

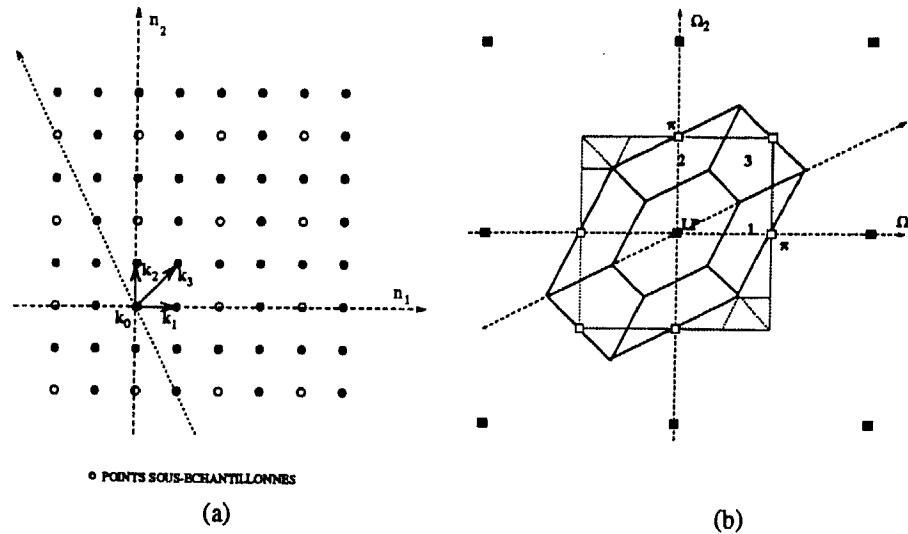


Figure 6.7 - Transformation hexagonale : (a) définition des vecteurs des cosets k_l sur le réseau quinconce (en coordonnées quinconces n_1 et n_2); (b) passes-bandes admissibles des 4 filtres d'analyse

fréquentielles, de degré de liberté, de reconstruction parfaite et de complexité de réalisation.

6.5.1 QMF 4 à 4

Le premier cas que nous allons envisager est celui qui optimise un seul filtre prototype dont seront déduits les 3 autres filtres. Il s'agit de l'approche la plus séduisante, mais également la plus contraignante. Au vu des relations (6.34) à (6.36), nous pouvons étendre la définition des filtres QMF (6.26) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_0(z_1, z_2) &= G_0(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_1, z_2) \\ H_1(z_1, z_2) &= G_1(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(-z_1, z_2) \\ H_2(z_1, z_2) &= G_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_1, -z_2) \\ H_3(z_1, z_2) &= G_3(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(-z_1, -z_2) \end{aligned} \quad (6.37)$$

L'expression (6.32) montre que la matrice des composantes polyphases $H_p(z_1, z_2)$ vaut (chaque élément est fonction de (z_1, z_2) mais nous l'omet-

tons pour des raisons de lisibilité) :

$$H_p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} H_{p00} & H_{p01} & H_{p02} & H_{p03} \\ H_{p00} & -H_{p01} & H_{p02} & -H_{p03} \\ H_{p00} & H_{p01} & -H_{p02} & -H_{p03} \\ H_{p00} & -H_{p01} & -H_{p02} & H_{p03} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

6.5.1.1 Système paraunitaire

L'annexe C montre qu'il n'existe pas de solution paraunitaire basée sur la décomposition de Smith (6.21) pour ce type de banc de filtres. En effet, la pré-multiplication conduit à une matrice R dont le déterminant est nul (voir expression (C.10)). D'autre part, la post-multiplication impose une matrice R diagonale (C.11), ce qui empêche un développement libre de la réponse impulsionnelle des filtres. L'idée est dès lors de relâcher la contrainte de reconstruction parfaite.

6.5.1.2 Élimination du repli de spectre

En utilisant les expressions (6.23) et (6.38), on obtient après de longs calculs :

$$\begin{aligned} T_p(z_1, z_2) &= G_p(z_1, z_2) \cdot H_p(z_1, z_2) \\ &= \text{diag}[T_{p00}(z_1, z_2), T_{p11}(z_1, z_2), T_{p22}(z_1, z_2), T_{p33}(z_1, z_2)] \end{aligned} \quad (6.39)$$

où

$$\begin{aligned} T_{p00}(z_1, z_2) &= 4H_{p00}(z_1, z_2)H_{p00}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ T_{p11}(z_1, z_2) &= 4H_{p01}(z_1, z_2)H_{p01}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ T_{p22}(z_1, z_2) &= 4H_{p02}(z_1, z_2)H_{p02}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ T_{p33}(z_1, z_2) &= 4H_{p03}(z_1, z_2)H_{p03}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

La condition de non repli de spectre (6.17) impose l'égalité des composantes diagonales de $T_p(z_1, z_2)$:

$$T_{p00}(z_1, z_2) = T_{p11}(z_1, z_2) = T_{p22}(z_1, z_2) = T_{p33}(z_1, z_2) \quad (6.41)$$

C'est une condition très difficile à remplir. En effet, il faudrait que la réponse impulsionnelle $h(n)$ soit une fonction de Dirac. Ceci est totalement incompatible avec la forme désirée des filtres. Une solution serait de réduire la complexité de la relation (6.41) à l'aide de symétries qui existent entre les composantes polyphases $H_{p_{0i}}(z_1, z_2)$ du filtre $H(z_1, z_2)$.

