



Quelques difficultés liées à la soustraction (Partie 1)

Isabelle Berlanger, Ginette Cuisinier, Thérèse Gilbert, Laure Ninove

Mots clés : Soustraction, interpréter un calcul, schéma fléché

Cet article a comme point de départ certaines difficultés fondamentales liées à la soustraction, difficultés auxquelles les enseignants sont confrontés d'année en année et qui les laissent parfois démunis. Nous y rassemblons quelques approches relatives à la soustraction en primaire et au début du secondaire sous forme d'activités, et en proposons une analyse épistémologique. Pour cela, nous avons pris le point de vue du sens, en nous centrant sur les interprétations possibles de la soustraction, et leur extension éventuelle lorsque l'on passe d'un ensemble de nombres à un autre. Nous ne proposons donc pas ici une unique séquence toute prête pour aborder cette opération mais rassemblons diverses méthodes.

Cette première partie de l'article est consacrée à la soustraction à la fin de l'école primaire. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à l'introduction de la soustraction dans $\mathbb{Z}$ au début du secondaire.

Petite histoire introductive : l'euro manquant

Voici un problème bien connu. « Trois amis vont manger au restaurant. À la fin de leur repas, le patron leur calcule l'addition : 60 euros. Ils paient donc chacun 20 euros.

Tout de suite après, le patron se rend compte qu'il s'est trompé dans l'addition : celle-ci s'élevait en fait à 55 euros. Il charge donc le serveur d'aller leur rendre les 5 euros. Les trois amis ne sachant comment se répartir les cinq euros, prennent chacun un euro et laissent les deux autres pour le serveur.

Faisons les comptes : chaque convive a donné 19 euros, cela fait 57 euros, ajoutés aux deux euros que

le garçon a reçus, cela fait 59 euros. Où est passé l'euro manquant ? »

Analyse du problème

Expliquons l'erreur. Les 2 euros laissés au garçon sont déjà comptabilisés dans les 57 euros dépensés par les convives. C'est le reste de la division de 5 euros par 3. Les convives reprennent 1 euro chacun mais laissent le reste au garçon.

Dans le récit, on fait les comptes en suivant deux points de vue en même temps, celui des convives et celui du restaurateur. C'est là que se trouve la source de l'erreur.

Faisons le bilan final correctement. Si on prend le point de vue des convives : ils ont dépensé 60 euros moins 3 euros, ce qui donne 57 euros. Si on se met du côté du restaurant : le restaurateur a reçu 55 euros et le serveur a reçu 2 euros de pourboire, ce qui fait bien 57 euros en tout.

Il nous semble qu'un tel changement de point de vue mal maîtrisé est une des causes de certaines difficultés en mathématiques élémentaires.

Une difficulté de la soustraction dans $\mathbb{N}$

La méthode, une justification et une réaction fréquente d'enfant

Pour soustraire 19 à un nombre, on peut commencer par soustraire 20, puis ajouter 1.

- *L'élève.* Ah non, il faut enlever 20, puis enlever 1, parce que 20 c'est trop, donc il faut faire -1 . En effet, 19, c'est $20 - 1$, pas $20 + 1$.

- *L'instituteur.* Imagine que j'aie un tas de crayons devant moi. Je veux en enlever 19. Mais je me trompe, j'en enlève 20. Que dois-je faire ?
- *L'élève.* Tu dois en remettre 1. Donc faire -1 .

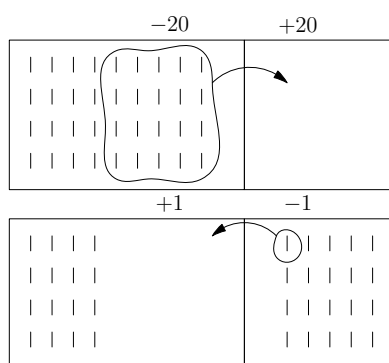
Identifiez le problème. Comprenez-vous la logique de l'enfant ?

