouve la Proposition 13.1. ■

Nous pouvons désormais envisager d'effectuer l'expansion pour $t \rightarrow -\infty$ du *logarithme du déterminant de Fredholm* $\mathbb{Q}(t, s, x, y) = \log \det (I - K_{t,s}^{(r)})$, associé aux deux temps t, s donnés en (12.16) et à deux intervalles spatiaux $E_1^c = (x + y, \infty)$ et $E_2^c = (x - y, \infty)$ (voir (12.19) et (12.20)) :

$$\mathbb{Q}(t, s, x, y) = \mathbb{Q}_0(s, x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{Q}_n(s, x, y)}{t^n}, \quad (13.14)$$

avec pour “condition initiale” le fait que la fonction $\mathbb{Q}_0(s, x, y)$ coïncide avec $\log \det (I - K^{(0)})$, où $K^{(0)}$ est le *noyau d'Airy étendu* (13.1), qui dépend de s mais pas de t .

Notre objectif, à l'instar de celui poursuivi dans la section 11, est d'évaluer l'asymptotique des $\mathbb{Q}_n(s, x, y)$ lorsque $x = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \rightarrow \infty$. Or, un raisonnement identique à celui utilisé dans la preuve de la Proposition 11.2 montre que l'on peut écrire, pour chaque n :

$$\mathbb{Q}_n(s, x, y) = -\text{Tr } K_n^{(r)} + \text{Tr } S_n \left(K_1^{(r)}, \dots, K_{n-1}^{(r)}, R \right), \quad (13.15)$$

où les $K_n^{(r)}$ sont les noyaux intermédiaires apparaissant dans (13.6), et où les S_n sont des polynômes qui ne contiennent pas de termes indépendants ni de termes linéaires. Notons qu'ici, R désigne le *résolvant* du noyau $K^{(0)}$, c'est-à-dire :

$$I + R := (I - K^{(0)})^{-1}. \quad (13.16)$$

De plus, il est toujours sous-entendu que les opérateurs agissent sur $L^2(x + y, \infty) \oplus L^2(x - y, \infty)$, c'est pourquoi l'indication de la dépendance en x et y sera souvent omise.

La relation (13.15), combinée à la Proposition 13.1, entraîne en particulier que les $\mathbb{Q}_n(s, x, y)$ sont des polynômes de degré n *en* r , divisibles par r , si bien que nous avons en fait, de la même façon qu'en (11.26) :

$$\mathbb{Q}(t, s, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{Q}_{n,n-j}(s, x, y)}{r^j}. \quad (13.17)$$

Il s'agit alors d'évaluer les deux *traces* intervenant dans (13.15). Pour cela, nous aurons besoin de connaître certaines estimations concernant les composantes du noyau $K^{(0)}$ et de son *résolvant*. Rappelons que les *normes* $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_1$, associées à un noyau matriciel, sont définies par :

$$\|B\|_{\infty} := \max_{1 \leq i, j \leq n} \|B_{ij}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i, j \leq n} \sup_{\substack{x \in E_i \\ u \in E_j}} |B_{ij}(x, u)|, \quad (13.18)$$

$$\|B\|_1 := \sup_{1 \leq i \leq n, x \in E_i} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} |B_{ij}(x, u)| du. \quad (13.19)$$

Proposition 13.2 (Adler - Delepine - van Moerbeke [3])

Considérons le noyau d'Airy à deux temps (13.1), dont les composantes sont données de (13.2) à (13.4). Indiquons aussi, pour chaque entier $\ell \geq 0$:

$$O(A^{\ell}) = O\left(\left(\frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi} x^{1/4}}\right)^{\ell} e^{\alpha x^{1/2}} x^k\right), \text{ pour } x \rightarrow \infty, \quad (13.20)$$

et ce quelles que soient les puissances $\alpha, k \in \mathbb{R}$, pouvant dépendre de y et s .

Alors, pour $x \rightarrow \infty$, nous avons les estimations :

$$\|K_{ij}^{(0)}\|_{\infty}, \|K_{ij}^{(0)}\|_1 = O(A^2) \text{ pour } (i, j) \neq (1, 2), \quad (13.21)$$

$$\|K_{12}^{(0)}\|_{\infty}, \|K_{12}^{(0)}\|_1 = O(e^{2sx}), \quad (13.22)$$

$$\|K^{(0)}\|_{\infty}, \|K^{(0)}\|_1 = O(e^{2sx}). \quad (13.23)$$

De plus, le résolvant R du noyau $K^{(0)}$ vérifie, toujours pour $x \rightarrow \infty$:

$$\|R\|_\infty, \|R\|_1 = O(e^{2sx}), \quad (13.24)$$

$$\left\| R - \sum_{k=1}^{n-1} (K^{(0)})^k \right\|_\infty \leq \frac{\| (K^{(0)})^n \|_\infty}{1 - \|K^{(0)}\|_1}. \quad (13.25)$$

Enfin, en prenant des puissances de $K^{(0)}$, nous obtenons (pour $x \rightarrow \infty$) :

$$\left(\left\| (K^{(0)})_{ij}^{2n} \right\|_\infty \right)_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} O((A^2 e^{2sx})^n) & O((A^2 e^{2sx})^n) \\ O((A^2)^{n+1} (e^{2sx})^{n-1}) & O((A^2 e^{2sx})^n) \end{pmatrix} \quad (13.26)$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$, ainsi que :

$$\left(\left\| (K^{(0)})_{ij}^{2n+1} \right\|_\infty \right)_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} O((A^2)^{n+1} (e^{2sx})^n) & O((A^2)^n (e^{2sx})^{n+1}) \\ O((A^2)^{n+1} (e^{2sx})^n) & O((A^2)^{n+1} (e^{2sx})^n) \end{pmatrix} \quad (13.27)$$

pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Preuve : Les estimations (13.21) à (13.23) se déduisent par un calcul direct à partir des composantes du noyau d'Airy. Le lecteur intéressé peut d'ailleurs retrouver le détail de ces calculs dans [3].

Pour démontrer (13.24) et (13.25), commençons par remarquer que :

$$I = (I - K^{(0)}) \left(I + K^{(0)} + K^{(0)^2} + K^{(0)^3} + \dots \right), \quad (13.28)$$

d'où il s'ensuit aussitôt, par (13.16), que $R = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(0)^n} = (I - K^{(0)})^{-1} K^{(0)}$.

Dès lors, nous en concluons que :

$$\begin{aligned} \|R\|_1 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (K^{(0)})^n \right\|_1 \leq \frac{\|K^{(0)}\|_1}{1 - \|K^{(0)}\|_1} \leq O(e^{2sx}), \\ \|R\|_\infty &= \left\| (I - K^{(0)})^{-1} K^{(0)} \right\|_\infty \leq \left\| (I - K^{(0)})^{-1} \right\|_1 \|K^{(0)}\|_\infty \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|K^{(0)}\|_1^n \|K^{(0)}\|_\infty = \frac{\|K^{(0)}\|_\infty}{1 - \|K^{(0)}\|_1} \leq O(e^{2sx}). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons également :

$$\begin{aligned} \left\| R - \sum_{k=1}^{n-1} K^{(0)^k} \right\|_\infty &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} K^{(0)^k} - \sum_{k=1}^{n-1} K^{(0)^k} \right\|_\infty = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} K^{(0)^k} \right) K^{(0)^n} \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} K^{(0)^k} \right\|_1 \|K^{(0)^n}\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|K^{(0)}\|_1^k \|K^{(0)^n}\|_\infty \\ &= \left(\frac{\|K^{(0)}\|_\infty}{1 - \|K^{(0)}\|_1} \right). \end{aligned}$$

Finalement, afin d'établir (13.26) et (13.27), il suffit d'employer un raisonnement par récurrence. En effet, nous savons déjà que (13.27) est valable pour $n = 0$, et nous pouvons donc (par induction) supposer que (13.26) et (13.27) sont tous deux vérifiés jusqu'à l'ordre k inclus. Mais, étant donné que :

$$K^\ell = \begin{pmatrix} K_{11}(K^{\ell-1})_{11} + K_{12}(K^{\ell-1})_{21} & K_{11}(K^{\ell-1})_{12} + K_{12}(K^{\ell-1})_{22} \\ K_{21}(K^{\ell-1})_{11} + K_{22}(K^{\ell-1})_{21} & K_{21}(K^{\ell-1})_{12} + K_{22}(K^{\ell-1})_{22} \end{pmatrix}, \quad (13.29)$$

cela entraîne notamment, en utilisant l'hypothèse d'induction, que :

$$\begin{aligned} \|(K^{2(k+1)})_{11}\|_\infty &\leq \|K_{11}\|_1 \|(K^{2k+1})_{11}\|_\infty + \|K_{12}\|_1 \|(K^{2k+1})_{21}\|_\infty \\ &\leq O((A^2)^{k+2}(e^{2sx})^k) + O((A^2 e^{2sx})^{k+1}) \leq O((A^2 e^{2sx})^{k+1}). \end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour les autres composantes, cela conduit à (13.26). Après quoi, (13.27) se démontre également par récurrence, et en faisant usage de (13.26). Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \|(K^{2(k+1)+1})_{11}\|_\infty &\leq \|K_{11}\|_1 \|(K^{2k+2})_{11}\|_\infty + \|K_{12}\|_1 \|(K^{2k+2})_{21}\|_\infty \\ &\leq O((A^2)^{k+2}(e^{2sx})^{k+1}) + O((A^2)^{k+2}(e^{2sx})^{k+1}) \\ &\leq O((A^2)^{k+2}(e^{2sx})^{k+1}), \end{aligned}$$

et de même pour les autres composantes. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer les deux *traces* dans (13.15).

- Tout d'abord, on peut remarquer que l'on aura toujours :

$$\text{Tr } S_n(K_1^{(r)}, \dots, K_{n-1}^{(r)}, R) = O(A^2 e^{2sx}), \quad (13.30)$$

ce que nous pouvons d'ailleurs illustrer sur un exemple typique, à savoir sur $\text{Tr}(RK_1^{(r)})$. En notant que $A(u) \geq 0$ lorsque $u \geq 0$, et en utilisant la Proposition 13.2 et l'expression (13.7) pour $K_1^{(r)}$, on calcule en effet :

$$\begin{aligned} \left| \text{Tr}(RK_1^{(r)}) \right| &\leq \left| \text{Tr}((R - K^{(0)})K_1^{(r)}) \right| + \left| \text{Tr}(K^{(0)}K_1^{(r)}) \right| \\ &\leq \left(\|R - K^{(0)}\|_\infty + \|K^{(0)}\|_\infty \right) \sum_{j=1}^2 \iint_{x \pm y}^\infty \left| (K_1^{(r)}(u, v))_{jj} \right| du dv \\ &\leq \left(O(A^2 e^{2sx}) + O(e^{2sx}) \right) \sum_{j=1}^2 \iint_{x \pm y}^\infty A(u) A(v) du dv \\ &= O(e^{2sx}) \sum_{j=1}^2 \left(\int_{x \pm y}^\infty A(u) du \right)^2 = O(A^2 e^{2sx}). \end{aligned}$$

- Ensuite, il s'agit d'évaluer $\text{Tr } K_n^{(r)}$. Pour cela, nous avons seulement besoin de connaître les $K_n^{(r)}$ *sur la diagonale*, et pour $v = u$, car la trace d'un noyau matriciel 2×2 se définit par :

$$\text{Tr} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \int_{x+y}^{\infty} K_{11}(u, u) du + \int_{x-y}^{\infty} K_{22}(u, u) du. \quad (13.31)$$

Or, en raison de la forme des noyaux intermédiaires $K_n^{(r)}$ (voir la preuve de la Proposition 13.1), il n'est pas difficile de s'apercevoir que :

$$\begin{aligned} \text{Diag} \left(K_n^{(r)}(u, u) \right) &= - \frac{r^n}{n!} (A^2(u))^{(n-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{r^{n-1} s}{(n-2)!} (A^2(u))^{(n-2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{r^{n-2}}{(n-3)!} \left(\frac{(3n-1)}{24} (A^2(u))^{(n-1)} - \frac{(n-1)}{2} (A'^2(u) - s^2 A^2(u))^{(n-3)} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

En corollaire, et en se souvenant toujours de la relation (13.15), nous venons en fait de démontrer le résultat suivant :

Proposition 13.3 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [3]*)

Le logarithme du déterminant de Fredholm $\mathbb{Q}(t, s, x, y)$ est égal à :

$$\mathbb{Q}(t, s, x, y) = \mathbb{Q}_0(s, x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{Q}_n(s, x, y)}{t^n}, \quad (13.32)$$

où l'asymptotique des fonctions $\mathbb{Q}_n(s, x, y)$ est donnée, quand $x \rightarrow \infty$, par :

$$\mathbb{Q}_1(s, x, y) = r \left(\int_{x+y}^{\infty} A^2(u) du + \int_{x-y}^{\infty} A^2(u) du + O(A^2 e^{2sx}) \right), \quad (13.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_2(s, x, y) &= - \frac{r^2}{2!} \left(A^2(x+y) + A^2(x-y) + O(A^2 e^{2sx}) \right) \\ &\quad - rs \left(\int_{x+y}^{\infty} A^2(u) du - \int_{x-y}^{\infty} A^2(u) du + O(A^2 e^{2sx}) \right), \end{aligned} \quad (13.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_3(s, x, y) &= - \frac{r^3}{3!} \left((A^2)'(x+y) + (A^2)'(x-y) + O(A^2 e^{2sx}) \right) \\ &\quad - r^2 s \left(-A^2(x+y) + A^2(x-y) + O(A^2 e^{2sx}) \right) \\ &\quad - r \left(\frac{1}{3} \left((A^2)'(x+y) + (A^2)'(x-y) \right) + O(A^2 e^{2sx}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{x+y}^{\infty} (A'^2(u) - s^2 A^2(u)) du + \int_{x-y}^{\infty} (A'^2(u) - s^2 A^2(u)) du \right), \end{aligned} \quad (13.35)$$

⋮

Et plus généralement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_n(s, x, y) = & -\frac{r^n}{n!} \left(\begin{array}{c} (A^2)^{(n-2)}(x+y) + (A^2)^{(n-2)}(x-y) \\ + O(A^2 e^{2sx}) \end{array} \right) \\
& -\frac{r^{n-1}s}{(n-2)!} \left(-(A^2)^{(n-3)}(x+y) + (A^2)^{(n-3)}(x-y) + O(A^2 e^{2sx}) \right) \\
& -\frac{r^{n-2}}{(n-3)!} \left(\begin{array}{c} \frac{(3n-1)}{24} \left((A^2)''(x+y) + (A^2)''(x-y) \right) \\ -\frac{(n-1)}{2} \left(\begin{array}{c} A'^2(x+y) + A'^2(x-y) \\ -s^2(A^2(x+y) + A^2(x-y)) \end{array} \right) \\ + O(A^2 e^{2sx}) \end{array} \right)^{(n-4)} \\
& + \sum_{j=3}^{n-1} r^{n-j} \left(T_{n,n-j}(A) + O(A^2 e^{2sx}) \right),
\end{aligned} \tag{13.36}$$

dans lequel les $T_{n,n-j}(A)$ sont des polynômes quadratiques en $A(x \pm y)$ et en $A'(x \pm y)$, possédant des coefficients qui peuvent dépendre de x, y, s ainsi que $\int_{x \pm y}^{\infty} \{ \text{polynôme quadratique en } A \text{ et } A', \text{ à coeff. dépendant de } u \} du$.