Considérons des filtres dont les réponses impulsionnelles possèdent un nombre pair d'échantillons suivant les deux coordonnées n_1 et n_2 , désignés comme de type *pair-pair*. Un délai $z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}}$ doit être introduit dans les expressions (6.32) et (6.33) pour synchroniser les composantes polyphases à la réponse impulsionnelle de type pair-pair :

$$H_j(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}} \left[H_{p_{j0}}(z_1, z_2) + z_1^{-1} H_{p_{j1}}(z_1, z_2) + z_2^{-1} H_{p_{j2}}(z_1, z_2) + z_1^{-1} z_2^{-1} H_{p_{j3}}(z_1, z_2) \right] \quad (6.42)$$

$$G_j(z_1, z_2) = z_1^{-\frac{1}{2}} z_2^{-\frac{1}{2}} \left[G_{p_{j0}}(z_1, z_2) + z_1 G_{p_{j1}}(z_1, z_2) + z_2 G_{p_{j2}}(z_1, z_2) + z_1 z_2 G_{p_{j3}}(z_1, z_2) \right] \quad (6.43)$$

De manière à conserver la même condition d'élimination du repli de spectre (6.41), les relations entre les filtres de synthèse $G_i(z_1, z_2)$ et le filtre prototype $H(z_1, z_2)$ doivent être modifiées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_0(z_1, z_2) &= H(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ G_1(z_1, z_2) &= -H(-z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ G_2(z_1, z_2) &= -H(z_1^{-1}, -z_2^{-1}) \\ G_3(z_1, z_2) &= H(-z_1^{-1}, -z_2^{-1}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Les expressions (D.29) et (D.30) de l'annexe D montrent que les composantes polyphases $p_i(m_1, m_2)$ (dans le domaine spatial) du filtre $h(n_1, n_2)$ présentent des relations de symétrie intéressantes si le nombre d'échantillons suivant les directions n_1 et n_2 est pair.

$$\begin{aligned} p_0(m_1, m_2) &= p_3(-m_1, -m_2) \\ p_1(m_1, m_2) &= p_2(-m_1, -m_2) \end{aligned} \quad (6.45)$$

En transformée en $\mathcal{Z}$, ces relations se traduisent par :

$$\begin{aligned} H_{p_{00}}(z_1, z_2) &= H_{p_{03}}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ H_{p_{01}}(z_1, z_2) &= H_{p_{02}}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Ainsi, la condition de non repli de spectre (6.41) se simplifie en la condition suivante :

$$H_{p_{00}}(z_1, z_2) H_{p_{00}}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H_{p_{01}}(z_1, z_2) H_{p_{01}}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (6.47)$$

$$|H_{p_{00}}(z_1, z_2)|^2 = |H_{p_{01}}(z_1, z_2)|^2 \quad (6.48)$$

La condition de non-repli de spectre revient à imposer l'égalité entre les composantes polyphases $p_0(m_1, m_2)$ et $p_1(m_1, m_2)$.

La condition de reconstruction parfaite (6.16) impose l'égalité :

$$|H_{p_{00}}(z_1, z_2)|^2 = 1 \quad (6.49)$$

Les relations (6.37) et (6.44) montrent que tous les filtres d'analyse et de synthèse sont dérivés du filtre passe-bas $h(n_1, n_2)$. La synthèse des filtres se réduit à déterminer les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce dernier. La forme de la réponse impulsionnelle $h(n_1, n_2)$ du filtre passe-bas pour lequel nous avons imposé la condition d'égalité entre $p_0(m_1, m_2)$ et $p_1(m_1, m_2)$ est illustrée à la figure 6.8 (à gauche). Les coefficients notés par le même nombre sont identiques.

6.5.1.3 Critère d'optimisation

La détermination des coefficients visera à atteindre 2 objectifs : assurer la reconstruction parfaite et obtenir une réponse fréquentielle du filtre passe-bas proche du gabarit désiré de la sous-bande.

La condition de reconstruction parfaite (6.49) se transforme, par extension analytique dans le domaine de Fourier, de la manière suivante

$$|H_{p_{00}}(\Omega)|^2 = 1 \quad \forall \Omega \quad (6.50)$$

Cette condition étant impossible à satisfaire (sauf pour une réponse impulsionnelle en forme de fonction de Dirac), nous nous contenterons de minimiser la fonction E_1 suivante :

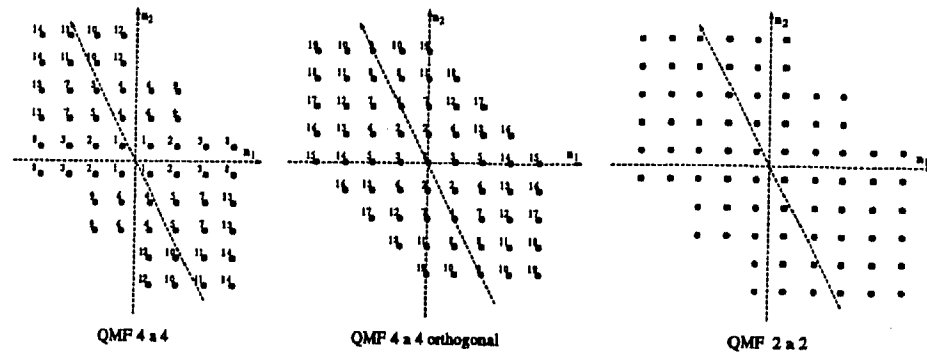


Figure 6.8 - Forme des réponses impulsionnelles des filtres QMF 4 à 4, QMF 4 à 4 orthogonal et QMF 2 à 2

$$E_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k (|H_{p00}(k)|^2 - 1)^2} \quad (6.51)$$

où N est le nombre d'échantillons de la DFT 2-D d'ordre N qui est définie en fonction de k .