Analyse du problème

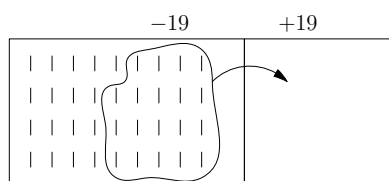
Comme dans l'histoire de l'euro manquant, l'élève change de point de vue en cours d'histoire. Au début, il s'intéresse à ce qu'il y a dans le tas de crayons, mais à la fin, il prend un point de vue extérieur à ce tas : puisqu'il doit remettre un crayon dans le tas, il doit s'en séparer, donc faire -1 .

Mais si le -1 s'applique bien à 20 (aux 20 crayons enlevés), l'opérateur -19 décrit, lui, une transformation opérée sur le tas de crayons que l'on avait au départ. Et ce tas-là doit recevoir un crayon ($+1$) en fin de course.

Du point de vue du tas de départ, les mouvements se traduisent par le calcul $-20 + 1$, tandis que du point de vue du tas d'arrivée, il s'agit de $+20 - 1$.



On a bien -19 d'un côté et $+19$ de l'autre, les comptes sont justes.



Différentes approches pour introduire ou comprendre la méthode de calcul

Nous commençons ici par proposer quelques activités pour le niveau primaire, qui se prolongent en-

suite naturellement dans le cadre du calcul littéral en secondaire. Ces activités se concentrent sur l'interprétation de calculs ou d'égalités numériques (qui deviendront plus tard algébriques). L'élève est amené à se forger et à exprimer des images mentales de la soustraction qui lui seront utiles dans divers contextes mathématiques. Le professeur pourra s'inspirer des différentes approches proposées pour construire sa propre séquence de cours.

Ajouter et enlever

La séquence suivante, si elle est proposée telle quelle, présente une difficulté de lecture et de concentration. Pour éviter ce problème, l'enseignant peut raconter les différentes histoires. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de faire suivre les trois histoires. On pourrait travailler les deux premières un jour et la dernière une autre fois.

Tous les enfants partent en excursion.

- a) Dans le car bleu, il y a 28 enfants, mais 2 enfants se sont trompés de car et doivent descendre. Un peu plus tard, 6 retardataires arrivent.

Finalement combien y a-t-il d'enfants dans le car bleu ? Écris ton calcul, explique comment tu as fait.

- b) On a compté 52 enfants dans le car rouge. Il n'y a pas suffisamment de places. Dix enfants sortent du car, mais alors il reste une place vide et l'institutrice demande à un enfant de remonter dans le car.

Combien d'enfants ont finalement dû quitter le car rouge ? Combien de places assises y a-t-il dans le car pour les enfants ? Écris chaque fois ton calcul.

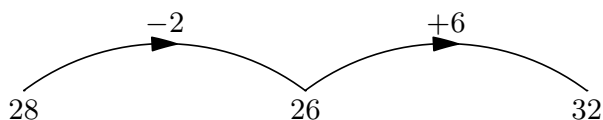
- c) Par ailleurs, 63 enfants se sont précipités dans le car jaune. Mais il manque 19 places. Un groupe de 20 copains quitte alors le car. Mais l'institutrice veut que chaque siège soit occupé par exactement un enfant.

Pour cela, que doit-elle demander ? Combien d'enfants sont finalement présents dans le car au moment du départ ? Écris ton calcul en tenant compte des sorties et des entrées.

a) Pour déterminer le nombre d'enfants finalement présents dans le car, on peut procéder étape par étape :

- au départ, 28 enfants sont présents ;
- ensuite, 2 enfants descendent et il reste donc $28 - 2 = 26$ enfants dans le car ;
- enfin, 6 enfants en retard montent et on obtient donc finalement $26 + 6 = 32$ enfants dans le car.