■

Nous pouvons à présent insérer la forme de la solution (13.17) dans l'équation aux dérivées partielles (12.37). Comme dans le cas de *un* temps (voir section 11), l'EDP (12.37) peut être *hiérarchisée* en attribuant un poids égal à 1 aux variables r et t , ce qui donne (les crochets désignant des wronskiens par rapport à $(\partial/\partial x)$) :

$$\begin{aligned}
0 = & \left\{ r \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, r \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial x^3} \right\} \quad (\text{poids} = 1) \\
& + \left\{ r \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, 2s \left(\text{“Airy-PDE”} + t \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x} \right) \right\} \quad (\text{poids} = 0) \\
& + \left\{ r \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x^2}, \left(2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(t \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3(x \mathbb{Q})}{\partial t \partial x^2} + 2 \left\{ \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial x^2} \right\} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(-2s \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial s \partial x} + 6s^2 \frac{\partial^2 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x} - y \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial t \partial x \partial y} \right) \right\} \quad (\text{poids} = -1) \\
& + \text{autres termes de poids} < -1.
\end{aligned}$$

En substituant donc la solution (13.17) dans la hiérarchie ci-dessus, et en regroupant tous les termes qui contribuent à un même poids, on obtient une série de termes de poids décroissants, ayant la forme :

$$0 = W_1 + W_0 + W_{-1} + W_{-2} + \cdots, \tag{13.37}$$

où W_j possède un *poids global* égal à j . Cette égalité étant valable pour $t \rightarrow -\infty$, pour tout x et tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $s < 0$ et tout entier $r > 0$, il faut nécessairement que $W_j = 0$ ($j = 1, 0, -1, -2, \dots$). Il suffit par conséquent de calculer les expressions explicites pour les W_j .

Afin de raccourcir l'écriture dans ce qui va suivre, nous allons poser :

$$R_n := \mathbb{Q}_{n,n} \ (n \geq 1) , \quad S_n := \mathbb{Q}_{n,n-1} \ (n \geq 2) , \quad T_n := \mathbb{Q}_{n,n-2} \ (n \geq 3) . \quad (13.38)$$

De plus, une dérivée partielle par rapport à x sera notée au moyen d'une apostrophe, et une dérivée partielle par rapport à y au moyen d'un point, c'est-à-dire :

$$F' := \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) , \quad F^{(k)} := \left(\frac{\partial^k F}{\partial x^k} \right) , \quad \dot{F} := \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) . \quad (13.39)$$

Nous avons alors :

$$W_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+2}}{t^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ (n-j) R''_{n-j}, R'_j \right\} = 0 ,$$

ce qui, puisque cette relation est valable pour tout $t \rightarrow -\infty$ et tout entier $r > 0$, conduit à :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left\{ (n-j) R''_{n-j}, R'_j \right\} = 0 , \quad (13.40)$$

avec $n \in \mathbb{N}_0$ et $R_0 = \mathbb{Q}_0(s, x, y)$. A partir de là, un raisonnement en tout point semblable à celui effectué dans la section 11 (voir les équations (11.28) et suivantes), permet de se rendre compte que :

$$R_n = \mathbb{Q}_{n,n} = \frac{\mathbb{Q}_0^{(n)}(s, x, y)}{n!} . \quad (13.41)$$

Ensuite, en regardant la contribution due au terme W_0 , on voit que :

$$\begin{aligned} W_0 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{t^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left\{ (n-j) R''_{n-j}, \left(\begin{array}{c} S'_j + 2s \left[\text{“Airy-EDP”}(R_j) \right. \\ \left. - \{\dot{R}'_j, R''_j\} + \sum_{\ell+m=j} \{\dot{R}'_\ell, R''_m\} \right] \\ \left. - j \dot{R}'_j \right] \right\} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (n-j) S''_{n-j}, R'''_j \right\} \right) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

dans lequel “Airy-EDP” se réfère à l’équation satisfaite par le processus d’Airy (simple) à deux temps (voir (9.18)), et correspond donc à :

$$\begin{aligned} \text{“Airy-EDP”}(F) &:= \left(2s^2 \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - 2s \frac{\partial^3 F}{\partial s \partial x \partial y} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right\} \\ &= \mathcal{A}(F) + \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right\}, \end{aligned} \quad (13.42)$$

où $\mathcal{A}(F) := \left[\left(2s^2 \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - 2s \frac{\partial^3 F}{\partial s \partial x \partial y} \right]$ désigne un opérateur *linéaire* agissant sur F , et qui *commute* avec $(\partial/\partial x)$.

Maintenant, en utilisant le fait que $R_j = \frac{\mathbb{Q}_0^{(j)}}{j!}$ par (13.41), il vient :

$$\begin{aligned} \text{“Airy-EDP”}(R_j) &= \mathcal{A} \left(\frac{\mathbb{Q}_0^{(j)}}{j!} \right) + \left\{ \frac{\dot{\mathbb{Q}}_0^{(j)}}{j!}, \frac{\mathbb{Q}_0''^{(j)}}{j!} \right\} \\ &= \frac{1}{j!} \left[\mathcal{A}(\mathbb{Q}_0) \right]^{(j)} + \left\{ \frac{\dot{\mathbb{Q}}_0^{(j)}}{j!}, \frac{\mathbb{Q}_0''^{(j)}}{j!} \right\} \\ &= \frac{1}{j!} \left[\underbrace{\text{“Airy-EDP”}(\mathbb{Q}_0)}_0 - \left\{ \dot{\mathbb{Q}}_0', \mathbb{Q}_0'' \right\} \right]^{(j)} + \left\{ \dot{R}_j', R_j'' \right\} \\ &= -\frac{1}{j!} \left\{ \dot{\mathbb{Q}}_0', \mathbb{Q}_0'' \right\}^{(j)} + \left\{ \dot{R}_j', R_j'' \right\}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

De plus, les termes $\sum_{\ell+m=j} \left\{ \dot{R}_\ell', R_m'' \right\}$ peuvent se simplifier comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell+m=j} \left\{ \dot{R}_\ell', R_m'' \right\} &= \sum_{\ell=0}^j \frac{1}{j!} \underbrace{\frac{j!}{\ell! (j-\ell)!}}_{C_j^\ell} \left\{ \dot{\mathbb{Q}}_0'^{(\ell)}, \mathbb{Q}_0''^{(j-\ell)} \right\} \\ &= \frac{1}{j!} \left\{ \dot{\mathbb{Q}}_0', \mathbb{Q}_0'' \right\}^{(j)}. \end{aligned} \quad (13.44)$$

En combinant les relations (13.43) et (13.44), cela implique que :

$$\text{“Airy-EDP”}(R_j) - \left\{ \dot{R}_j', R_j'' \right\} + \sum_{\ell+m=j} \left\{ \dot{R}_\ell', R_m'' \right\} = 0. \quad (13.45)$$

Dès lors, et comme $(n-j)R_{n-j}'' = R_{n-j-1}'''$ et $j\dot{R}_j' = \dot{R}_{j-1}''$, les équations découlant de $W_0 = 0$ se réduisent à :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left\{ R_{n-j-1}''', S_j''' - 2s \dot{R}_{j-1}'' \right\} + \left\{ (n-j) S_{n-j}'', R_j''' \right\} = 0. \quad (13.46)$$

- Lorsque $n = 2$, l'équation (13.46) devient :

$$\left\{ \mathbb{Q}_0''', -2s \dot{\mathbb{Q}}_0'' - 2S_2'' \right\} = 0, \quad (13.47)$$

ce qui admet comme solution :

$$S_2 = c \mathbb{Q}_0' - s \dot{\mathbb{Q}}_0 + \alpha x + \beta \quad (13.48)$$

avec c , α et β des constantes (pouvant dépendre de y et s). En fait, il faut que $\alpha = \beta = c = 0$, en raison de l'asymptotique des fonctions $\mathbb{Q}_n$ pour $x \rightarrow \infty$: voir la Proposition 13.3. Donc $S_2 = -s \dot{\mathbb{Q}}_0$.

- Par récurrence, supposons que $S_j = -s \frac{\dot{\mathbb{Q}}_0^{(j-2)}}{(j-2)!}$ pour tout entier j vérifiant $2 \leq j < n$, et montrons alors que : $S_n = -s \frac{\dot{\mathbb{Q}}_0^{(n-2)}}{(n-2)!}$. Posons :

$$S_n = -s \frac{\dot{\mathbb{Q}}_0^{(n-2)}}{(n-2)!} + C_n, \quad (13.49)$$

où $C_n = C_n(s, x, y)$. En insérant ces expressions dans (13.46), on trouve que la plupart des termes se simplifient deux à deux, ce qui conduit finalement à l'équation $\{C_n'', \mathbb{Q}_0'''\} = 0$, dont la solution est :

$$C_n = \tilde{c}_n \mathbb{Q}_0' + \alpha'_n x + \beta'_n, \quad (13.50)$$

pour certaines constantes $\tilde{c}_n$, α'_n et β'_n (pouvant dépendre de y et s). A nouveau, et toujours en raison de l'asymptotique des fonctions $\mathbb{Q}_n$ pour $x \rightarrow \infty$ (voir la Proposition 13.3), on en déduit que $\alpha'_n = \beta'_n = \tilde{c}_n = 0$.

Par conséquent, pour chaque $n \geq 2$, on obtient $C_n = 0$ et :

$$S_n = -s \frac{\dot{\mathbb{Q}}_0^{(n-2)}}{(n-2)!}. \quad (13.51)$$

Après quoi, le calcul à faire pour déterminer $T_n = \mathbb{Q}_{n,n-2}$ est du même genre que celui ci-dessus, quoique plus long, car l'expression de W_{-1} est plus complexe. En effet, nous avons explicitement :

$$\begin{aligned} W_{-1} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{t^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left\{ (n-j) S_{n-j}'', \left(\begin{array}{c} S_j''' + 2s \left[\text{“Airy-EDP”}(R_j) \right. \right. \\ \left. \left. - \{\dot{R}_j', R_j''\} + \sum_{\ell+m=j} \{\dot{R}_\ell', R_m''\} \right. \right. \\ \left. \left. - j \dot{R}_j' \right] \right) \right\} \right) \\ &\quad + \left\{ (n-j) T_{n-j}'', R_j''' \right\} + \left\{ (n-j) R_{n-j}'', \mathcal{U}_j \right\} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_j &:= T_j''' + 2(j-1)^2 R'_{j-1} + (j-1)x R''_{j-1} \\
&+ 2s \left(\text{“Airy-EDP”}(S_j) + \sum_{\ell+m=j} \left(\{\dot{S}'_\ell, R''_m\} + \{\dot{R}'_\ell, S''_m\} \right) \right. \\
&\quad \left. - \{\dot{S}'_j, S''_j\} - j \dot{S}'_j \right) \\
&- 2 \sum_{\ell+m=j-1} \ell \{R'_\ell, R''_m\} + 2s(j-1) \frac{\partial}{\partial s} R'_{j-1} \\
&- 6s^2(j-1) \ddot{R}_{j-1} + (j-1)y \dot{R}'_{j-1}.
\end{aligned} \tag{13.52}$$

Cependant, ce calcul a été entièrement réalisé dans [3]. Le résultat final est que nous trouvons :

$$T_3 = \left(\frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2s}{3} \frac{\partial}{\partial s} + s^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{3} \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbb{Q}_0, \tag{13.53}$$

tandis que, pour $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}
T_n &= \left(\frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2s}{3} \frac{\partial}{\partial s} + s^2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{3} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\mathbb{Q}_0^{(n-3)}}{(n-3)!} \\
&+ \left(\frac{7}{12} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\mathbb{Q}_0^{(n-4)}}{(n-4)!}.
\end{aligned} \tag{13.54}$$

En conclusion, nous avons prouvé :

Proposition 13.4 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [3]*)

Le logarithme du déterminant de Fredholm associé au processus de r -Airy à deux temps $\mathbb{Q}(t, s, x, y)$ admet, pour $s < 0$ fixé, une expansion asymptotique en $(1/t)$ de la forme :

$$\mathbb{Q}(t, s, x, y) = \mathbb{Q}_0(s, x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{Q}_n(s, x, y)}{t^n}, \tag{13.55}$$

où $\mathbb{Q}_0(s, x, y) = \log \det (I - K^{(0)})$, avec $K^{(0)}$ correspondant au noyau d’Airy étendu (13.1), et où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_1(s, x, y) &= r \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial x} \\
\mathbb{Q}_2(s, x, y) &= \frac{r^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial x^2} - r s \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial y} \\
\mathbb{Q}_3(s, x, y) &= \frac{r^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathbb{Q}_0}{\partial x^3} - r^2 s \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial x \partial y} + r \left(\frac{x}{3} \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial x} + \frac{y}{3} \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial x} + \frac{2s}{3} \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial s} + s^2 \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{13.56}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_4(s, x, y) &= \frac{r^4}{4!} \frac{\partial^4 \mathbb{Q}_0}{\partial x^4} - \frac{r^3 s}{2!} \frac{\partial^3 \mathbb{Q}_0}{\partial x^2 \partial y} + r^2 \left(\frac{x}{3} \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial x^2} + \frac{y}{3} \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial x \partial y} + \frac{2s}{3} \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial x \partial s} \right. \\
&\quad \left. + s^2 \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial x^2} + \frac{7}{12} \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial x} + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbb{Q}_0}{\partial y^2} \right) + r \mathbb{Q}_{4,1}(s, x, y) \\
&\quad \vdots \\
\mathbb{Q}_n(s, x, y) &= r^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \mathbb{Q}_0}{\partial x^n} - r^{n-1} s \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-2} \mathbb{Q}_0}{\partial x^{n-2}} \\
&\quad + r^{n-2} \left[\left(\frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{3} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2s}{3} \frac{\partial}{\partial s} + s^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{(n-3)!} \frac{\partial^{n-3} \mathbb{Q}_0}{\partial x^{n-3}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{7}{12} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{(n-4)!} \frac{\partial^{n-4} \mathbb{Q}_0}{\partial x^{n-4}} \right] \\
&\quad + \sum_{j=3}^{n-1} r^{n-j} \mathbb{Q}_{n,n-j}(s, x, y) .
\end{aligned}$$

En corollaire, nous pouvons en déduire la comparaison suivante entre les probabilités des processus d'Airy et de r -Airy à deux temps (valable pour $t \rightarrow -\infty$, et $s < 0$ fixé) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\mathcal{A}^{(r)}(t-s) \leq x, \mathcal{A}^{(r)}(t+s) \leq y \right) = \\
&\mathbb{P} \left(\begin{aligned} \mathcal{A} \left(t-s - \frac{2rs}{3t^3} \right) &\leq x \left(1 + \frac{r}{3t^3} \right) + \frac{r}{t} \left(1 + \frac{s}{t} + \frac{s^2}{t^2} \right), \\ \mathcal{A} \left(t+s + \frac{2rs}{3t^3} \right) &\leq y \left(1 + \frac{r}{3t^3} \right) + \frac{r}{t} \left(1 - \frac{s}{t} + \frac{s^2}{t^2} \right) \end{aligned} \right) + O \left(\frac{1}{t^4} \right). \quad (13.57)
\end{aligned}$$

■

14 Le processus de Pearcey

Supposons à présent que, parmi les n mouvements browniens contraints ne s'intersectant pas, et partant tous de l'origine au temps $t = 0$ (dans l'échelle initiale), une proportion pn est forcée d'atteindre une position $\beta \in \mathbb{R}$ au temps final $t = 1$, tandis qu'une proportion $(1-p)n$ est forcée d'atteindre une position $\alpha \in \mathbb{R}$ au temps $t = 1$, avec $\alpha < \beta$. Ici, p est un nombre vérifiant $0 < p < 1$.