La forme désirée $H_{ideal}(\Omega)$ des filtres est illustrée à la figure 6.7b. La réponse fréquentielle $H(\Omega)$ devra se rapprocher le mieux possible de ce gabarit. La qualité de la synthèse est définie par l'erreur quadratique moyenne E_2 :

$$E_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k |H(k) - H_{ideal}(k)|^2} \quad (6.52)$$

Ces deux critères n'étant pas compatibles, on utilise un compromis qui minimise une expression E associant les erreurs E_1 et E_2 .

$$E = \alpha E_1 + (1 - \alpha) E_2 \quad (6.53)$$

où α est un paramètre compris entre 0 et 1, à fixer en fonction de l'importance accordée à l'un ou l'autre critère.

La méthode "Downhill Simplex" [114] assure l'optimisation numérique de cette expression et les résultats sont analysés au paragraphe 6.5.5.

6.5.2 QMF 4 à 4 orthogonal

La structure QMF 4 à 4 orthogonale est également constituée d'un seul filtre prototype. Elle élimine les effets de repli de spectre du banc QMF 4 à 4 décrit au paragraphe 6.5.1 grâce aux relations d'orthogonalité entre les filtres. Simoncelli et Adelson [135] ont utilisé de tels filtres pour développer une décomposition hexagonale non-séparable sur un réseau hexagonal de forme régulière. Les relations entre les filtres et la matrice des composantes polyphases H_p sont les suivantes :

$$\begin{aligned} H_0(z_1, z_2) &= G_0(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_1, z_2) \\ H_1(z_1, z_2) &= G_1(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = z_1 z_2 H(-z_1, z_2) \\ H_2(z_1, z_2) &= G_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = z_2 H(z_1, -z_2) \\ H_3(z_1, z_2) &= G_3(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = z_1 H(-z_1, -z_2) \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$H_p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} H_{p00} & H_{p01} & H_{p02} & H_{p03} \\ -H_{p03} & z_1 H_{p02} & -z_2 H_{p01} & z_1 z_2 H_{p00} \\ -H_{p02} & -H_{p03} & z_2 H_{p00} & z_2 H_{p01} \\ -H_{p01} & z_1 H_{p00} & H_{p03} & -z_1 H_{p02} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

6.5.2.1 Système paraunitaire

Comme pour le cas précédent, un banc de filtres QMF 4 à 4 orthogonal paraunitaire n'est pas envisageable car les matrices $D(z_1, z_2)$ et R ne conduisent pas à des solutions constructives (voir annexe C). Nous allons à nouveau considérer un système qui se limite à l'élimination du repli de spectre.

6.5.2.2 Elimination du repli de spectre

En utilisant les expressions (6.23) et (6.55), on obtient après quelques développements :

$$T_p(z_1, z_2) = G_p(z_1, z_2) \cdot H_p(z_1, z_2) = T(z_1, z_2) \cdot I \quad (6.56)$$

où

$$T(z_1, z_2) = |H_{p00}(z_1, z_2)|^2 + z_1^{-1} |H_{p01}(z_1, z_2)|^2 + z_2^{-1} |H_{p02}(z_1, z_2)|^2 + z_1^{-1} z_2^{-1} |H_{p03}(z_1, z_2)|^2 \quad (6.57)$$

On remarque donc que $T_p(z_1, z_2)$ est bien une matrice diagonale dont les éléments sont identiques, de telle sorte que ces filtres satisfont à la condition d'élimination du repli de spectre (6.17). Toutefois, la *condition de reconstruction parfaite* impose que :

$$T(z_1, z_2) = 1 \quad \forall(z_1, z_2) \quad (6.58)$$

On peut montrer, après quelques calculs, que cette condition de reconstruction parfaite peut également s'exprimer en fonction du filtre passe-bas $H(z_1, z_2)$:

$$|H(z_1, z_2)|^2 + |H(-z_1, z_2)|^2 + |H(z_1, -z_2)|^2 + |H(-z_1, -z_2)|^2 = 4 \quad \forall(z_1, z_2) \quad (6.59)$$

La réponse impulsionnelle du filtre passe-bas $h(n_1, n_2)$ est semblable à celle du filtre correspondant à la structure QMF 4 à 4 décrite au paragraphe 6.5.1. Elle est toutefois de type impair-impair comme illustré à la figure 6.8 (au centre).

6.5.2.3 Critère d'optimisation

Le critère d'optimisation est identique à celui décrit au paragraphe 6.5.1 à part que la condition de reconstruction diffère. Par extension analytique dans le domaine de Fourier, la condition de reconstruction parfaite (6.59) devient :

$$\sum_{i=0}^3 |H(\Omega + \kappa_i)|^2 = 4 \quad \forall \Omega \quad (6.60)$$

où les vecteurs de modulation κ_i valent $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ et (π, π) . Ainsi la fonction erreur E_1 de l'expression (6.53) devient :

$$E_1 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=0}^3 |H(\mathbf{k} + \kappa_{ki})|^2 - 4 \right)^2} \quad (6.61)$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur de coordonnées de la DFT 2-D d'ordre N et κ_{ki} est le vecteur de modulation κ_i associé à $\mathbf{k}$.