On peut résumer ces deux calculs en un seul : $28 - 2 + 6 = 32$. Écrire les calculs correspondant à la situation implique de formaliser sa pensée et cela peut être une grande difficulté pour les élèves. Dans ce cas, on peut demander aux élèves d'exprimer ce qu'ils ont fait, verbalement, à l'aide d'une manipulation de jetons, d'un dessin ou d'un schéma fléché. Un schéma fléché permet de mettre en évidence les deux étapes du calcul correspondant aux deux opérateurs -2 et $+6$.



b) Pour déterminer combien d'enfants ont finalement dû quitter le car, il faut se concentrer sur les entrées et sorties de celui-ci : comme 10 enfants sont sortis pour commencer puis 1 de ceux-ci est remonté, il y a finalement $10 - 1$, soit 9 enfants qui ont quitté définitivement le car.

Déterminer le nombre de places assises revient à déterminer le nombre d'enfants présents dans le car à la fin, puisqu'il doit y avoir exactement un enfant à chaque place. Ce nombre d'enfants finalement présents dans le car peut se déterminer de deux manières différentes :

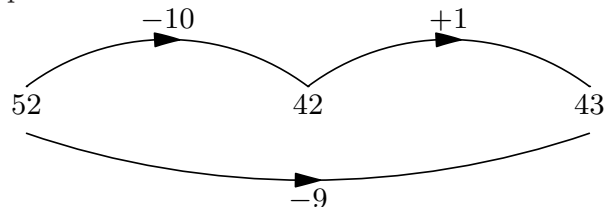
- soit en procédant de la même manière qu'au point a), en considérant successivement la sortie puis la montée d'enfants : on obtient le calcul $52 - 10 + 1 = 43$;
- soit en réalisant que le nombre final d'enfants dans le car est égal au nombre initial diminué du nombre d'enfants qui ont dû finalement quitter le car, c'est-à-dire 9 enfants : on obtient le calcul $52 - 9 = 43$.

On peut donc écrire

$$52 - 9 = 52 - 10 + 1.$$

À première vue, le calcul $52 - 9$ peut sembler plus simple à effectuer que $52 - 10 + 1$ car il ne

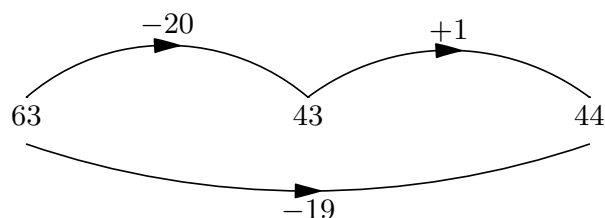
comporte que deux termes plutôt que trois. Cependant, la décomposition de l'opérateur -9 en deux opérateurs -10 et $+1$ peut être une aide pour le calcul mental.



c) Puisque 20 enfants sont sortis alors que seulement 19 auraient dû le faire, c'est qu'un enfant de trop est sorti du car. L'institutrice doit donc demander à 1 élève de remonter dans le car.

Pour déterminer le nombre d'enfants finalement présents dans le car, on peut procéder de deux manières différentes, comme en b) ci-dessus :

- soit en considérant successivement la sortie puis la montée d'enfants : on obtient le calcul $63 - 20 + 1 = 44$;
- soit en considérant que pour 63 enfants, il manquait 19 places, ou de manière équivalente en considérant qu'au final 19 enfants sur les 63 ont dû quitter le car : on obtient le calcul $63 - 19 = 44$.



On peut donc écrire

$$63 - 19 = 63 - 20 + 1.$$

Interpréter un calcul

Voici des calculs :

$$75 - 30 - 1,$$

$$75 - 30 + 1,$$

$$75 + 1 - 30,$$

$$75 - 29,$$

$$75 - 31.$$

Certains donnent la même réponse. Lesquels ? Invente des histoires qui expliquent les calculs.

Nous allons évoquer deux contextes qui permettent de se convaincre de l'équivalence de certains calculs.

Les calculs $75 - 30 - 1$ et $75 - 31$ donnent la même réponse : $75 - 30 - 1 = 75 - 31$. Voyons pourquoi.