Il est clair que, lorsque $n \rightarrow \infty$ (et lorsque les points d'arrivée α et β s'éloignent à l'infini en même temps que n), le nuage moyen de particules est supporté sur *un seul* intervalle pour des temps proches de $t = 0$, et

sur *deux* intervalles pour des temps proches de $t = 1$. On s'attend donc à ce qu'il existe un *point de bifurcation*, où le support de la densité moyenne de particules commence à se scinder en deux intervalles distincts. Si l'on effectue un *rescaling* approprié au voisinage de ce *point de bifurcation*, on observe alors l'apparition d'un nouveau processus, le *processus de Pearcey*.

Historiquement, le processus de Pearcey fut d'abord mis en évidence dans un contexte *symétrique*, c'est-à-dire en prenant $p = \frac{1}{2}$, ainsi que $\alpha = (-a) < 0$ et $\beta = a > 0$. Dans ce cas, la moitié ($n/2$) des particules browniennes⁴⁰ est envoyée vers une position strictement positive $a > 0$, tandis que l'autre moitié ($n/2$) est envoyée vers la position symétrique $(-a) < 0$. Dans cette section, nous allons directement traiter les *probabilités jointes* pour m temps différents. La probabilité finie qu'il faut considérer s'écrit donc :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)} \Big|_a \left(\begin{array}{c} \bigcap_{k=1}^m \{ \text{tous les } x_j(t_k) \in E_k \} \\ \left| \begin{array}{l} \text{tous les } x_j(0) = 0, \\ \text{les } (n/2) \text{ chemins de gauche sont forcés} \\ \text{d'atteindre } (-a) < 0 \text{ lorsque } t = 1, \\ \text{les } (n/2) \text{ chemins de droite sont forcés} \\ \text{d'atteindre } a > 0 \text{ lorsque } t = 1 \end{array} \right. \end{array} \right). \quad (14.1)$$

Dans ce modèle symétrique, on fait tendre les points d'arrivée vers l'infini comme la racine carrée de n ; on posera ainsi :

$$a = \sqrt{\frac{n}{2}}. \quad (14.2)$$

On montre alors que la *bifurcation* se produit autour du temps $t = 1/2$. Pour une démonstration de l'existence de la limite ci-dessous, le lecteur pourra se reporter (notamment) aux articles de Brézin-Hikami [15], [16], et de Tracy-Widom [39]. Notons que le *noyau de Pearcey* s'obtient en prenant une limite au noyau de corrélation brownien fini (8.2).

Proposition 14.1 (*Le processus de Pearcey - Cas symétrique*)
La probabilité (14.1) possède, pour $n \rightarrow \infty$, la limite suivante :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \Big|_{a=\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_j \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_k}{4\sqrt{n}} \right) \in \frac{\sqrt{2}}{4n^{1/4}} E_k^c \right\} \right) \\ &= \mathbb{P}^{\mathcal{P}} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \mathcal{P}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right) \\ &= \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\mathcal{P}} \chi_{E_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq m} \right), \end{aligned} \quad (14.3)$$

⁴⁰Bien entendu, on suppose pour cela que le nombre total n de particules est pair.

où $K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\mathcal{P}}$ désigne le noyau de Pearcey étendu⁴¹, qui est défini par :

$$K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\mathcal{P}}(x, y) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{C}} dv \int_{-i\infty}^{i\infty} du \left[\frac{e^{-\frac{u^4}{4} + \tau_\ell \frac{u^2}{2} - u y}}{e^{-\frac{v^4}{4} + \tau_k \frac{v^2}{2} - v x}} \right] \cdot \frac{1}{(u - v)} \\ - \begin{cases} 0 & , \text{ pour } \tau_\ell \leq \tau_k \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_\ell - \tau_k)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\tau_\ell - \tau_k)}} & , \text{ pour } \tau_\ell > \tau_k \end{cases} . \quad (14.4)$$

Ci-dessus, le contour (complexe) $\mathcal{C}$ est constitué des “rayons” allant de $\pm\infty e^{i\pi/4}$ à 0, et de 0 à $\pm\infty e^{-i\pi/4}$, faisant donc un angle de $(\pi/4)$ avec l’axe horizontal. ■

Plus tard cependant, Adler, Orantin et van Moerbeke ont découvert (voir l’article [4]) que le processus de Pearcey apparaissait aussi dans un contexte *asymétrique* plus général, c’est-à-dire en prenant α , β et p arbitraires, avec $\alpha < \beta$ et $0 < p < 1$. Pour rappel, nous faisons ici l’hypothèse qu’une proportion $(1-p)n$ de particules est envoyée sur le point d’arrivée α , tandis qu’une proportion pn de particules est envoyée sur le point d’arrivée β .

Par là, les auteurs de [4] ont démontré, au moyen d’un argument asymptotique rigoureux utilisant la méthode du point col, le caractère *universel* du processus, en ce sens que le noyau de Pearcey dépend de la présence d’une *bifurcation* dans le nuage de mouvements browniens, mais pas de la position précise du point de bifurcation.

Remarquons que la probabilité pour le modèle fini s’écrit maintenant :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)} \Big|_{(\alpha, \beta, p)} \left(\bigcap_{k=1}^m \{ \text{tous les } x_j(t_k) \in E_k \} \left| \begin{array}{l} \text{tous les } x_j(0) = 0, \\ \text{les } (1-p)n \text{ chemins de gauche sont} \\ \text{forcés d’atteindre } \alpha \text{ lorsque } t = 1, \\ \text{les } pn \text{ chemins de droite sont forcés} \\ \text{d’atteindre } \beta \text{ lorsque } t = 1 \end{array} \right. \right) . \quad (14.5)$$

Pour des raisons de facilité et en rapport avec le *rescaling* qui sera utilisé, il est préférable de définir des paramètres q et r , liés à p par les relations :

$$p = \frac{1}{1+q^3} \quad \text{avec } 0 < q < +\infty \quad ; \quad r := \sqrt{q^2 - q + 1} . \quad (14.6)$$

Le résultat d’universalité établi par Adler, Orantin et van Moerbeke dans [4] est résumé dans la Proposition suivante.

⁴¹voir (5.8) pour la définition du déterminant de Fredholm associé à un noyau “étendu”.

Proposition 14.2 (*Le processus de Pearcey - Cas non symétrique*)

Commençons par introduire une série de constantes. Après avoir redéfini la position des points d'arrivée selon $\alpha := a\sqrt{n}$ et $\beta := b\sqrt{n}$, avec donc $a < b$, nous posons :

$$t_0 := \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{r(b-a)}{q+1} \right)^2} \quad ; \quad x_0 := \frac{(2b-a)q + (2a-b)}{q+1} t_0 \quad ; \quad (14.7)$$

$$\mu := \left(\frac{q^2 - q + 1}{q} \right)^{1/4} \quad ; \quad c_0 := \sqrt{\frac{t_0(1-t_0)}{2}} = t_0 \frac{r(b-a)}{q+1} \quad ; \quad (14.8)$$

$$A := \frac{\sqrt{q} (b - x_0) + \frac{1}{\sqrt{q}} (a - x_0)}{(b - a)} . \quad (14.9)$$

Alors la probabilité (14.5) possède, pour $n \rightarrow \infty$, une limite égale à :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{(a\sqrt{n}, b\sqrt{n}, p)} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_j \left(t_0 + \left(\frac{c_0 \mu}{n^{1/4}} \right)^2 2 \tau_k \right) \in \left[\begin{array}{c} x_0 \sqrt{n} + c_0 A \tau_k \\ + \left(\frac{c_0 \mu}{n^{1/4}} \right) E_k^c \end{array} \right] \right\} \right) \\ &= \mathbb{P}^{\mathcal{P}} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \mathcal{P}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right) \\ &= \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\mathcal{P}} \chi_{E_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq m} \right) , \end{aligned} \quad (14.10)$$

où $K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\mathcal{P}}$ est le même noyau de Pearcey étendu que celui donné en (14.4).

En particulier, la bifurcation a maintenant lieu au point de coordonnées :

$$(x, t) = (x_0 \sqrt{n}, t_0) . \quad (14.11)$$

■

Venons-en ensuite aux équations différentielles vérifiées par le processus de Pearcey. Pour cela, il suffit de considérer directement le modèle non symétrique (Proposition 14.2), dans la mesure où ce dernier est plus général que son homologue symétrique (Proposition 14.1). Toutefois, il s'avère que les EDP's que l'on obtient pour le processus limitant sont *différentes* suivant que l'on suppose $q \neq 1$ (ce qui correspond à prendre $p \neq 1/2$) ou bien $q = 1$ (ce qui correspond à prendre $p = 1/2$, et contient donc la situation symétrique). En fait, lorsque $q = 1$, on constate, au niveau des équations, l'apparition d'une sorte de *transition de phase*, analogue à ce que nous avons observé en étudiant le processus de r -Airy.

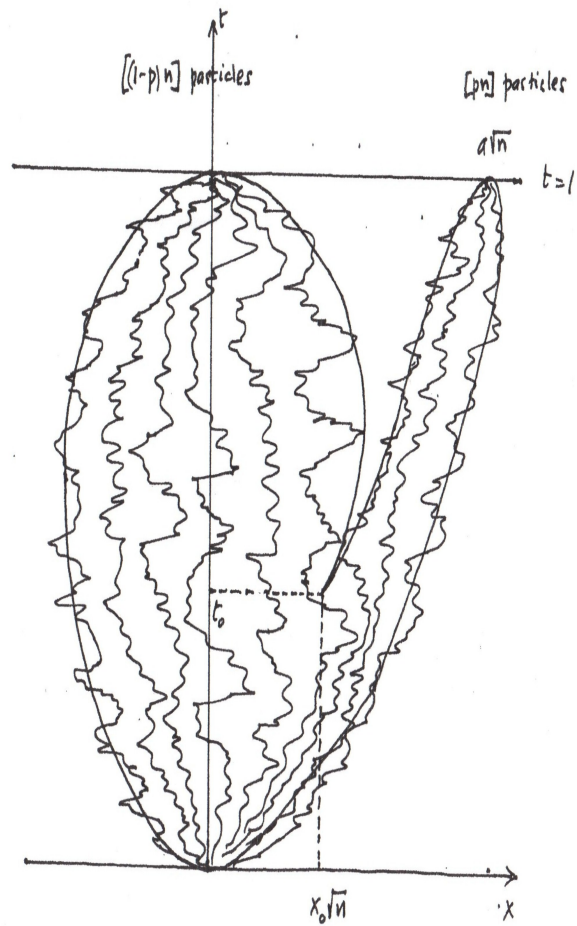


Figure 3
(processus de Pearcey non symétrique)

Mais la fonction $\mathbb{P}^{\mathcal{P}}$ elle-même est indépendante de p et q , en raison de l'universalité de la Proposition 14.2. Dès lors, et c'est là le point intéressant, il est possible de *combiner* les équations aux dérivées partielles trouvées dans les cas $q \neq 1$ et $q = 1$, afin d'en déduire une nouvelle équation *simplifiée* pour le processus de Pearcey. Ce résultat se révèle d'autant plus remarquable qu'il était *a priori* complètement inattendu.

Proposition 14.3 (Adler - Orantin - van Moerbeke [4])

Supposons, comme à notre habitude, que chaque E_k est une réunion d'intervalles sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $E_k := \bigcup_{i=1}^r [z_{2i-1}^{(k)}, z_{2i}^{(k)}]$, pour $1 \leq k \leq m$. Alors la fonction

$$Q(\tau_1, \dots, \tau_m; E_1, \dots, E_m) := \log \mathbb{P}^{\mathcal{P}} \left(\bigcap_{k=1}^m \{ \mathcal{P}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \} \right) \quad (14.12)$$

est une solution de l'équation aux dérivées partielles⁴² :

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\varepsilon_E + 2\varepsilon_\tau - 2 \right) \partial_E^2 Q + 8 \partial_\tau^3 Q \\ & - 4 \tilde{\partial}_E \partial_E \partial_\tau Q + 4 \left\{ \partial_E \partial_\tau Q, \partial_E^2 Q \right\}_{\partial_E}, \end{aligned} \quad (14.13)$$

qui est exprimée en termes des opérateurs :

$$\partial_E := \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{2r} \frac{\partial}{\partial z_i^{(k)}} \quad ; \quad \varepsilon_E := \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{2r} z_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial z_i^{(k)}} \quad ; \quad (14.14)$$

$$\partial_\tau := \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial \tau_k} \quad ; \quad \varepsilon_\tau := \sum_{k=1}^m \tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} \quad ; \quad (14.15)$$

$$\tilde{\partial}_E := \sum_{k=1}^m \tau_k \sum_{i=1}^{2r} \frac{\partial}{\partial z_i^{(k)}}. \quad (14.16)$$

En particulier, si $m = 1$ (probabilité pour un temps), (14.13) devient :

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\varepsilon_E - 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} - 2 \right) \partial_E^2 Q + 8 \frac{\partial^3 Q}{\partial \tau^3} \\ & + 4 \left\{ \partial_E \frac{\partial Q}{\partial \tau}, \partial_E^2 Q \right\}_{\partial_E}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

⁴²Un crochet $\{f, g\}_{\partial_E} := (\partial_E f) g - f (\partial_E g)$ représente un wronskien par rapport à ∂_E .