6.5.3 QMF 2 à 2

L'approche QMF deux à deux est basée sur la définition QMF à M canaux (6.26). En appliquant cette définition à la décomposition à 4 canaux non-séparables, les relations entre les filtres d'analyse et de synthèse deviennent les suivantes à partir de deux filtres prototypes $H(z_1, z_2)$ et $K(z_1, z_2)$:

$$\begin{aligned} H_0(z_1, z_2) &= G_0(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(z_1, z_2) \\ H_1(z_1, z_2) &= G_1(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = K(z_1, z_2) \\ H_2(z_1, z_2) &= G_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = K(-z_1, -z_2) \\ H_3(z_1, z_2) &= G_3(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H(-z_1, -z_2) \end{aligned} \quad (6.62)$$

La matrice des composantes polyphases $\mathbf{H}_p(z_1, z_2)$ vaut (chaque élément est fonction de (z_1, z_2) mais nous l'omettons pour des raisons de lisibilité) :

$$\mathbf{H}_p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} H_{p00} & H_{p01} & H_{p02} & H_{p03} \\ K_{p00} & K_{p01} & K_{p02} & K_{p03} \\ K_{p00} & -K_{p01} & -K_{p02} & K_{p03} \\ H_{p00} & -H_{p01} & -H_{p02} & H_{p03} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

6.5.3.1 Système paraunitaire

Considérons dans un premier temps un système à reconstruction parfaite sans imposer la condition de paraunitarité (filtres orthogonaux entre eux). La synthèse des résultats concernant les systèmes QMF 2 à 2 développée dans l'annexe C est la suivante. La pré-multiplication conduit à une matrice $\mathbf{D}(z_1, z_2)$ diagonale à deux degrés de liberté. La matrice $\mathbf{R}$ doit être persymétrique à 8 degrés de liberté.

$$\mathbf{D}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} D_0(z_1, z_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1(z_1, z_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1(z_1, z_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_0(z_1, z_2) \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_4 & R_5 & R_6 & R_7 \\ R_7 & R_6 & R_5 & R_4 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

En ce qui concerne la post-multiplication, la matrice diagonale $D(z_1, z_2)$ est quelconque (4 degrés de liberté), tandis que la matrice R possède également 8 degrés de liberté avec la forme suivante :

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & R_1 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 \\ 0 & R_4 & R_5 & 0 \\ R_6 & 0 & 0 & R_7 \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

Nous constatons que cette approche à deux filtres prototypes propose une décomposition à reconstruction parfaite a priori acceptable.

Revenons, à présent, aux systèmes paraunitaires. Nous préférons la construction de la structure paraunitaire basée sur la post-multiplication car elle possède plus de degrés de liberté et qu'il est plus facile d'obtenir une matrice R orthogonale du type (6.66) que persymétrique.

Nous avons expliqué au paragraphe 6.4.1.2 que les matrices $D(z_1, z_2)$ définissaient la forme de la réponse impulsionnelle des filtres. La décomposition de Smith (6.21) prend la forme suivante pour obtenir une forme des réponses impulsionnelles semblables aux cas QMF 4 à 4 (orthogonal ou non) comme illustré à la figure 6.8 (à droite) :

$$H_p(z_1, z_2) = R_0 \prod_{i=0}^5 D_i(z_1, z_2) \cdot R_i \quad (6.67)$$

où :

$$D_0(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} z_2 \end{bmatrix} \quad D_1(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

$$D_2(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} z_2 \end{bmatrix} \quad D_3(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

$$D_4(z_1, z_2) = D_0(z_1, z_2) \quad D_5(z_1, z_2) = D_1(z_1, z_2) \quad (6.70)$$

Les matrices R_i étant orthogonales pour un système paraunitaire, elles peuvent être décomposées en leurs matrices unitaires de rotation simple. Comme une matrice orthogonale d'ordre 4 possède 6 degrés de liberté, leur forme est la suivante :

$$R_i = \prod_{k=0}^5 C_k \quad (6.71)$$

où

$$C_0 = \begin{bmatrix} \cos(\rho_0) & \sin(\rho_0) & 0 & 0 \\ \sin(\rho_0) & -\cos(\rho_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} \cos(\rho_1) & 0 & \sin(\rho_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\rho_1) & 0 & -\cos(\rho_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\rho_2) & \sin(\rho_2) & 0 \\ 0 & \sin(\rho_2) & -\cos(\rho_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} \cos(\rho_3) & 0 & 0 & \sin(\rho_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\rho_3) & 0 & 0 & -\cos(\rho_3) \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\rho_4) & 0 & \sin(\rho_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin(\rho_4) & 0 & -\cos(\rho_4) \end{bmatrix} \quad C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\rho_5) & \sin(\rho_5) \\ 0 & 0 & \sin(\rho_5) & -\cos(\rho_5) \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

Comme les matrices R_i ($i \neq 0$) doivent être de la forme (6.66), leur décomposition en matrices unitaires de rotation simple se réduit à l'expression suivante à 2 degrés de liberté :

$$R_i = C_2 \cdot C_3 \quad (6.75)$$

Pour sa part, la matrice R_0 sera une transformation de Hadamard [2] d'ordre 4 :

$$\mathbf{R}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

6.5.3.2 Critère d'optimisation

Contrairement aux structures QMF 4 à 4 qui n'assuraient pas la reconstruction parfaite, cette dernière est d'office satisfaite pour les systèmes paraunitaires. Les paramètres ρ_i des matrices unitaires $\mathbf{R}_i$ (caractérisant le degré de liberté) sont optimisés sur base du seul critère spectral qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre les réponses fréquentielles des filtres synthétisés et idéaux.

Soient $H_{ideal}(\mathbf{k})$ et $K_{ideal}(\mathbf{k})$ les filtres idéaux correspondant respectivement à $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ et $\mathbf{K}(\mathbf{k})$ en fonction des échantillons $\mathbf{k}$ de la DFT 2-D d'ordre N . L'erreur quadratique moyenne E à minimiser est la suivante :

$$E = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} |H(\mathbf{k}) - H_{ideal}(\mathbf{k})|^2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} |K(\mathbf{k}) - K_{ideal}(\mathbf{k})|^2} \right) \quad (6.77)$$

En pratique, on pourrait omettre le second terme fonction de $\mathbf{K}(\mathbf{k})$ dans l'expression de E car sa réponse fréquentielle est directement déduite de la relation de complémentarité en puissance (6.25) caractérisant les structures paraunitaires.