- Le calcul $75 - 30 - 1$ peut par exemple s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas dimanche. J'en ai déjà mangé 30. Ce soir, j'en ai mangé encore 1. Il m'en reste donc encore $75 - 30 - 1 = 44$. »
- Le calcul $75 - 31$, pourrait s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons dimanche. J'en ai mangé en tout 31. Il m'en reste donc encore $75 - 31 = 44$. »
- Que l'on mange 31 bonbons ou que l'on en mange 30 puis encore un, le reste sera le même.

Par ailleurs, les calculs $75 + 1 - 30$, $75 - 30 + 1$ et $75 - 29$ donnent tous les trois la même réponse : $75 + 1 - 30 = 75 - 30 + 1 = 75 - 29$. Voyons d'abord que $75 + 1 - 30 = 75 - 30 + 1$.

- Le calcul $75 - 30 + 1$ peut s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas dimanche. J'en ai déjà mangé 30. Aujourd'hui, Mamy m'en a donné encore 1. Il m'en reste donc encore $75 - 30 + 1 = 46$. »
- Le calcul $75 + 1 - 30$ peut s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas. Mamy m'en a donné 1 supplémentaire. J'en ai ensuite mangé 30. Il m'en reste donc encore $75 + 1 - 30 = 46$. »
- Le fait que ce soit avant ou après avoir mangé des bonbons de Saint Nicolas que j'en reçois un de Mamy ne change pas ce qu'il me restera à la fin.

Voyons à présent que $75 - 30 + 1 = 75 - 29$. Cette égalité peut s'interpréter à l'aide du contexte suivant. « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas dimanche. J'en ai tout de suite préparé 30 pour les manger aujourd'hui. Mon grand-frère me trouvant trop gourmand, j'en ai remis 1 dans le paquet et n'en ai mangé que 29. Il m'en reste donc encore $75 - 30 + 1 = 75 - 29 = 46$. »

Dans un contexte d'entrées et sorties semblable à celui de l'activité présentée ci-dessus, voici une manière de montrer que les calculs $75 + 1 - 30$, $75 - 30 + 1$ et $75 - 29$ donnent tous les trois la même réponse. À nouveau, on considère d'abord les calculs $75 + 1 - 30$ et $75 - 30 + 1$.

- Le calcul $75 + 1 - 30$ peut par exemple s'interpréter comme : « Les enfants sont regroupés sous

le préau. À l'appel, 75 enfants sont présents. Ensuite, un retardataire arrive au préau. Un peu plus tard, 30 enfants quittent le préau. À ce moment, il reste donc $75 + 1 - 30$, soit 46 enfants sous le préau. »

- Le calcul $75 - 30 + 1$, peut s'interpréter comme : « Les enfants sont regroupés sous le préau. À l'appel, 75 enfants sont présents. Ensuite, 30 enfants quittent le préau. Un peu plus tard, un retardataire arrive au préau. À ce moment, il y a donc $75 - 30 + 1$, soit 46 enfants sous le préau. »

Pour montrer que $75 - 30 + 1 = 75 - 29$, on peut par exemple interpréter ces calculs comme suit.

- « Les enfants sont regroupés sous le préau. À l'appel, 75 enfants sont présents. Ensuite, 30 enfants quittent le préau. Mais l'un fait demi-tour et revient sous le préau. En tout, 29 enfants ont donc quitté le préau. Après, il reste donc $75 - 30 + 1$ enfants, ou encore $75 - 29$ enfants sous le préau. »

Commentaire

Notons qu'au fil de ces activités (*Ajouter et enlever* et *Interpréter un calcul*), l'élève est entraîné à adopter un point de vue privilégié pour traduire une situation, c'est-à-dire à fixer l'ensemble sur lequel on agit. L'histoire aide à se focaliser sur le car, le préau, le sachet de bonbons, et permet ainsi d'éviter les confusions de points de vue évoquées ci-dessus.