Preuve : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le point d'arrivée *inférieur* est situé en 0, et que le point d'arrivée *supérieur* est situé en $b\sqrt{n} > 0$. Pour la démonstration, nous allons aussi nous restreindre à prendre $m = 2$ (cas de *deux* temps), le raisonnement se généralisant sans difficulté lorsque $m > 2$.

Nous savons déjà (voir section 6) que la probabilité brownienne finie (14.5) est reliée, par des changements de variables, à un modèle gaussien, déformé par une source externe A , de m matrices aléatoires $n \times n$ hermitiennes et couplées. On a donc :

$$\mathbb{P}_{Br}^{(n)}|_{(0, b\sqrt{n}, p)} \left(\bigcap_{k=1}^2 \left\{ \text{tous les } x_j(t_k) \in \tilde{E}_k \right\} \right) = \mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2), \quad (14.18)$$

où :

$$\mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2) := \frac{1}{Z_n} \int_{\text{spec}(M_k) \in E'_k} e^{-\text{Tr} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} M_k^2 - c M_1 M_2 - A M_2 \right)} dM_1 dM_2,$$

la matrice A étant diagonale, avec $(1-p)n$ valeurs propres égales à 0, et pn valeurs propres égales à α .

Les changements de variables liant les deux processus ont été obtenus dans les équations (6.14) à (6.17), ce qui donne :

$$E'_1 = \sqrt{\frac{2t_2}{t_1(t_2-t_1)}} \tilde{E}_1 \quad , \quad E'_2 = \sqrt{\frac{2(1-t_1)}{(1-t_2)(t_2-t_1)}} \tilde{E}_2, \quad (14.19)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(t_2-t_1)}{(1-t_2)(1-t_1)}} b\sqrt{n} \quad , \quad c = \sqrt{\frac{(1-t_2)t_1}{(1-t_1)t_2}}. \quad (14.20)$$

Il faut ensuite combiner ceci avec le *rescaling* utilisé dans le cadre de la Proposition 14.2, c'est-à-dire avec le fait que :

$$t_k = t_0 + \left(\frac{c_0 \mu}{n^{1/4}} \right)^2 2\tau_k, \quad (14.21)$$

$$\tilde{E}_k = x_0 \sqrt{n} + c_0 A \tau_k + \left(\frac{c_0 \mu}{n^{1/4}} \right) E_k, \quad (14.22)$$

où les différentes constantes intervenant ci-dessus ont été définies dans les relations (14.7) à (14.9), dans lesquelles on a décidé ici de poser $a = 0$. Dans ce cas, nous avons la simplification :

$$t_0 = \frac{1}{1 + 2r^2 \frac{b^2}{(q+1)^2}} \quad ; \quad x_0 = \frac{b(2q-1)}{q+1} t_0 \quad ; \quad \mu = \left(\frac{q^2 - q + 1}{q} \right)^{1/4} = \frac{\sqrt{r}}{q^{1/4}} \quad ;$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{t_0(1-t_0)}{2}} = \frac{t_0 b r}{q+1} \quad ; \quad A = \frac{qb - x_0(q+1)}{b\sqrt{q}} = \frac{q - (2q-1)t_0}{\sqrt{q}}.$$

Nous prenons également, comme “petit” paramètre qui tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$z := \frac{\sqrt{r}}{n^{1/4}} = \left(\frac{q^2 - q + 1}{n} \right)^{1/4} = \mu \left(\frac{q}{n} \right)^{1/4}. \quad (14.23)$$

De plus, il est commode de poser $s_k := \frac{\tau_k}{\sqrt{q}}$ et $\bar{E}_k := \frac{E_k}{q^{1/4}}$ ($1 \leq k \leq 2$), simplement pour avoir plus de facilité dans les calculs qui vont suivre.

On remarque alors que :

$$t_k = t_0 + (c_0 \mu)^2 \frac{2\tau_k}{\sqrt{n}} = t_0 (1 + (1 - t_0) z^2 s_k),$$

ce qui entraîne :

$$(1 - t_k) = (1 - t_0) (1 - t_0 z^2 s_k) \quad , \quad (t_k - t_\ell) = t_0 (1 - t_0) z^2 (s_k - s_\ell) ,$$

pour $1 \leq k, \ell \leq 2$. On peut se servir de ces formules pour exprimer les variables α, c, E'_1 et E'_2 en fonction de $s_1, s_2, \bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$. Par exemple, on calcule que :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{2(t_2 - t_1)}{(1 - t_2)(1 - t_1)}} b \sqrt{n} \\ &= \sqrt{\frac{2t_0}{1 - t_0}} \sqrt{\frac{(s_2 - s_1)}{(1 - t_0 z^2 s_2)(1 - t_0 z^2 s_1)}} z b \sqrt{n} \\ &= \frac{(q + 1)}{z} \sqrt{\frac{(s_2 - s_1)}{(1 - t_0 z^2 s_2)(1 - t_0 z^2 s_1)}}, \end{aligned} \quad (14.24)$$

puisque, dans la troisième égalité, nous avons $\sqrt{\frac{2t_0}{1 - t_0}} = \frac{(q+1)}{br}$ et $\sqrt{n} = \frac{r}{z^2}$.

En procédant de la même manière, on trouve, à partir de (14.20) :

$$c = \sqrt{\frac{(1 - t_2)t_1}{(1 - t_1)t_2}} = \sqrt{\frac{(1 - t_0 z^2 s_2)(1 + (1 - t_0) z^2 s_1)}{(1 - t_0 z^2 s_1)(1 + (1 - t_0) z^2 s_2)}}. \quad (14.25)$$

En ce qui concerne les variables spatiales, observons tout d’abord que, par (14.22), il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_k &= c_0 \left(\frac{x_0}{c_0} \sqrt{n} + A \tau_k + \frac{\mu}{n^{1/4}} E_k \right) \\ &= c_0 \left((2q - 1) \frac{\sqrt{n}}{r} + (q - (2q - 1)t_0) \frac{\tau_k}{\sqrt{q}} + \frac{E_k}{q^{1/4}} \frac{\sqrt{r}}{n^{1/4}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{t_0(1 - t_0)}{2}} \left(\frac{(2q - 1)}{z^2} + (q - (2q - 1)t_0) s_k + \bar{E}_k z \right), \end{aligned}$$

pour $1 \leq k \leq 2$, et par conséquent, en substituant cela dans (14.19) :

$$E'_1 = \sqrt{\frac{2t_2}{t_1(t_2 - t_1)}} \tilde{E}_1 \quad (14.26)$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + (1 - t_0)z^2s_2)}{(1 + (1 - t_0)z^2s_1)(s_2 - s_1)}} \left(\frac{(2q - 1)}{z^3} + \frac{(q - (2q - 1)t_0)}{z} s_1 + \bar{E}_1 \right),$$

$$E'_2 = \sqrt{\frac{2(1 - t_1)}{(1 - t_2)(t_2 - t_1)}} \tilde{E}_2 \quad (14.27)$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - t_0z^2s_1)}{(1 - t_0z^2s_2)(s_2 - s_1)}} \left(\frac{(2q - 1)}{z^3} + \frac{(q - (2q - 1)t_0)}{z} s_2 + \bar{E}_2 \right).$$

Notons qu'il est également possible d'*inverser* les équations (14.24) à (14.27), ce qui permet d'exprimer les variables $s_1, s_2, \bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$, si l'on connaît α, c, E'_1 et E'_2 :

$$s_1 = \frac{c^2\alpha^2z^4 - (q + 1)^2(1 - c^2)}{z^2 [(q + 1)^2(1 - t_0)(1 - c^2) + c^2\alpha^2t_0z^4]}, \quad (14.28)$$

$$s_2 = \frac{\alpha^2z^4 - (q + 1)^2(1 - c^2)}{z^2 [(q + 1)^2(1 - t_0)(1 - c^2) + \alpha^2t_0z^4]}, \quad (14.29)$$

$$\bar{E}_1 = \frac{c\alpha z^4(q + 1)(1 - c^2)E'_1 - (q + 1)^2(q - 1)(1 - c^2) - qc^2\alpha^2z^4}{z^3 [(q + 1)^2(1 - t_0)(1 - c^2) + c^2\alpha^2t_0z^4]}, \quad (14.30)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\alpha z^4(q + 1)(1 - c^2)E'_2 - (q + 1)^2(q - 1)(1 - c^2) - q\alpha^2z^4}{z^3 [(q + 1)^2(1 - t_0)(1 - c^2) + \alpha^2t_0z^4]}. \quad (14.31)$$

Enfin, les nombres n_+ et n_- de mouvements browniens qui se terminent, respectivement, en $b\sqrt{n}$ et en 0, sont donnés par :

$$n_+ = pn = \frac{n}{q^3 + 1} = \frac{n}{(q + 1)(q^2 - q + 1)} = \frac{1}{z^4(q + 1)}, \quad (14.32)$$

$$n_- = (1 - p)n = \frac{q^3 n}{q^3 + 1} = \frac{q^3 n}{(q + 1)(q^2 - q + 1)} = \frac{q^3}{z^4(q + 1)}. \quad (14.33)$$

Maintenant, et cela constitue la seconde étape de la démonstration, nous savons, par la Proposition 7.9, que la fonction $\log \mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_1, E'_2)$ satisfait l'EDP⁴³ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(F_+(\mathcal{B}_{-1}G_-) + F_-(\mathcal{B}_{-1}G_+) \right) \left(F_+(\mathcal{B}_{-1}F_-) - F_-(\mathcal{B}_{-1}F_+) \right) \\ &\quad - \left(F_+G_- + F_-G_+ \right) \left(F_+(\mathcal{B}_{-1}^2F_-) - F_-(\mathcal{B}_{-1}^2F_+) \right), \end{aligned} \quad (14.34)$$

⁴³Il suffit en effet de poser, à l'intérieur du déterminant de la matrice 3×3 qui apparaît dans la Proposition 7.9 : $m = 2$, $n_1 = n_+$, $n_2 = n_-$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, $\partial_b^{(1)} = (-\partial/\partial\alpha)$, $\partial_b^{(2)} = (\partial/\partial\alpha)$, et aussi $\mathcal{J}_{11} = \mathcal{J}_{22} = \frac{-1}{(1-c^2)}$ et $\mathcal{J}_{12} = \mathcal{J}_{21} = \frac{-c}{(1-c^2)}$.

dans laquelle :

$$\mathcal{B}_{-1} := \frac{1}{1-c^2} \left(-\partial_{E'_1} - c \partial_{E'_2} \right), \quad (14.35)$$

et en termes des expressions :

$$\begin{aligned} F_+ &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{B}_{-1} \log \mathbb{P}_n - \frac{cpn}{1-c^2}, \\ F_- &= \left[\frac{1}{1-c^2} (c \partial_{E'_1} + \partial_{E'_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \mathcal{B}_{-1} \log \mathbb{P}_n - \frac{c(1-p)n}{1-c^2}, \\ G_+ &= \frac{1}{2} \left\{ H_1^+, F_+ \right\}_{\mathcal{B}_{-1}} + \frac{1}{2} \left\{ H_2^+, F_+ \right\}_{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, \\ G_- &= \frac{1}{2} \left\{ H_1^-, F_- \right\}_{\mathcal{B}_{-1}} - \frac{1}{2} \left\{ H_2^-, F_- \right\}_{\frac{1}{1-c^2} (c \partial_{E'_1} + \partial_{E'_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}}, \\ H_1^+ &= -\frac{2c}{1-c^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n - \frac{2cp(1-p)n^2}{\alpha(1-c^2)} - \frac{2\alpha c np}{(1-c^2)^2}, \\ H_1^- &= \left(\left(\varepsilon_{E'_2} - c \frac{\partial}{\partial c} - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \mathcal{B}_{-1} + \frac{2c}{1-c^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \log \mathbb{P}_n + \frac{2cp(1-p)n^2}{\alpha(1-c^2)}, \\ H_2^+ &= \left(-\varepsilon_{E'_1} + c \frac{\partial}{\partial c} - \frac{2\alpha c}{1-c^2} \mathcal{B}_{-1} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathbb{P}_n, \\ H_2^- &= \left(\varepsilon_{E'_1} - c \frac{\partial}{\partial c} \right) \left(\frac{1}{1-c^2} (c \partial_{E'_1} + \partial_{E'_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \log \mathbb{P}_n. \end{aligned}$$

Grâce aux changements de variables (14.24) à (14.33), il est possible de transformer l'équation (14.34) en une EDP qui est fonction uniquement de $s_1, s_2, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ (ou bien, ce qui est équivalent, de τ_1, τ_2, E_1, E_2), avec q et z comme paramètres.

En développant cette EDP en une série de puissances de z , et en prenant seulement en compte le terme dominant lorsque $z \rightarrow 0$ (c'est-à-dire $n \rightarrow \infty$), qui est d'ordre z^{-32} , on tire :

$$0 = q^4 (q-1) \left\{ \partial_E^3 Q, \mathbb{X} \right\}_{\partial_E} z^{-32} + O(z^{-31}), \quad (14.36)$$

où⁴⁴ $Q := \log \mathbb{P}^P \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \mathcal{P}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right)$, et où $\mathbb{X}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &:= \left(\varepsilon_E + 2\varepsilon_\tau - 2 \right) \partial_E^2 Q + 8 \partial_\tau^3 Q \\ &\quad - 4 \tilde{\partial}_E \partial_E \partial_\tau Q + 4 \left\{ \partial_E \partial_\tau Q, \partial_E^2 Q \right\}_{\partial_E}. \end{aligned} \quad (14.37)$$

⁴⁴En effet, la Proposition 14.2 entraîne que : $\log \mathbb{P}_n(\alpha, c, E'_k) = Q(\tau_k, E_k) + O(z)$.