6.5.4 Aucune condition de symétrie

A titre de comparaison, nous pouvons également envisager le fait de n'imposer aucune condition de symétrie aux filtres d'analyse :

$$\begin{aligned} H_0(z_1, z_2) &= G_0(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ H_1(z_1, z_2) &= G_1(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ H_2(z_1, z_2) &= G_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ H_3(z_1, z_2) &= G_3(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \end{aligned} \quad (6.78)$$

En ce qui concerne les systèmes paraunitaires, la matrice $\mathbf{D}(z_1, z_2)$ possède 4 degrés de liberté. La matrice $\mathbf{R}$ en possède a priori 16. Il faut toutefois tenir compte du fait que son déterminant doit être non nul et que la matrice doit être orthogonale, ce qui réduit les degrés de liberté à six !

Nous souhaitons obtenir la même forme de réponse impulsionnelle que celle des structures QMF 2 à 2 illustrée à la figure 6.8. Pour satisfaire à cette condition, l'expression de Smith (6.21) est la suivante :

$$\mathbf{H}_p(z_1, z_2) = \mathbf{R}_0 \prod_i \mathbf{D}_{1i}(z_1, z_2) \cdot \mathbf{R}_{1i} \cdot \mathbf{D}_{2i}(z_1, z_2) \cdot \mathbf{R}_{2i} \quad (6.79)$$

où :

$$\mathbf{D}_{1i}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} z_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{2i}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{-1} z_2 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

Comme aucune condition n'est imposée aux matrices orthogonales $\mathbf{R}_i$, elles sont déduites de l'expression (6.71).

Au vu de l'expression (6.78), les 4 filtres $H_i(\mathbf{k})$ doivent être optimisés par rapport à leur réponse fréquentielle idéale $H_{ideal,i}(\mathbf{k})$ en fonction des échantillons $\mathbf{k}$ de la DFT 2-D d'ordre N . L'erreur quadratique moyenne E à minimiser est la suivante :

$$E = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} |H_i(\mathbf{k}) - H_{id,i}(\mathbf{k})|^2} \right) \quad (6.81)$$

Idéalement $L = 3$ car le dernier filtre est directement déduit par la propriété de complémentarité en puissance (6.25). Toutefois, une bonne pratique d'optimisation est obtenue en partant de $L = 1$ jusqu'à $L = 3$ ou 4 car le nombre de coefficients ρ_i à déterminer est très important.

6.5.5 Comparaison des résultats

Les résultats de l'optimisation des filtres sont exposés dans ce paragraphe. Les quatre structures décrites dans les paragraphes précédents sont comparées dans le tableau 6.2 en fonction de l'ordre des filtres, de leur degré

	QMF44	QMF44ortho	QMF22	NONQMF
Ordre	56	61	76	76
Degré de liberté	14	19	12	18
E_1	0.0059	0.0013	—	—
E_2	0.2762	0.2477	0.4001	0.4041
RMSE	6.1921	1.0465	0.025	0.031
Efficacité polyphase	4	1	2	1

Tableau 6.2 - Comparaison des différentes structures de bancs de filtres réalisant la transformation hexagonale

de liberté, de l'erreur de reconstruction parfaite E_1 , de l'erreur de réponse fréquentielle E_2 , de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne RMSE due à leur application sur l'image COUPLE et de l'efficacité de réalisation de la représentation polyphase. QMF44, QMF44ortho, QMF22 et NONQMF représentent respectivement les structures QMF 4 à 4, QMF 4 à 4 orthogonale, QMF 2 à 2 et la structure sans condition de symétrie. Rappelons que l'ordre d'un filtre FIR est défini par le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle. Les ordres sont différents d'une structure à l'autre étant donné que les contraintes imposées limitent fortement la forme des réponses impulsionnelles.

- **Reconstruction parfaite:** Les structures paraunitaires (QMF22 et NONQMF) sont à reconstruction parfaite. Seule la transformation du réseau cartésien en un réseau quinconce introduit une erreur qui est négligeable ($RMSE < 0.05$). Les deux autres transformations (QMF44 et QMF44ortho) ne font qu'éliminer le repli de spectre. Nous pouvons remarquer que la transformation orthogonale produit une erreur minime qui est imperceptible sur les images traitées: le RMSE est de l'ordre d'un bit, ce qui est très faible. Par contre la structure QMF44 produit un bruit qui est très légèrement perceptible. Ceci provient du fait qu'il faut trouver un compromis entre la reconstruction parfaite et la forme de la réponse fréquentielle. Or les contraintes appliquées aux composantes polyphases rendent ces deux conditions relativement incompatibles.
- **Réponse fréquentielle:** La figure 6.9 montre les réponses fréquentielles des filtres synthétisés qu'il faut comparer aux réponses fréquen-

tielles idéales de la figure 6.7b. La figure 6.9 tout comme le tableau 6.2 montrent que la structure QMF 4 à 4 orthogonale produit la réponse fréquentielle la plus régulière et la mieux localisée par rapport au filtre idéal. Par contre les structures paraunitaires (QMF22 et NONQMF) produisent plus d'ondulations et de composantes hors bande. De plus la forme de la réponse fréquentielle diffère d'un filtre à l'autre car ils ne sont pas tous liés par des relations de symétrie. Enfin on remarque également que ces filtres ne sont pas très sélectifs. Il suffirait d'augmenter leur ordre, mais au détriment de la qualité de l'optimisation car le nombre de coefficients libres augmenterait de manière importante.