Agir sur un grand nombre

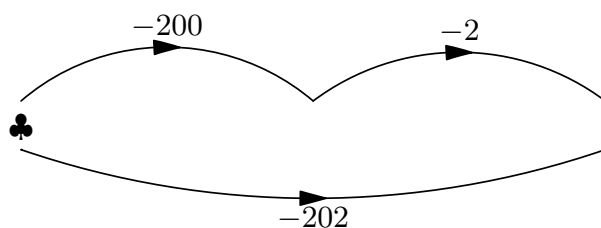
Un grand nombre ♣ est noté sur un papier et caché dans une enveloppe. J'ai fait plusieurs calculs à partir de ce nombre :

- $\clubsuit - 200 - 2$,
- $\clubsuit - 200 + 2$,
- $\clubsuit - 198$.

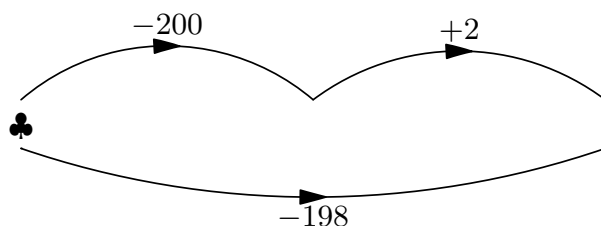
Certains de ces calculs ont donné le même résultat. Lesquels ? Pourquoi ?

Les calculs b) et c) ont donné le même résultat.

- J'ai d'abord retiré 200 au grand nombre ♣ puis j'ai encore retiré 2. J'ai donc en tout retiré plus que 200 : j'ai retiré 202 à ♣.



b) J'ai d'abord retiré 200 au grand nombre ♣ puis j'ai ajouté 2 à ce que j'avais obtenu. J'ai donc en tout retiré moins que 200 : j'ai retiré 198 à ♣.



c) J'ai retiré 198 au grand nombre ♣.

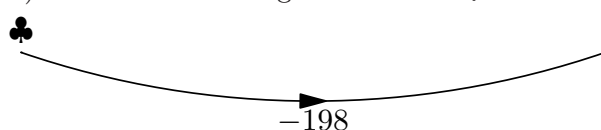
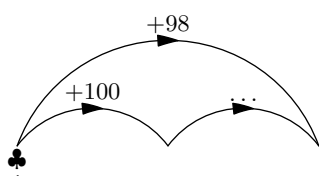


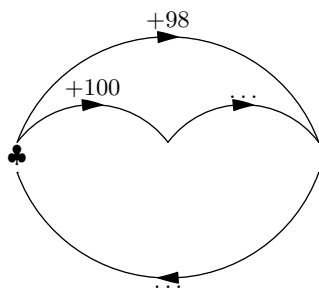
Schéma fléché

Complète le schéma suivant qui illustre l'ajout de 98 à un nombre.

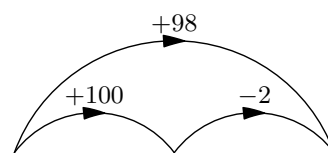
Pour ajouter 98, on peut ajouter 100 puis enlever 2.



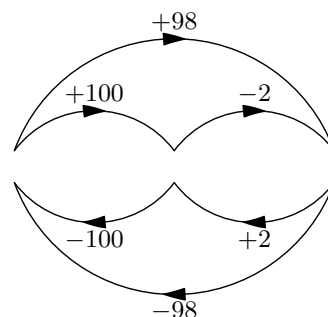
Et pour enlever 98 ? Aide-toi du schéma suivant.



Soustraire 98 et ajouter 98 sont deux opérateurs réciproques. Pour ajouter 98 à un nombre, je peux d'abord ajouter 100, puis enlever 2.



Pour enlever 98, je peux appliquer les opérateurs réciproques : d'abord ajouter 2 puis retirer 100.