Dès lors, tant que $q \neq 1$ (modèle *non symétrique*), (14.36) montre qu'en passant à la limite $z \rightarrow 0$, nous devons avoir l'annulation du wronskien :

$$\{\partial_E^3 Q, \mathbb{X}\}_{\partial_E} = 0. \quad (14.38)$$

Par contre, si $q = 1$ (modèle *symétrique*), le coefficient de z^{-32} dans (14.36) s'annule identiquement, si bien qu'il nous faut aller plus loin dans le développement, et que l'équation limitante demande maintenant d'annuler le coefficient de z^{-31} . On vérifie que l'on obtient l'annulation du wronskien :

$$\{\partial_E^2 \partial_\tau Q, \mathbb{X}\}_{\partial_E} = 0. \quad (14.39)$$

Comme la fonction Q elle-même est indépendante de q , elle satisfait donc *simultanément* (14.38) et (14.39). Mais un wronskien $\{f, g\}_{\partial_E}$ est nul si et seulement si les fonctions f et g sont "proportionnelles". On en conclut qu'on doit avoir $\mathbb{X} = 0$, sauf si, *par un accident très improbable*, le wronskien par rapport à ∂_E des quantités $\partial_E^3 Q$ et $\partial_E^2 \partial_\tau Q$ était également nul.

Cependant, il est possible de montrer, en utilisant pour cela certains arguments élaborés d'analyse fonctionnelle (voir la section 6 dans [4]), qu'en fait ce wronskien *n'est pas nul* :

$$\{\partial_E^3 Q, \partial_E^2 \partial_\tau Q\}_{\partial_E} \neq 0. \quad (14.40)$$

Par conséquent, on a bien l'équation $\mathbb{X} = 0$, ce qui achève la démonstration de la Proposition 14.3, car $\mathbb{X}$ n'est autre que le membre de droite de (14.13). ■

Avant de terminer ce chapitre, nous pouvons faire une petite remarque à propos de la *comparaison* entre le processus de Pearcey (voir section 13) et le processus de r -Airy (voir sections 10 à 12).

Intuitivement, on s'attend à ce que le processus de Pearcey (avec pn chemins browniens envoyés sur $b\sqrt{n}$, et $(1-p)n$ chemins browniens envoyés sur 0) tende vers le processus de r -Airy quand on prend la limite $p \rightarrow 0$.

Or, nous savons par la Proposition 14.2 que, dans le processus de Pearcey, le point de bifurcation est situé (pour n très grand) au point de coordonnées $(x_0\sqrt{n}, t_0)$ dans le plan (x, t) , avec x_0 et t_0 définis comme en (14.7), en posant $a = 0$. En considérant la limite $p \rightarrow 0$, c'est-à-dire $q \rightarrow \infty$, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} (x_0 \sqrt{n}, t_0) &= \left(2b t_0 \sqrt{n}, \frac{1}{1 + 2b^2} \right) \\ &= \left(\frac{2b}{1 + 2b^2} \sqrt{n}, \frac{1}{1 + 2b^2} \right). \end{aligned} \quad (14.41)$$

Ce point, qui appartient à la courbe $\mathcal{C} : \left\{ x = \sqrt{2nt(1-t)} \right\}$ (voir (10.6)), est donc maintenant situé sur le *bord droit* du nuage moyen de particules.

En fait, il s'agit précisément du point autour duquel on avait effectué le *rescaling* pour le processus de r -Airy ! En effet, la droite joignant ce point à $(b\sqrt{n}, 1)$ est exactement *tangente* à la courbe $\mathcal{C}$, comme on peut le voir d'après (10.7).

15 Le processus de Pearcey avec cibles intermédiaires

Dans notre article [2], nous avons également étudié une généralisation possible du *processus de Pearcey symétrique*, dans laquelle on introduit $(p-2)$ cibles intermédiaires⁴⁵ comprises entre les points d'arrivée extrêmes $-\alpha$ et α ($\alpha > 0$). Pour des raisons de commodité, il est préférable de rebaptiser les p points d'arrivée comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{a} & < & -\tilde{c}_1 & < & -\tilde{c}_2 & < & \cdots & < & -\tilde{c}_{p-2} & < & -\tilde{a} \\ n_+ & & n_1 & & n_2 & & \cdots & & n_{p-2} & & n_- \end{array}, \quad (15.1)$$

où la deuxième ligne indique le nombre de particules browniennes contraintes d'arriver en ce point. En particulier, nous avons $\tilde{a} = -\alpha < 0$. Observons que, comme il y a maintenant p points d'arrivée, il sera nécessaire, pour extraire l'asymptotique des EDP's satisfaites par ce type de processus, d'utiliser toute la puissance fournie par les Propositions 7.9 et 7.10 !

Notre objectif est de déterminer le processus critique obtenu quand on fait tendre le nombre total de particules vers l'infini, de manière telle que :

- En posant $n_+ = n_- = n$ (notons que n ne désigne donc *pas* ici le nombre total de chemins, ce dernier valant : $2n + \sum_{\ell=1}^{p-2} n_\ell$), on fait tendre $n \rightarrow \infty$.
- Les nombres $n_1, n_2, \dots, n_{p-2}$ restent *finis* et *fixés*.
- On fait tendre $\tilde{a}$ vers $(-\infty)$ comme la racine carrée de n , c'est-à-dire que l'on pose :

$$\tilde{a} = -\sqrt{n}. \quad (15.2)$$

⁴⁵Attention : p désigne ici le *nombre total de points d'arrivée* (ce qui était d'ailleurs la convention adoptée dans la section 7), alors que dans la section précédente (sur le processus de Pearcey), p représentait plutôt une *proportion* de particules : voir (14.6).

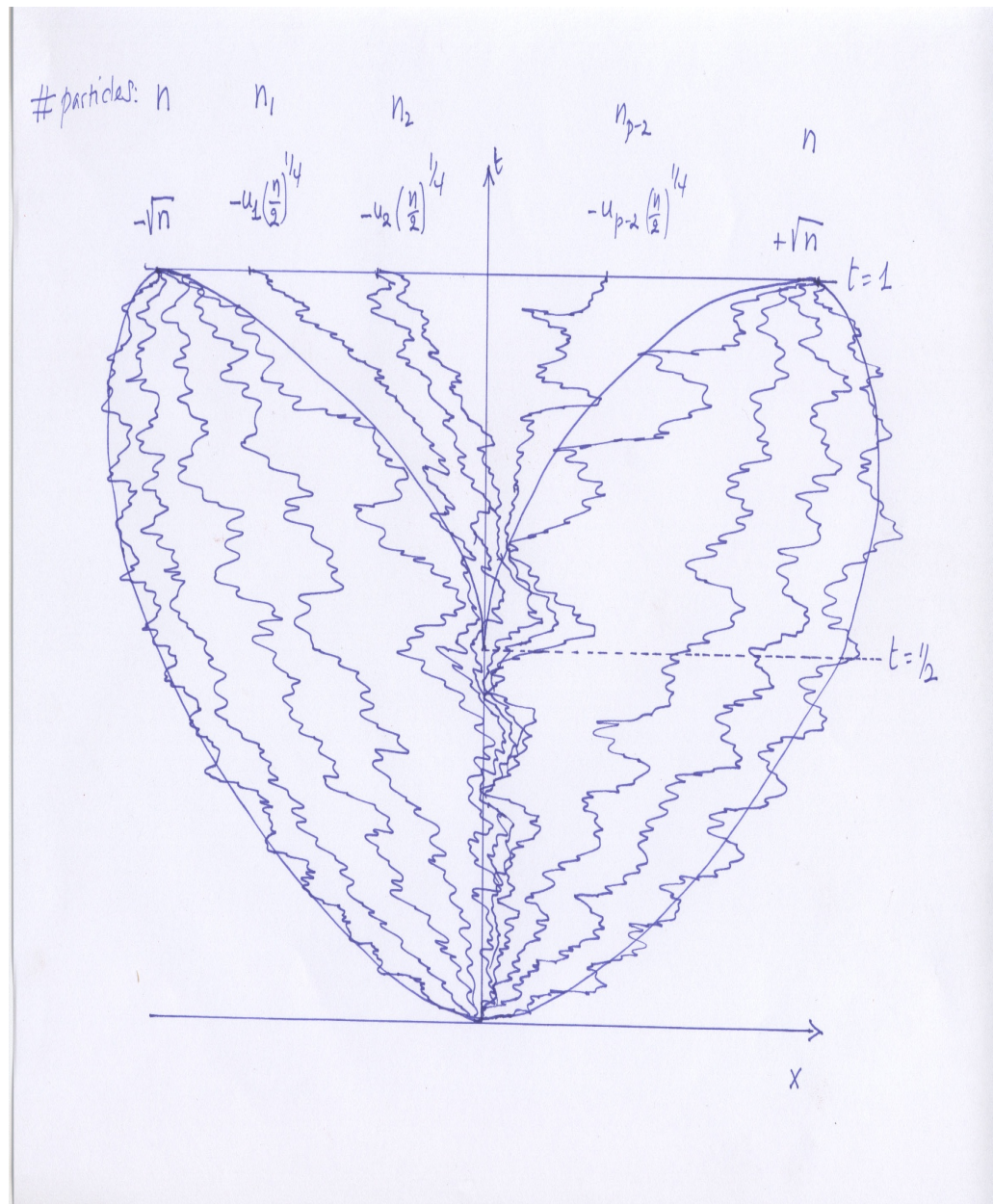


Figure 4
(processus de Pearcey avec cibles intermédiaires)

- Les positions $(-\tilde{c}_1), \dots, (-\tilde{c}_{p-2})$ des cibles intermédiaires s'éloignent également vers l'infini, mais avec un *taux plus lent*, à savoir :

$$\tilde{c}_\ell = u_\ell \left(\frac{n}{2}\right)^{1/4} \quad (1 \leq \ell \leq p-2), \quad (15.3)$$

pour certains paramètres $u_1, u_2, \dots, u_{p-2}$.

Nous allons voir que, moyennant un *rescaling* des variables d'espace et de temps identique à celui utilisé dans la Proposition 14.1, un nouveau processus limitant apparaît pour décrire les fluctuations statistiques autour du *point de bifurcation*, où le groupe de particules envoyées vers $(-\sqrt{n})$ commence à se séparer du groupe de particules envoyées vers $\sqrt{n}$.

Nous l'avons appelé le “*processus de Pearcey avec cibles intermédiaires*” (en anglais : “*Pearcey process with inliers*”). Ce processus, qui généralise le *processus de Pearcey symétrique*, est en fait gouverné par un noyau de corrélation qui ressemble très fort à celui de Pearcey. Pour l'obtenir, on part du noyau brownien fini donné par la Proposition 8.1, qui dans ce cas précis s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} & K_{t_k, t_\ell}^{(n)}(x, y ; \tilde{a}, -\tilde{c}_1, \dots, -\tilde{c}_{p-2}, -\tilde{a}) \\ &= \frac{(-1)}{2\pi^2 \sqrt{(1-t_k)(1-t_\ell)}} \int_{\mathcal{C}} dv \int_{\Gamma_L} du \frac{1}{(u-v)} \\ &\times \frac{e^{-\frac{t_k v^2}{(1-t_k)} + \frac{2xv}{(1-t_k)} - n_+ \ln(v-\tilde{a}) - n_- \ln(v+\tilde{a})}}{e^{-\frac{t_\ell u^2}{(1-t_\ell)} + \frac{2yu}{(1-t_\ell)} - n_+ \ln(u-\tilde{a}) - n_- \ln(u+\tilde{a})}} \prod_{\ell=1}^{p-2} \left(\frac{u+\tilde{c}_\ell}{v+\tilde{c}_\ell}\right)^{n_\ell} \\ &- \begin{cases} 0 & , \text{ si } t_k \geq t_\ell, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi(t_\ell-t_k)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{(t_\ell-t_k)} + \frac{x^2}{(1-t_k)} - \frac{y^2}{(1-t_\ell)}} & , \text{ si } t_k < t_\ell, \end{cases} \end{aligned} \quad (15.4)$$

où $\mathcal{C}$ est un contour fermé entourant une fois $(\pm\tilde{a})$ et les $(-\tilde{c}_\ell)$, et situé à la gauche de la ligne $\Gamma_L := L + i\mathbb{R}$, avec L assez grand pour que $\Re(u-v) > 0$.

On effectue ensuite une analyse asymptotique de (15.4), en procédant de la même manière (méthode du point col) que pour la démonstration des Propositions 14.1 et 14.2, ayant conduit au *noyau étendu de Pearcey* : voir [4], [39]. On trouve la limite suivante, lorsque $n_+ = n_- = n \rightarrow \infty$:

Proposition 15.1 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [2]*)

Considérons le modèle de $(2n + \sum_{\ell=1}^{p-2} n_\ell)$ mouvements browniens décrit ci-dessus (les particules ne s'intersectant pas), dans lequel tous les chemins partent de l'origine au temps $t = 0$, et tel qu'en $t = 1$: $n = n_\pm$ particules

sont envoyées sur $\pm\sqrt{n}$, et n_ℓ particules sont envoyées sur $-u_\ell \left(\frac{n}{2}\right)^{1/4}$, avec $1 \leq \ell \leq p-2$. Alors, en gardant $n_1, \dots, n_{p-2}$ fixés, nous avons :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_j \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_k}{4\sqrt{2n}} \right) \in \frac{E_k^c}{4(n/2)^{1/4}} \right\} \right) \\ &= \mathbb{P}^{\tilde{\mathcal{P}}(u_1, \dots, u_{p-2})} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \tilde{\mathcal{P}}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right) \\ &= \det \left(I - \left(\chi_{E_k} K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\tilde{\mathcal{P}}} \chi_{E_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq m} \right). \end{aligned} \quad (15.5)$$

La probabilité ci-dessus est égale au déterminant de Fredholm associé à une perturbation rationnelle du noyau de Pearcey étendu, qui est définie par l'expression :

$$\begin{aligned} & K_{\tau_k, \tau_\ell}^{\tilde{\mathcal{P}}}(x, y ; u_1, \dots, u_{p-2}) \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\mathcal{C}} dv \int_{-i\infty}^{i\infty} du \cdot \frac{1}{(u-v)} \left[\frac{e^{-\frac{u^4}{4} + \tau_\ell \frac{u^2}{2} - u y}}{e^{-\frac{v^4}{4} + \tau_k \frac{v^2}{2} - v x}} \right] \prod_{\ell=1}^{p-2} \left(\frac{u + u_\ell}{v + u_\ell} \right)^{n_\ell} \\ &- \begin{cases} 0 & , \text{ pour } \tau_\ell \leq \tau_k \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_\ell - \tau_k)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(\tau_\ell - \tau_k)}} & , \text{ pour } \tau_\ell > \tau_k \end{cases}, \end{aligned} \quad (15.6)$$

où $\mathcal{C}$ est un contour constitué des “rayons” allant de $\pm\infty e^{i\pi/4}$ à 0, et de 0 à $\pm\infty e^{-i\pi/4}$, faisant un angle de $(\pi/4)$ avec l'axe horizontal.