- **Efficacité de la représentation polyphase:** La réalisation de la transformation sous-bande à l'aide de la représentation polyphase (voir figure 6.5) permet de réduire le nombre d'opérations de filtrage dans certains cas favorables. L'annexe D analyse l'efficacité d'une telle réalisation dans les cas des structures QMF44 et QMF44ortho. En ce qui concerne la structure QMF 4 à 4 de type pair-pair, la relation (D.14) montre que le même terme de convolution est utilisé pour les 4 filtres d'analyse. Il en va de même pour l'étage de synthèse (voir expression D.24). Cette propriété est due aux relations de symétrie QMF et elle permet de réduire d'un facteur proche de 4 le nombre d'opérations de convolution à effectuer. Par contre, la structure QMF 4 à 4 orthogonale ne jouit pas de cette propriété (voir expression (D.44)) à cause des délais introduits entre les filtres d'analyse de manière à assurer leur orthogonalité (voir relation (6.54)).

D'autre part, on peut montrer que la composante continue des 3 filtres haute fréquence des transformations paraunitaires (QMF22 et NONQMF) n'est pas annulée. Cette propriété est indispensable pour éviter des effets de variation de luminosité entre chaque sous-bande. Si cette condition est relativement aisée à obtenir à 1-D, elle l'est beaucoup moins dans le cas non-séparable. Kovacevic et Vetterli [61] proposent des transformations non-séparables de type "ondelettes" qui par définition assurent cette propriété. Toutefois l'étude reste théorique sans résultats de filtres synthétisés.

Ces quelques commentaires montrent que la synthèse de bancs de filtres hexagonaux n'est pas évidente. Simoncelli et Adelson [135] ont développé la décomposition QMF 4 à 4 orthogonale, mais sur un réseau hexagonal régulier. Les filtres synthétisés sont semblables à ceux produits dans ce travail.

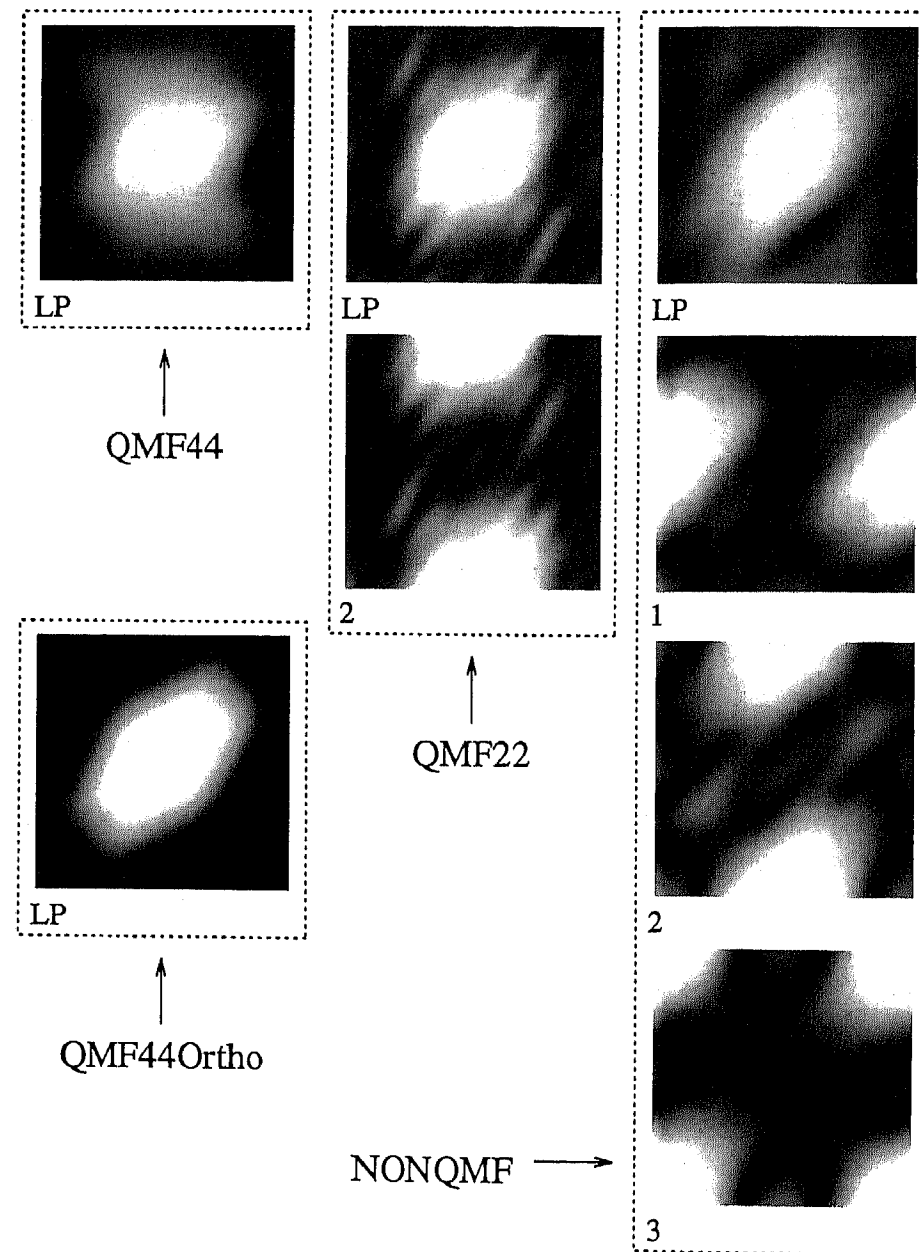


Figure 6.9 - Réponses fréquentielles des filtres synthétisés

Toutefois les structures paraunitaires n'ont pas encore -à ma connaissance- été réalisées sur une telle décomposition. Plusieurs articles [56, 61] traitent des systèmes paraunitaires à 4 canaux non-séparables sans toutefois proposer de filtres synthétisés. Si leur étude théorique semble à présent bien maîtrisée, leur application au traitement d'images est nettement moins évidente.