Commentaire

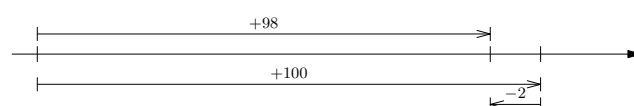
Ici le schéma permet de suivre l'ordre des opérations, d'un point de départ (premier terme de la soustraction) à un point d'arrivée (résultat de la soustraction), via une transformation (la composée des deux opérateurs).

Mais remarquons que l'ordre des opérations obtenu par cette méthode n'est pas l'ordre habituel : en travaillant sur les schémas fléchés des opérateurs réciproques, on obtient que l'opérateur -98 peut être décomposé en la succession de $+2$ et -100 , plutôt que -100 suivi de $+2$.

On peut aussi visualiser les opérateurs par des mouvements sur une droite. C'est ce que nous proposons à l'activité suivante.

Déplacements sur la droite des nombres

Pour avancer de 98 sur la droite des nombres, on peut avancer de 100 puis reculer de 2. Ces mouvements correspondent aux calculs $\dots + 98 = \dots + 100 - 2$.

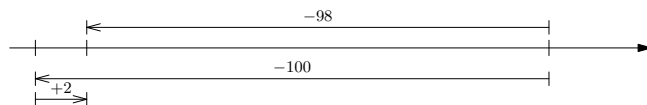


Et pour reculer de 98 ? Dessine les mouvements sur la droite des nombres. Écris les calculs correspondant à ce mouvement.



Quelques difficultés liées à la soustraction

Pour reculer de 98 sur la droite des nombres, je peux d'abord reculer de 100 puis avancer de 2.



Commentaire

Outre que cette visualisation ne provoque pas forcément les mêmes intuitions que les schémas fléchés, elle permet d'obtenir la composée d'opérateurs dans l'ordre que l'on veut et notamment dans l'ordre habituel : soustraire 98 revient à soustraire 100 puis à ajouter 2.

Commentaires à propos des différentes approches proposées

Nous retrouvons dans les différentes activités proposées une interprétation classique de la soustraction : la *transformation* qui procure un *reste*. L'idée de reste est très présente dans les histoires ci-dessus ; elle est également dominante dans les histoires proposées par les enfants eux-mêmes pour illustrer un calcul, comme nous avons pu le confirmer lors d'essais dans les classes. Transformations et restes sont par ailleurs utilement représentés par les schémas fléchés (associés ou non à la droite des nombres) qui aident à visualiser et relier les différents éléments en jeu, et donc à structurer sa pensée.

Prolongement en calcul littéral au secondaire

La difficulté étudiée jusqu'à présent a son pendant en calcul littéral. Nous proposons ci-dessous des activités qui permettent de reparler du sens d'une soustraction (ce qui ne se fait pas toujours au secondaire) et d'interpréter des expressions algébriques de manière à comprendre l'égalité entre certaines d'entre elles.

Retirer moins que prévu

« J'ai 22 billes. J'en retire 7 pour les donner. Mais finalement j'en donne 2 de moins. Combien m'en reste-t-il ? »

Écris le calcul de deux façons différentes en faisant apparaître les trois nombres 22, 7 et 2.

Soit je considère que j'ai 22 billes, que j'en retire 7 de mon tas puis y remets 2 billes, ce qui correspond au calcul $22 - 7 + 2 = 17$; soit je considère que j'ai 22 billes et que j'en donne 2 en moins que 7, c'est-à-dire 5, ce qui correspond au calcul $22 - (7 - 2) = 17$.

Expressions littérales

Les lettres a , b et c désignent trois nombres. L'expression $a - b - c$ peut s'interpréter comme ceci « J'ai a billes. J'en donne b , puis encore c . Combien m'en reste-t-il ? »

Interprétez chacune des quatre expressions suivantes :

- 1) $a - b - c$,
- 2) $a - b + c$,
- 3) $a - (b + c)$,
- 4) $a - (b - c)$.

Parmi ces quatre expressions, quelles sont celles qui vont donner le même résultat ? Pourquoi ?

Les expressions 1) et 3) donneront le même résultat. En effet, elles peuvent s'interpréter comme suit.