Remarquons que (15.6) ne diffère du noyau de Pearcey (14.4) que par les facteurs $\prod_{\ell=1}^{p-2} \left(\frac{u+u_\ell}{v+u_\ell} \right)^{n_\ell}$ dans l'intégrand, ceux-ci témoignant de la présence des cibles intermédiaires.

■

Nous allons à présent, suivant notre habitude, calculer une EDP vérifiée par le logarithme du déterminant de Fredholm (15.5). Dans un souci de simplicité, nous nous contenterons de donner une démonstration détaillée de ce résultat lorsque $m = 1$ (cas de *un temps*), même si l'équation finale peut être généralisée sans problème (c'est d'ailleurs un exercice proposé au lecteur) pour traiter les probabilités jointes pour m temps, avec $m \geq 1$.

A nouveau, en relation avec ces mouvements browniens, nous considérons un modèle matriciel hermitien, affecté d'une mesure gaussienne, et déformé par une matrice-source A , tel que :

$$\mathbb{P}_n(b_1, \dots, b_p ; E') := \frac{1}{Z_n} \int_{\text{spec}(M) \in E'} e^{-\text{Tr}(\frac{1}{2}M^2 - AM)} dM. \quad (15.7)$$

De façon à ressembler à (15.1), il est naturel de poser :

$$b = (b_1, \dots, b_p) = (a, -c_1, \dots, -c_{p-2}, -a), \quad (15.8)$$

de sorte que la matrice diagonale A est donnée ici par :

$$A := \text{diag} \left(\underbrace{a, \dots, a}_{n_+}, \underbrace{-c_1, \dots, -c_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{-c_{p-2}, \dots, -c_{p-2}}_{n_{p-2}}, \underbrace{-a, \dots, -a}_{n_-} \right). \quad (15.9)$$

Si nous appliquons la Proposition 7.10 à la probabilité (15.7), on peut noter que nous avons la contrainte linéaire $\sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell b_\ell = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(-a) = 0$, et par conséquent :

$$\kappa_1 = \kappa_p = \frac{1}{2} \quad ; \quad \kappa_\ell = 0 \quad (2 \leq \ell \leq p-1). \quad (15.10)$$

De plus, toujours dans les notations de la Proposition 7.10, il vient :

$$\partial_b^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial a} - \partial_c \right) \quad ; \quad \partial_b^{(p)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} - \partial_c \right) \quad ; \quad \partial_b^{(\ell)} = \frac{\partial}{\partial c_{\ell-1}} \quad (2 \leq \ell \leq p-1),$$

ainsi que $\varepsilon = \varepsilon_{E'} - a \frac{\partial}{\partial a} - \varepsilon_c$ (voir 7.88), avec :

$$\partial_c := \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{\partial}{\partial c_\ell} \quad ; \quad \varepsilon_c := \sum_{\ell=1}^{p-2} c_\ell \frac{\partial}{\partial c_\ell}. \quad (15.11)$$

On déduit alors de cette même Proposition que $\log \mathbb{P}_n(a, c_1, \dots, c_{p-2}; E')$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\det \begin{pmatrix} F_+ & F_1 & F_2 & \dots & F_{p-2} & F_- & G_0 \\ F'_+ & F'_1 & F'_2 & \dots & F'_{p-2} & F'_- & G_1 \\ F''_+ & F''_1 & F''_2 & \dots & F''_{p-2} & F''_- & G_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ F^{(p)}_+ & F^{(p)}_1 & F^{(p)}_2 & \dots & F^{(p)}_{p-2} & F^{(p)}_- & G_p \end{pmatrix} = 0, \quad (15.12)$$

dans laquelle $' := \partial_{E'}$, et où, comme il s'ensuit à partir des expressions (7.90) à (7.94) :

$$F_\pm = \frac{1}{2} \left(\mp \frac{\partial}{\partial a} - \partial_c + \partial_{E'} \right) \partial_{E'} \log \mathbb{P}_n + n_\pm, \quad (15.13)$$

$$F_\ell = \frac{\partial}{\partial c_\ell} \partial_{E'} \log \mathbb{P}_n + n_\ell \quad (1 \leq \ell \leq p-2), \quad (15.14)$$

$$G_0 = 0 \quad , \quad G_{k+1} = \partial_{E'} G_k + \frac{H_+ F_+^{(k)}}{F_+^2} + \frac{H_- F_-^{(k)}}{F_-^2} + \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{H_\ell F_\ell^{(k)}}{F_\ell^2}, \quad (15.15)$$

les G_k se calculant en termes des quantités $H_{\pm}$ et H_{ℓ} ($1 \leq \ell \leq p-2$), elles-mêmes définies par une différence de wronskiens :

$$H_{\pm} := \left\{ H_{\pm}^{(1)}, F_{\pm} \right\}_{\partial_{E'}} - \left\{ H_{\pm}^{(2)}, F_{\pm} \right\}_{\frac{1}{2}(\mp \frac{\partial}{\partial a} - \partial_c)} , \quad (15.16)$$

$$H_{\ell} := \left\{ H_{\ell}^{(1)}, F_{\ell} \right\}_{\partial_{E'}} - \left\{ H_{\ell}^{(2)}, F_{\ell} \right\}_{\frac{\partial}{\partial c_{\ell}}} , \quad (15.17)$$

avec⁴⁶ :

$$H_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{4} \left(-2 \partial_{E'} \varepsilon + (\varepsilon + 3) \left(\mp \frac{\partial}{\partial a} - \partial_c + \partial_{E'} \right) \right) \log \mathbb{P}_n + C_{\pm} , \quad (15.18)$$

$$H_{\ell}^{(1)} = 2 \frac{\partial}{\partial c_{\ell}} \log \mathbb{P}_n + C_{\ell} , \quad (15.19)$$

$$H_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon \pm 2 a \partial_{E'}) \left(\mp \frac{\partial}{\partial a} - \partial_c + \partial_{E'} \right) \log \mathbb{P}_n , \quad (15.20)$$

$$H_{\ell}^{(2)} = (1 - \varepsilon - 2 c_{\ell} \partial_{E'}) \frac{\partial}{\partial c_{\ell}} \log \mathbb{P}_n . \quad (15.21)$$

Maintenant, nous savons que le lien entre la probabilité $\mathbb{P}_n$, qui dépend des variables $a, c_1, \dots, c_{p-2}, E'$, et la probabilité $\mathbb{P}_{Br}^{(n)}$ qui se réfère au modèle de mouvements browniens, et qui dépend des variables $t, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{p-2}, \tilde{E}$, est donné par les transformations (voir (6.7)) :

$$E' = \tilde{E} \sqrt{\frac{2}{t(1-t)}} \quad ; \quad a = \tilde{a} \sqrt{\frac{2t}{1-t}} \quad ; \quad c_{\ell} = \tilde{c}_{\ell} \sqrt{\frac{2t}{1-t}} . \quad (15.22)$$

A cela, il faut encore appliquer le *rescaling* de la Proposition 15.1, qui fait intervenir de nouvelles variables τ, E , telles que :

$$\tilde{E} = \frac{E}{4 (n/2)^{1/4}} \quad ; \quad t = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{4 \sqrt{2n}} . \quad (15.23)$$

Nous définissons $z := n^{-1/4}$ comme “petit” paramètre, de sorte que $z \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Également, pour des raisons de commodité ultérieure, il nous

⁴⁶En outre, les constantes $C_{\pm}$ et C_{ℓ} ($1 \leq \ell \leq p-2$) qui apparaissent dans les formules (15.18) et (15.19) sont égales à :

$$C_{\pm} = -n_{\pm} \left(\pm a \pm \frac{n_{\mp}}{a} + 2 \sum_{k=1}^{p-2} \frac{n_k}{(\pm a + c_k)} \right) ,$$

$$C_{\ell} = 2 n_{\ell} \left(c_{\ell} + \frac{n_+}{c_{\ell} + a} + \frac{n_-}{c_{\ell} - a} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^{p-2} \frac{n_k}{c_{\ell} - c_k} \right) .$$

arrivera d'utiliser les variables équivalentes $(s, \check{E})$ au lieu de (τ, E) , avec $s := \tau/\sqrt{8}$ et $\check{E} := E/2^{5/4}$. De cette manière, nous trouvons :

$$\tilde{E} = \frac{z}{\sqrt{2}} \check{E} \quad ; \quad t = \frac{1}{2} (1 + s z^2) \quad ; \quad (15.24)$$

$$\tilde{a} = -\sqrt{n} = \left(\frac{-1}{z^2} \right) \quad ; \quad \tilde{c}_\ell = u_\ell \left(\frac{n}{2} \right)^{1/4} = \frac{u_\ell 2^{1/4}}{\sqrt{2} z} =: \frac{v_\ell}{\sqrt{2} z} . \quad (15.25)$$

Ainsi, en combinant les transformations (15.22) avec (15.24) et (15.25), et en écrivant :

$$Q(E', a, c) := \log \mathbb{P}_n(a, c_1, \dots, c_{p-2}; E') , \quad (15.26)$$

$$P(\check{E}, s, v) := \log \mathbb{P}_{B_r}^{(n)} \left(\text{tous les } x_j \left(\frac{1 + s z^2}{2} \right) \in \frac{z \check{E}}{\sqrt{2}} \right) \Bigg|_{\substack{\tilde{a} = \left(\frac{-1}{z^2} \right) \\ \tilde{c}_\ell = \frac{v_\ell}{\sqrt{2} z}}} , \quad (15.27)$$

on voit que les fonctions Q et P , qui sont égales à changement de variables près, satisfont la relation :

$$P(\check{E}, s, v) = Q \left(\underbrace{\frac{2 z \check{E}}{\sqrt{1 - s^2 z^4}}}_{E'}, \underbrace{\sqrt{\frac{1 + s z^2}{1 - s z^2}} \frac{\sqrt{2}}{z^2}}_a, \underbrace{\sqrt{\frac{1 + s z^2}{1 - s z^2}} \frac{v}{z}}_c \right) . \quad (15.28)$$

Par inversion de (15.28), on vérifie alors facilement que :

$$Q(E', a, c) = P \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2} a z E'}{a^2 z^4 + 2}}_{\check{E}}, \underbrace{\frac{a^2 z^4 - 2}{z^2 (a^2 z^4 + 2)}}_s, \underbrace{\frac{\sqrt{2} c}{a z}}_v \right) . \quad (15.29)$$

Mais la fonction $Q(E', a, c)$ est une solution de l'équation (15.12). Dès lors, afin de déterminer une EDP correspondante pour la fonction $P(\check{E}, s, v)$, il suffit de substituer (15.29) dans (15.12), et de calculer comment s'exprime l'action des dérivées partielles par rapport aux variables E', a, c , en termes des variables $\check{E}, s, v$. Nous obtenons :

$$\partial_{E'} = \frac{\sqrt{1 - s^2 z^4}}{2z} \partial_{\check{E}} = \left(\frac{1}{2z} - \frac{s^2 z^3}{4} - \frac{s^4 z^7}{16} + O(z^9) \right) \partial_{\check{E}} , \quad (15.30)$$

$$\varepsilon_{E'} = \varepsilon_{\check{E}} , \quad (15.31)$$

$$\partial_c = z \sqrt{\frac{1 - s z^2}{1 + s z^2}} \partial_v = \left(z - s z^3 + \frac{s^2 z^5}{2} + O(z^7) \right) \partial_v , \quad (15.32)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial a} &= (1 - s z^2)^2 \sqrt{\frac{1 + s z^2}{1 - s z^2}} \frac{\partial}{\partial s} - z^2 \sqrt{\frac{1 - s z^2}{1 + s z^2}} (\varepsilon_v + s z^2 \varepsilon_{\check{E}}) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} - z^2 \left(\varepsilon_v + s \frac{\partial}{\partial s} \right) - s z^4 \left(\frac{1}{2} s \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon_{\check{E}} - \varepsilon_v \right) + O(z^6) , \end{aligned} \quad (15.33)$$

où l'on a aussi indiqué les premiers termes du développement asymptotique en puissances de z , valable pour $z \rightarrow 0$.

Il nous reste désormais à en déduire l'expansion (en puissances de z) des quantités composées $F_{\pm}$, F_{ℓ} , $H_{\pm}$ et H_{ℓ} , telles qu'elles apparaissent dans le déterminant $(p+1) \times (p+1)$ de l'équation (15.12). La Proposition suivante répond à cette question. Dans le souci d'alléger au maximum les notations, l'écriture des dérivées partielles sera souvent abrégée ; par exemple :

$$(\partial_{E'})^k F_{\ell} \mapsto F_{\ell}^{(k)} \quad ; \quad (\partial_{\check{E}})^k P \mapsto P^{(k)} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial s} P \mapsto \dot{P} . \quad (15.34)$$

Proposition 15.2 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [2]*)

Lorsque $z \rightarrow 0$, nous avons les estimations :

$$(\partial_{E'})^k F_{\pm} = \left(\frac{\partial_{\check{E}}}{2z} \right)^k \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{8z^2} \partial_{\check{E}}^2 P \mp \frac{\partial_{\check{E}} \dot{P}}{4\sqrt{2}z} \right) + O(z^{-k}), \quad (15.35)$$

$$(\partial_{E'})^k F_{\ell} = \left(\frac{\partial_{\check{E}}}{2z} \right)^k \left(\frac{1}{2} \partial_{v_{\ell}} \partial_{\check{E}} P + n_{\ell} - \frac{sz^2}{2} \partial_{v_{\ell}} \partial_{\check{E}} P \right) + O(z^{3-k}), \quad (15.36)$$

pour $1 \leq \ell \leq p-2$, ainsi que :

$$\frac{H_+}{F_+} + \frac{H_-}{F_-} + \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{H_{\ell}}{F_{\ell}} = \frac{1}{64z^2} \left(\mathbb{Y} - 3(\partial_{\check{E}}^2 P)(\partial_{\check{E}}^2 \dot{P}) \right) + O(1), \quad (15.37)$$

$$\frac{H_+}{F_+^2} \frac{\partial_{E'}^k F_+}{F_+} + \frac{H_-}{F_-^2} \frac{\partial_{E'}^k F_-}{F_-} + \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{H_{\ell}}{F_{\ell}^2} \frac{\partial_{E'}^k F_{\ell}}{F_{\ell}} = \frac{3}{32z} (\partial_{\check{E}}^3 P) \left(\frac{\partial_{\check{E}}}{2z} \right)^{1+k} \dot{P} + O(z^{-(k+1)}), \quad (15.38)$$

où, dans le membre de droite de (15.37), nous avons introduit l'expression $\mathbb{Y}$, qui est définie par (avec $\varepsilon := \varepsilon_{\check{E}} - \varepsilon_v$) :

$$\mathbb{Y} := 8 \left(\varepsilon - 2s \frac{\partial}{\partial s} - 2 \right) \partial_{\check{E}}^2 P + 32 \partial_v \partial_{\check{E}} \dot{P} + 16 \ddot{P} + 2 \left\{ \partial_{\check{E}} \dot{P}, \partial_{\check{E}}^2 P \right\}_{\partial_{\check{E}}}. \quad (15.39)$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a également :

$$G_{k+1} + \frac{3\sqrt{2}}{16} (F_- - F_+)^{(k+1)} P'' = \frac{\mathbb{Y}^{(k)}}{16(2z)^{k+2}} + O(z^{-(k+1)}). \quad (15.40)$$

Preuve : Les égalités (15.35) à (15.38) peuvent se vérifier explicitement, en partant des quantités (15.13) à (15.21) et en utilisant les estimations

pour $z \rightarrow 0$ des opérateurs fondamentaux (15.30) à (15.33). Notons que, dans la troisième formule (15.37), la somme des (H_ℓ/F_ℓ) n'apporte aucune contribution à droite, car aussi bien les H_ℓ que les F_ℓ sont d'ordre $O(1)$.