6.5.6 Transformation orientée

La décomposition hexagonale précédente n'analyse pas assez finement l'orientation des signaux : seules 3 orientations sont discriminées. Du point de vue perceptif la bande passante des canaux orientés devrait être de 15° à 20° [28]. Nous proposons donc une décomposition orientée supplémentaire des bandes haute-fréquence de manière à discriminer 9 orientations comme illustré à la figure 6.6.

6.5.6.1 Passe-bande admissible

La transformation orientée décompose le signal résultant de la transformation hexagonale selon 3 orientations supplémentaires à l'aide de filtres orientés ("fan filters") comme illustré à la figure 6.10. La matrice de sous-échantillonnage D_o associée à cette décomposition en 3 canaux est la suivante :

$$D_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

Les vecteurs des composantes polyphases k_i valent : $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Les points d'auto-repli de spectre Ω_{aa} illustrés à la figure 6.10 nous montrent que la décomposition orientée est compatible avec la matrice de sous-échantillonnage.

6.5.6.2 Système paraunitaire

En ce qui concerne la synthèse des filtres, l'obtention de ces derniers par modulation d'un filtre prototype (cas des filtres QMF) produit des filtres à coefficients complexes dont les vecteurs de modulation ne font pas partie du réseau d'échantillonnage. Le remplacement de la modulation par une rotation (technique utilisée pour la synthèse des "fan filters") ne convient

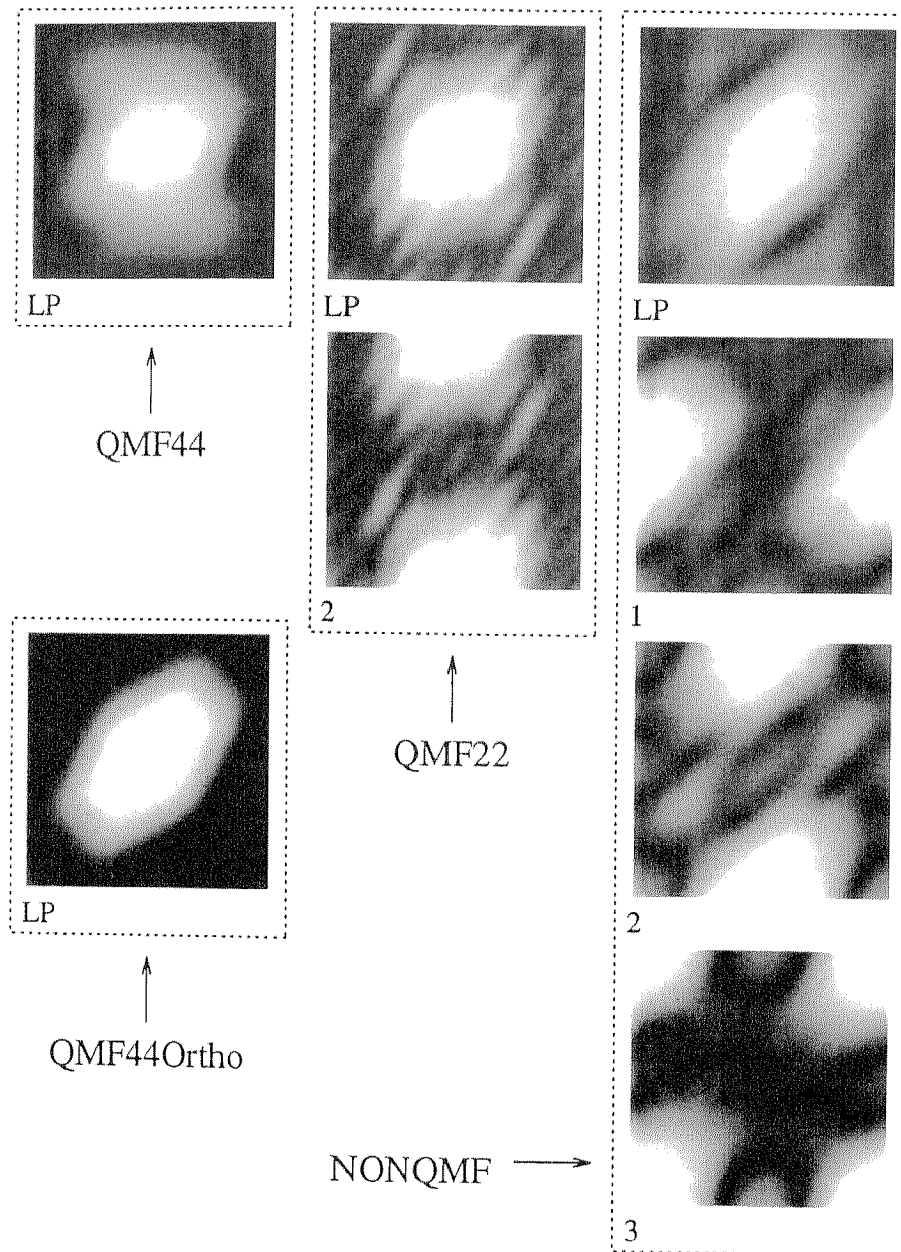


Figure 6.9 - Réponses fréquentielles des filtres synthétisés

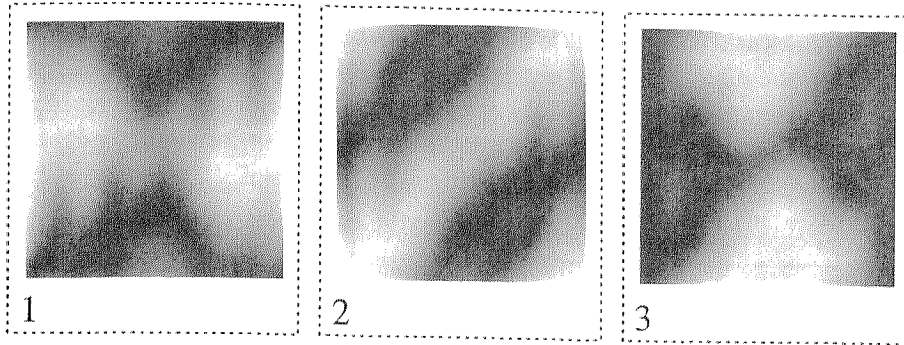


Figure 6.11 - *Réponses fréquentielles des 3 filtres paraunitaires synthétisés*

détermine la forme des réponses impulsionnelles. Nous avons choisi une combinaison des deux matrices suivantes :

$$\mathbf{D}_{1i}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{2i}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