- 1) J'ai a billes. J'en perds b puis encore c .
- 3) J'ai a billes. J'en perds en tout $(b + c)$.

Les expressions 2) et 4) donneront le même résultat. En effet, elles peuvent s'interpréter comme suit.

- 2) J'ai a billes. J'en perds b , puis en retrouve c .
- 4) J'ai a billes. Je pensais en avoir perdu b mais en fait j'en ai retrouvé c et au total en ai donc perdu c en moins que b , c'est-à-dire $b - c$.

Commentaire

La suppression des parenthèses évoquée dans cet encadré pose régulièrement problème aux élèves. Associées à divers exemples en contexte, les interprétations ci-dessus permettent de montrer le sens de



la propriété « on peut supprimer une parenthèse précédée du signe *moins*, à condition de changer le signe de chacun des termes de la parenthèse, sauf du premier », qui est souvent présentée uniquement comme une règle technique. Nous ne prétendons pas que cette activité suffise à s'approprier la règle de calcul, mais elle a le mérite de montrer que le passage au formalisme algébrique n'empêche pas l'interprétation.

Remerciements

Le travail de réflexion à la base de cet article a été effectué dans le sous-groupe 10-15 du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM). Nous remercions chaleureusement les autres membres de notre sous-groupe, Chrys FLUYT, Sophie LORIAUX, Julie SAELEN et André WAUTERS, qui ont participé à la réflexion, élaboré avec nous certaines pistes proposées et en ont expérimenté certaines. Nous remercions également Mélanie HAVAUX pour sa relecture attentive de ce texte.

Pour en savoir plus

- [1] Anne BOYÉ, *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs*, site de l'AP-

MEP, 2011. <http://www.apmep.asso.fr/Quelques-elements-d-histoire-des>

- [2] IREM de Poitiers, *Les nombres relatifs au collège*, Septembre 1996.
- [3] Françoise LUCAS, Laurence BALLEUX, Cécile GOOSSENS, *Math & Sens, Mobiliser les opérations avec bon sens!*, De Boeck, 2008.
- [4] Nicolas ROUCHE *et al.*, *Du quotidien aux mathématiques, Nombres, Grandeurs, Proportions*, Ellipses, Paris, 2006.
- [5] Odette BASSIS, *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques*, Hachette Education, Paris, 2003.
- [6] Laure COLLARD, *Pourquoi l'algèbre ?, Quelques aspects historiques et méthodologiques*, Travail de fin d'études réalisé sous la direction de Thérèse GILBERT, Haute Ecole Galilée, Bruxelles, Juin 2010.
- [7] FESeC, *Guide méthodologique, Mathématiques, 1er degré*, D/2001/7362/3081, 2001.
- [8] FESeC, *Programme, Mathématiques, 1er degré commun*, D/2010/7362/3/08, 2010.
- [9] Ministère de la Communauté Française, *Programme d'études du cours de mathématiques, 1er degré commun*, 10/2000/240, 2000.

Isabelle Berlanger est maître-assistante à l'Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, isabelle.berlanger@galilee.be; Ginette Cuisinier était enseignante dans le secondaire supérieur, ginette.cuisinier@scarlet.be; Thérèse Gilbert est maître-assistante à l'Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, therese.gilbert@galilee.be; Laure Ninove est maître-assistante à l'École normale catholique du Brabant Wallon, Haute Ecole Léonard de Vinci, laure.ninove@gmail.com. Elles sont en outre membres du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), Chemin du Cyclotron 2 à B-1348 Louvain-la-Neuve, <http://sites.uclouvain.be/gem>.

Étonnantes égalités ...

$$\frac{27^4 + 2^4 + 4^4 + 21^4}{28^4 + 1^4 + 9^4 + 18^4} = \frac{27^2 + 2^2 + 4^2 + 21^2}{28^2 + 1^2 + 9^2 + 18^2} = \frac{27 \times 2 \times 4 \times 21}{28 \times 1 \times 9 \times 18}$$