Afin de démontrer (15.40), on procède par récurrence. Tout d'abord, on vérifie que la formule est correcte lorsque $k = 0$. En effet, en utilisant (15.35) et (15.37), il vient :

$$\begin{aligned}
G_1 &+ \frac{3\sqrt{2}}{16} (F_- - F_+)' P'' \\
&= \frac{H_+}{F_+} + \frac{H_-}{F_-} + \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{H_\ell}{F_\ell} + \frac{3\sqrt{2}}{16} (F_- - F_+)' P'' \\
&= \frac{1}{64z^2} \left(\mathbb{Y} - 3P'' \dot{P}'' \right) + \frac{3\sqrt{2}}{16z^2} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \dot{P}'' P'' \right) + O(z^{-1}) \\
&= \frac{\mathbb{Y}}{64z^2} + O(z^{-1}) .
\end{aligned}$$

Supposons donc, par l'hypothèse d'induction, que la relation suivante est valable :

$$G_j + \frac{3\sqrt{2}}{16} (F_- - F_+)^{(j)} P'' = \frac{\mathbb{Y}^{(j-1)}}{16(2z)^{j+1}} + O(z^{-j}) , \quad (15.41)$$

pour $1 \leq j \leq k$, et montrons qu'elle est aussi valable pour $j = k+1$. En vertu de (15.41), de la définition (15.15) pour les G_k , du fait que $\partial_{E'} = \frac{\partial_E}{2z} + O(z^3)$, et des développements asymptotiques (15.35) et (15.38), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &+ \frac{3\sqrt{2}}{16} (F_- - F_+)^{(k+1)} P'' \\
&= \partial_{E'} G_k + \frac{H_+ F_+^{(k)}}{F_+^2} + \frac{H_- F_-^{(k)}}{F_-^2} + \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{H_\ell F_\ell^{(k)}}{F_\ell^2} + \frac{3\sqrt{2}}{16} (F_- - F_+)^{(k+1)} P'' \\
&= \left(\frac{\partial_E}{2z} \right) \left(\frac{\mathbb{Y}^{(k-1)}}{16(2z)^{k+1}} - \frac{3\sqrt{2}}{16} \underbrace{(F_- - F_+)^{(k)}}_{\frac{\dot{P}^{(k+1)}}{2\sqrt{2}z(2z)^k} + O(z^{-k})} P'' + O(z^{-k}) \right) \\
&\quad + \left(\frac{3P'''}{32z} \frac{\dot{P}^{(k+1)}}{(2z)^{k+1}} + O(z^{-(k+1)}) \right) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{16} \frac{\dot{P}^{(k+2)} P''}{2\sqrt{2}z(2z)^{k+1}} + O(z^{-(k+1)}) \right) \\
&= \frac{\mathbb{Y}^{(k)}}{16(2z)^{k+2}} + O(z^{-(k+1)}) ,
\end{aligned}$$

ce qui établit l'égalité (15.40), et donc la Proposition 15.2. ■

Nous sommes maintenant en mesure de déduire l'EDP finale associée au processus de Pearcey avec cibles intermédiaires. Nous savons en effet que la fonction $Q(E', a, c)$ satisfait l'équation (15.12), dans laquelle le déterminant $(p+1) \times (p+1)$ diffère d'un *multi-wronskien* seulement en raison de la dernière colonne.

Il est utile d'effectuer au préalable quelques opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice. En soustrayant la première colonne de la seconde, puis en ajoutant la seconde colonne (multipliée par $(3/16)P''$) à la dernière, et finalement en multipliant la plupart des colonnes tantôt par 2, tantôt par $\sqrt{2}$, on se ramène à :

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2F_+ & \sqrt{2}(F_- - F_+) & 2F_1 & \cdots & 2F_{p-2} & G_0 + \frac{3\sqrt{2}}{16}(F_- - F_+)P'' \\ 2F'_+ & \sqrt{2}(F_- - F_+)' & 2F'_1 & \cdots & 2F'_{p-2} & G_1 + \frac{3\sqrt{2}}{16}(F_- - F_+)'P'' \\ 2F''_+ & \sqrt{2}(F_- - F_+)'' & 2F''_1 & \cdots & 2F''_{p-2} & G_2 + \frac{3\sqrt{2}}{16}(F_- - F_+)''P'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2F_+^{(p)} & \sqrt{2}(F_- - F_+)^{(p)} & 2F_1^{(p)} & \cdots & 2F_{p-2}^{(p)} & G_p + \frac{3\sqrt{2}}{16}(F_- - F_+)^{(p)}P'' \end{pmatrix}.$$

En substituant les développements asymptotiques de la Proposition 15.2 dans le déterminant ci-dessus, nous trouvons alors :

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{z^4} + \frac{P''}{(2z)^2} + O(z^{-1}) & \frac{\dot{P}'}{(2z)} + O(z) & \frac{\partial P'}{\partial v_1} + 2n_1 + O(z^2) & \cdots \\ \frac{P'''}{(2z)^3} + O(z^{-2}) & \frac{\dot{P}''}{(2z)^2} + O(1) & \frac{1}{(2z)} \frac{\partial P''}{\partial v_1} + O(z) & \cdots \\ \frac{P''''}{(2z)^4} + O(z^{-3}) & \frac{\dot{P}'''}{(2z)^3} + O(z^{-1}) & \frac{1}{(2z)^2} \frac{\partial P'''}{\partial v_1} + O(1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{P^{(p+2)}}{(2z)^{p+2}} + O(z^{-(p+1)}) & \frac{\dot{P}^{(p+1)}}{(2z)^{p+1}} + O(z^{-(p-1)}) & \frac{1}{(2z)^p} \frac{\partial P^{(p+1)}}{\partial v_1} + O(z^{-(p-2)}) & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial P'}{\partial v_{p-2}} + 2n_{p-2} + O(z^2) & \frac{3}{16(2z)} \dot{P}'P'' + O(z) & \\ \cdots & \frac{1}{(2z)} \frac{\partial P''}{\partial v_{p-2}} + O(z) & \frac{\mathbb{Y}}{16(2z)^2} + O(1) & \\ \cdots & \frac{1}{(2z)^2} \frac{\partial P'''}{\partial v_{p-2}} + O(1) & \frac{\mathbb{Y}'}{16(2z)^3} + O(z^{-1}) & \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \frac{1}{(2z)^p} \frac{\partial P^{(p+1)}}{\partial v_{p-2}} + O(z^{-(p-2)}) & \frac{\mathbb{Y}^{(p-1)}}{16(2z)^{p+1}} + O(z^{-(p-1)}) & \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue est constituée de colonnes contenant des puissances croissantes de $(1/z)$, excepté pour le premier élément $(1, 1)$, dont le terme dominant vaut $(2/z^4)$. Par conséquent, on peut conclure que la contribution dominante au déterminant de la matrice sera donnée par :

$$\left(\frac{2}{z^4}\right) \times \left[\text{déterminant du mineur de l'élément } (1, 1) \right], \quad (15.42)$$

ce qui conduit aussitôt à l'égalité⁴⁷ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{C}{z^{6+p(p+1)/2}} \mathcal{W}_p \left(\partial_E^2 \frac{\partial}{\partial s} P, \frac{\partial}{\partial v_1} \partial_E^2 P, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{p-2}} \partial_E^2 P, \mathbb{Y} \right) \\ &\quad + O \left(\frac{1}{z^{4+p(p+1)/2}} \right), \end{aligned} \quad (15.43)$$

où C est une constante, et où $\mathcal{W}_p$ désigne un *multi-wronskien d'ordre p* qui, quand on le fait agir sur des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_p$, est défini par :

$$\mathcal{W}_p(f_1, f_2, \dots, f_p) := \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_p \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_p' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_p'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & \cdots & f_p^{(p)} \end{pmatrix}. \quad (15.44)$$

A la fin des calculs, il est bien sûr possible repasser aux variables premières (τ, E, u_ℓ) , plutôt que $(s, \check{E}, v_\ell)$, avec $s = \frac{\tau}{\sqrt{8}}$, $\check{E} = \frac{E}{2^{5/4}}$ et $v_\ell = 2^{1/4} u_\ell$.

En résumé, nous venons de prouver le résultat ci-après (dont on peut montrer qu'il se généralise aux probabilités jointes pour m temps distincts) :

Proposition 15.3 (*Adler - Delepine - van Moerbeke [2]*)

Lorsque $n \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire $z \rightarrow 0$), le logarithme de la probabilité limitante :

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\tau_1, \dots, \tau_m; u_1, \dots, u_{p-2}; E_1, \dots, E_m) \\ &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \mathbb{P}_{Br}^{(n)} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \text{tous les } x_j \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_k}{4\sqrt{2n}} \right) \in \frac{E_k^c}{4(n/2)^{1/4}} \right\} \right) \Bigg|_{\substack{\bar{a} = -\sqrt{n} \\ \bar{c}_\ell = u_\ell \left(\frac{n}{2} \right)^{1/4}}} \\ &= \log \mathbb{P}^{\tilde{\mathcal{P}}(u_1, \dots, u_{p-2})} \left(\bigcap_{k=1}^m \left\{ \tilde{\mathcal{P}}(\tau_k) \cap E_k = \emptyset \right\} \right), \end{aligned} \quad (15.45)$$

satisfait une EDP, qui prend la forme d'un multi-wronskien d'ordre p par rapport à l'opérateur $\partial_E = \sum_{k=1}^m \partial_{E_k}$:

$$\mathcal{W}_p \left[\partial_E^2 \partial_\tau \mathbb{Q}, \partial_E^2 \frac{\partial \mathbb{Q}}{u_1}, \partial_E^2 \frac{\partial \mathbb{Q}}{u_2}, \dots, \partial_E^2 \frac{\partial \mathbb{Q}}{u_{p-2}}, \mathbb{X} \right]_{\partial_E} = 0, \quad (15.46)$$

⁴⁷étant donné que $\sum_{\ell=1}^p \ell = \frac{p(p+1)}{2}$.

dans lequel⁴⁸ :

$$\begin{aligned} \mathbb{X} := & (\varepsilon + 2\varepsilon_\tau - 2) \partial_E^2 \mathbb{Q} + 4 \partial_u \partial_E \partial_\tau \mathbb{Q} + 8 \partial_\tau^3 \mathbb{Q} \\ & - 4 \tilde{\partial}_E \partial_E \partial_\tau \mathbb{Q} + 4 \{ \partial_E \partial_\tau \mathbb{Q}, \partial_E^2 \mathbb{Q} \}_{\partial_E}, \end{aligned} \quad (15.47)$$

en termes des mêmes opérateurs que dans la Proposition 14.3 (voir (14.14) à (14.16)), avec aussi $\partial_u := \sum_{\ell=1}^{p-2} \frac{\partial}{\partial u_\ell}$ et $\varepsilon := \varepsilon_E - \varepsilon_u = \varepsilon_E - \sum_{\ell=1}^{p-2} u_\ell \frac{\partial}{\partial u_\ell}$.

Lorsque $m = 1$ (probabilité pour un temps), $\mathbb{X}$ se simplifie très légèrement pour devenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{X} := & \left(\varepsilon - 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} - 2 \right) \partial_E^2 \mathbb{Q} + 4 \partial_u \partial_E \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \tau} + 8 \frac{\partial^3 \mathbb{Q}}{\partial \tau^3} \\ & + 4 \left\{ \partial_E \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \tau}, \partial_E^2 \mathbb{Q} \right\}_{\partial_E}. \end{aligned} \quad (15.48)$$

■

Pour terminer, regardons ce que l'on obtient en supposant que $p = 2$ (absence de cibles intermédiaires), de façon à retomber sur le processus de Pearcey symétrique de la Proposition 14.1. L'équation (15.46) se réduit alors, comme il se doit, au simple wronskien :

$$\{ \partial_E^2 \partial_\tau \mathbb{Q}, \mathbb{X} \}_{\partial_E} = 0, \quad (15.49)$$

où $\mathbb{X}$ correspond à (15.47), mais *sans* le terme $4 \partial_u \partial_E \partial_\tau \mathbb{Q}$.

Toutefois, nous avons vu dans la section précédente qu'en considérant la limite du processus de Pearcey dans un contexte *asymétrique* cette fois, avec $2nq$ particules envoyées sur $-\sqrt{n}$, et $2n(1-q)$ particules envoyées sur $\sqrt{n}$ (où q est un paramètre tel que $0 < q < 1$), nous trouvons, lorsque $q \neq \frac{1}{2}$, une autre EDP pour le terme dominant, qui s'écrit (voir (14.38)) :

$$\{ \partial_E^3 \mathbb{Q}, \mathbb{X} \}_{\partial_E} = 0. \quad (15.50)$$

De cette manière, la fonction $\mathbb{Q}$ (qui est elle-même indépendante du paramètre q), satisfait (15.49) et (15.50), et comme il est possible de montrer que $\{ \partial_E^3 \mathbb{Q}, \partial_E^2 \partial_\tau \mathbb{Q} \}_{\partial_E} \neq 0$ (voir la section 6 dans [4]), cela entraîne que :

$$\mathbb{X} = 0. \quad (15.51)$$

⁴⁸notons que $\mathbb{X}$ coïncide avec la quantité $\mathbb{Y}$, telle que considérée en (15.39), mais elle est définie ici directement en termes des variables (τ_k, E_k, u_ℓ) , plutôt que (s_k, E_k, v_ℓ) .

Il n'est pas déraisonnable de penser, même si nous ne l'avons pas démontré, qu'une simplification analogue se produit pour le *processus de Pearcey avec cibles intermédiaires*, lorsque $p > 2$.

Nous conjecturons donc que la fonction (15.45) satisfait aussi l'équation :

$$\mathbb{X} = 0, \tag{15.52}$$

avec $\mathbb{X}$ tel que défini en (15.47) dans le cas de m temps, ou en (15.48) dans le cas de un temps.

Part V

Conclusions

En conclusion, dans cette thèse, nous avons considéré la diffusion de mouvements browniens unidimensionnels, ne s'intersectant pas, partant tous d'un même point au temps $t = 0$, et soumis à des contraintes bien précises en ce qui concerne leurs points d'arrivée au temps $t = 1$.

Nous nous sommes intéressés à la probabilité (de transition) pour qu'en un temps intermédiaire $0 < t < 1$, le nuage de particules appartienne à (ou évite) une “fenêtre” constituée d'une réunion finie d'intervalles sur $\mathbb{R}$, cette probabilité étant alors une fonction de t , ainsi que des “points du bord” de ces intervalles. Cette question peut également être généralisée dans le cas des probabilités *jointes* pour m temps distincts.

En utilisant un résultat plus ancien dû à Karlin et McGregor, nous avons vu que ce modèle était en fait équivalent, à des changements de variables près, à un modèle de matrices aléatoires, dans lequel une matrice hermitienne est soumise à une mesure gaussienne perturbée par une source externe A . En fait, les valeurs propres de la matrice déterministe A sont précisément reliées aux différents points d'arrivée des mouvements browniens.

En insérant dans la probabilité de transition plusieurs familles de variables auxiliaires supplémentaires, nous avons montré que la probabilité déformée ainsi obtenue était solution d'un grand nombre d'équations différentielles aux dérivées partielles, qui incluent en particulier la hiérarchie intégrable de KP à $(p + 1)$ composantes, où p est le nombre total de cibles à l'arrivée. Le point remarquable est que la fonction déformée satisfait également, et de façon très générale, des *contraintes de Virasoro*, que nous avons pu calculer en détail dans [2]. En combinant celles-ci avec la hiérarchie intégrable de KP évoquée ci-dessus, cela nous a permis d'en déduire des EDP's satisfaites par la probabilité brownienne initiale.

Dans le modèle fini, ces équations aux dérivées partielles prennent une forme bien particulière : elles expriment en effet l'annulation du déterminant d'une certaine matrice de taille $(p + 1) \times (p + 1)$, qui est en réalité un “*quasi-wronskien*” : voir les Propositions 7.9 et 7.10.

Après quoi, nous avons tenté de définir, à partir de ces mouvements browniens, divers processus dans lesquels on fait tendre le nombre total n de particules vers l'infini. Pour y parvenir, il est impératif d'effectuer au

préalable un *rescaling* approprié sur les variables d'espace et de temps. Nous avons alors étudié différents processus "limitants", pour lesquels, à chaque fois, une EDP pour la probabilité correspondante a pu être calculée, en faisant une analyse asymptotique sur l'EDP du modèle fini.

Le tableau ci-dessous présente, en quelque sorte, une vision très succincte des processus que nous avons considérés dans la troisième partie de cette thèse :

nbre de pt(s) de départ	nbre de pt(s) d'arrivée	nom du processus	transition de phase pour l'EDP ?	processus stationnaire à 1 temps ?
1	1	Airy	non	oui
1	2	r-Airy	oui	non
1	2	Pearcey (non symétrique)	non	non
1	2	Pearcey (symétrique)	oui	non
1	p	Pearcey avec cibles intermédiaires	non	non

Enfin, notons que les EDP's fournissent un outil précieux lorsque l'on souhaite estimer l'asymptotique de ces processus dans le passé (c'est-à-dire pour $t \rightarrow 0$), ce qui nous a notamment permis de comparer, dans ce régime, les processus d'Airy et de r -Airy.

Remarquons aussi, dans un autre registre, que l'EDP qui est associée au processus de Pearcey avec cibles intermédiaires prend la forme d'un *wronskien exact d'ordre p* (voir la Proposition 15.3), ce qui constitue donc une réduction par rapport aux équations trouvées pour le modèle fini !

Parmi les questions ouvertes qui subsistent à la fin de ce travail, et dont on peut déjà avoir un aperçu en regardant la *conjecture* (15.52), on peut mentionner qu'il serait intéressant d'acquérir une meilleure compréhension des différentes EDP's obtenues, ainsi que des liens pouvant exister entre elles. Par exemple, ces EDP's renferment-elles, tout au moins dans certaines situations particulières, des équations de type Painlevé, comme cela a été découvert dans le contexte des matrices aléatoires (voir [23], [31], [37]) ?

La dérivation de ces équations en utilisant exclusivement d'autres outils purement probabilistes (c'est-à-dire ne faisant pas intervenir la théorie des

systèmes intégrables) reste également un problème ouvert.

Une autre piste serait d'étudier ce qui se produit lorsque les mouvements browniens *ne partent pas tous d'une même origine*. Cela pourrait conduire à des situations nouvelles où, par exemple, deux nuages distincts de particules browniennes se rencontrent, puis se séparent aussitôt après. L'exploration de tels systèmes pourrait conduire à l'apparition de nouveaux noyaux de corrélation, ainsi qu'à de nouvelles classes d'universalité pour les processus critiques associés.

References

- [1] Adler M. ; Delepine J. ; van Moerbeke P. : *Dyson's non-intersecting Brownian motions with a few outliers*. Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), no. 3, 334-395.
- [2] Adler M. ; Delepine J. ; van Moerbeke P. ; Vanhaecke P. : *A PDE for non-intersecting Brownian motions and applications*. Preprint, *arXiv : 0911.0152v1 [math.PR]* 1 Nov 2009.
- [3] Adler M. ; Delepine J. ; van Moerbeke P. : *Joint probability for the Airy process with a few outliers and remote time asymptotics*. (Article non publié, 2008).
- [4] Adler M. ; Orantin N. ; van Moerbeke P. : *Universality of the Pearcey process*. Preprint, *arXiv : 0901.4520v1 [math.PR]* 28 Jan 2009.
- [5] Adler M. ; Shiota T. ; van Moerbeke P. : *Random matrices, vertex operators and the Virasoro algebra*. Phys. Lett. A **208** (1995), no. 2, 67-78.
- [6] Adler M. ; van Moerbeke P. : *Hermitian, symmetric and symplectic random ensembles : PDE's for the distribution of the spectrum*. Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 1, 149-189.
- [7] Adler M. ; van Moerbeke P. : *PDE's for the joint distributions of the Dyson, Airy and Sine processes*. Ann. Probab. **33** (2005), no. 4, 1326-1361.
- [8] Adler M. ; van Moerbeke P. : *Joint probability for the Pearcey process*. Preprint, *arXiv : math/0612393v1 [math.PR]* 14 Dec 2006.
- [9] Adler M. ; van Moerbeke P. : *PDE's for the Gaussian ensemble with external source and the Pearcey distribution*. Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), no. 9, 1261-1292.
- [10] Adler M. ; van Moerbeke P. ; Vanhaecke P. : *Moment matrices and multi-component KP, with applications to random matrix theory*. Preprint, *arXiv : math-ph/0612064v1 - 20 Dec 2006*.

- [11] Aptekarev A. ; Bleher P. ; Kuijlaars A. : *Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II.* Comm. Math. Phys. **259** (2005), no. 2, 367-389.
- [12] Baik J. : *Painlevé formulas of the limiting distributions for nonnull complex sample covariance matrices.* Duke Math. J. **133** (2006), no. 2, 205-235.
- [13] Baik J. ; Ben Arous G. ; Pécché S. : *Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices.* Ann. Probab. **33** (2005), no. 5, 1643-1697.
- [14] Bleher P. ; Kuijlaars A. : *Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials.* Int. Math. Res. Not. **2004**, no. 3, 109-129.
- [15] Brézin E. ; Hikami S. : *Correlations of nearby levels induced by a random potential.* Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 3, 697-706.
- [16] Brézin E. ; Hikami S. : *Universal singularity at the closure of a gap in a random matrix theory.* Phys. Rev. E **57** (1998), no. 4, 4140-4149.
- [17] De Bruijn N. : *Asymptotic methods in analysis.* North-Holland, Amsterdam (1958).
- [18] Deift P. : *Orthogonal polynomials and random matrices : A Riemann-Hilbert approach.* AMS, Courant Institute of Math. Sciences, Lecture Notes, no. 3 (2000).
- [19] Deift P. ; Kriecherbauer T. ; McLaughlin K. ; Venakides S. ; Zhou X. : *Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights.* Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), no. 12, 1491-1552.
- [20] Dyson F. : *A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix.* J. Mathematical Phys. **3** (1962), 1191-1198.
- [21] Flaschka M. : *The Toda lattice. I. Existence of integrals.* Phys. Rev. B **3** (1974), no. 9, 1924-1925.
- [22] Fokas A. ; Its A. ; Kitaev A. : *Discrete Painlevé equations and their appearance in quantum gravity.* Comm. Math. Phys. **142** (1991), no. 2, 313-344.

- [23] Haine L. ; Semengue J.-P. : *The Jacobi polynomial ensemble and the Painlevé VI equation*. J. of Math. Phys. **40** (1999), no. 4, 2117-2134.
- [24] Hastings S. ; McLeod J. : *A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation*. Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), no. 1, 31-51.
- [25] Jimbo M. ; Miwa T. ; Mōri Y. ; Sato M. : *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent*. Physica D **1** (1980), no. 1, 80-158.
- [26] Johansson K. : *Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of Hermitian Wigner matrices*. Comm. Math. Phys. **215** (2001), no. 3, 683-705.
- [27] Johansson K. : *The arctic circle boundary and the Airy process*. Ann. Probab. **33** (2005), no. 1, 1-30.
- [28] Karlin S. ; McGregor J. : *Coincidence probabilities*. Pacific J. Math. **9** (1959), 1141-1164.
- [29] Kuijlaars A. ; Daems E. : *Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions*. Journal of Approx. Theory **146** (2007), no. 1, 91-114.
- [30] Mehta M. : *Random matrices*, 2nd ed., Boston : Academic Press (1991).
- [31] van Moerbeke P. : *Integrable lattices : random matrices and random permutations*. MSRI Publications **40** (2001), Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [32] Okounkov A. ; Reshetikhin N. : *Random skew plane partitions and the Pearcey process*. Comm. Math. Phys. **269** (2007), no. 3, 571-609.
- [33] Pastur L. : *The spectrum of random matrices*. Teoret. Mat. Fiz. **10** (1972), no. 1, 102-112.
- [34] Péché S. : *The largest eigenvalue of small rank perturbations of Hermitian random matrices*. Probab. Theory Related Fields **134** (2006), no. 1, 127-173.

- [35] Prähofer M. ; Spohn H. : *Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process*. J. Statist. Phys. **108** (2002), no. 5-6, 1071-1106.
- [36] Szegő G. : *Orthogonal polynomials*, 4th ed., AMS, Colloquium Publications, no. 23 (1975).
- [37] Tracy C. ; Widom H. : *Fredholm determinants, differential equations and matrix models*. Comm. Math. Phys. **163** (1994), no. 1, 33-72.
- [38] Tracy C. ; Widom H. : *Level-spacing distributions and the Airy kernel*. Comm. Math. Phys. **159** (1994), no. 1, 151-174.
- [39] Tracy C. ; Widom H. : *The Pearcey process*. Comm. Math. Phys. **263** (2006), no. 2, 381-400.
- [40] Ueno K. ; Takasaki K. : *Toda lattice hierarchy*. Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982), 1-95. Advanced Studies in Pure Mathematics, 4. North-Holland, Amsterdam, 1984 .
- [41] Widom H. : *On asymptotics for the Airy process*. J. Statist. Phys. **115** (2004), no. 3-4, 1129-1134.
- [42] Wigner E. : *On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels*. Proc. Cambr. Phil. Soc. **47** (1951), no. 4, 790-798.
- [43] Zinn-Justin P. : *Universality of correlation functions of Hermitian random matrices in an external field*. Comm. Math. Phys. **194** (1998), 631-650.

Bref résumé + biographie (pour la couverture)

Université catholique de Louvain (UCL)

Faculté des sciences

Institut de recherche en mathématique et physique (IRMP)

Ecole doctorale en mathématique

Bâtiment Marc de Hemptinne

Chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

Tél. : + 32 (0) 10 47 31 59

E-mail : jonathan.delepine@uclouvain.be

<http://www.uclouvain.be/irmp.html>

“Résumé” :

Il y a quelques années, Aptekarev, Bleher et Kuijlaars ont démontré, en utilisant un résultat plus ancien dû à Karlin et McGregor, que la théorie des matrices aléatoires, et plus particulièrement celle de l'ensemble hermitien muni d'une mesure gaussienne déformée par une source externe, permettait d'étudier la diffusion temporelle de n mouvements browniens ne s'intersectant pas, à une dimension, et soumis à des contraintes bien précises en ce qui concerne leurs points de départ et leurs points d'arrivée.

Dans cette thèse, nous avons établi que, si ces mouvements partent tous d'une même origine au temps initial, et sont envoyés sur p cibles, alors la probabilité que tous les chemins passent à travers une “fenêtre” constituée d'une réunion finie d'intervalles au temps t , satisfait une EDP non linéaire en t et en les extrémités des intervalles spatiaux. Cette EDP très générale, qui prend la forme d'un déterminant d'ordre $(p + 1)$, s'appuie notamment sur le fait qu'en déformant la probabilité par des variables auxiliaires, celle-ci devient une “*fonction tau*” satisfaisant toute une hiérarchie d'équations intégrables.

Nous avons ensuite, après des changements d'échelle convenables sur l'espace et le temps, étudié les processus critiques obtenus en prenant diverses limites au modèle ci-dessus, où le nombre total n de mouvements browniens tend vers l'infini. Nous avons ainsi considéré successivement les processus d'Airy, de r-Airy, de Pearcey, puis de Pearcey avec cibles intermédiaires, et ce dans le cas de un ou de plusieurs temps différents.

“Biographie” :

Jonathan DELEPINE est né le 03 juin 1982 à Tournai (Belgique). Il est porteur d’un diplôme de licence en sciences physiques (2004), ainsi que d’un diplôme d’études approfondies (DEA) en sciences physiques (2005), tous deux décernés par l’Université catholique de Louvain. Assistant à l’UCL depuis fin 2004, il a commencé la préparation de cette thèse en mathématique au mois de septembre 2005, sous la direction du Pr. Pierre van Moerbeke.