Les filtres optimisés suivant le gabarit désiré sont illustrés à la figure 6.11.

6.5.7 Conclusions

La transformation hexagonale et orientée développée dans les paragraphes précédents a mis en évidence la difficulté de synthèse d'un banc de filtres non-séparables par calcul des coefficients directement à partir des relations 2-D. Plusieurs raisons peuvent être avancées pour expliquer ces résultats mitigés :

- La synthèse de filtres séparables ne nécessite de déterminer qu'un petit nombre de coefficients : 4 pour un filtre 1-D linéaire d'ordre 8. Par contre, les filtres non-séparables d'ordre équivalent conduisent à une bonne vingtaine de coefficients à évaluer. Des algorithmes tels que la méthode "Downhill simplex" perdent une partie de leur efficacité lorsque le nombre de paramètres croît : les conditions de départ deviennent primordiales et la méthode a tendance à rester coincée

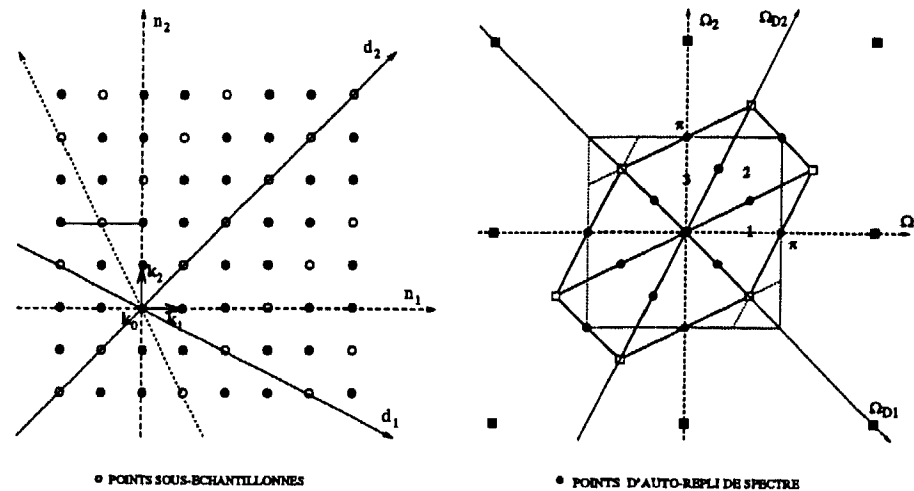


Figure 6.10 - Transformation orientée en coordonnées quinconces n_1 et n_2 et sous-échantillonnées d_1 et d_2 ; Passes-bandes admissibles avec les points de non repli de spectre

guère mieux, à cause de la forme hexagonale non-régulière (quinconce) du réseau. Il nous reste à envisager une méthode plus abstraite: synthétiser les 3 filtres directement en considérant la décomposition sous-bande comme un système paraunitaire sans condition de symétrie.

Sur base de la forme de Smith (6.21), la matrice orthogonale constante $\mathbf{R}_i$ possède trois degrés liberté et elle sera obtenue par une cascade de ses trois rotations unitaires $\mathbf{C}_k$: $\mathbf{R}_i = \prod_{k=1}^3 \mathbf{C}_k$ où

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\rho_0) & \sin(\rho_0) & 0 \\ \sin(\rho_0) & -\cos(\rho_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\rho_1) & 0 & \sin(\rho_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\rho_1) & 0 & -\cos(\rho_1) \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\rho_2) & \sin(\rho_2) \\ 0 & \sin(\rho_2) & -\cos(\rho_2) \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

La matrice $\mathbf{D}_i(z_1, z_2)$ est une matrice diagonale, composée de délais, qui

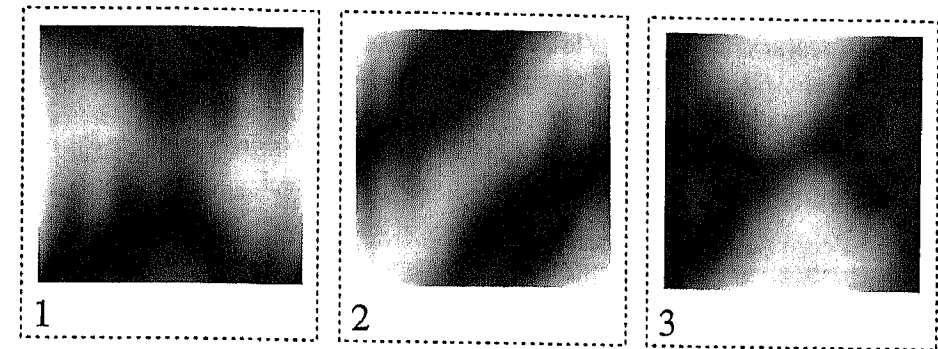


Figure 6.11 - Réponses fréquentielles des 3 filtres paraunitaires synthétisés

détermine la forme des réponses impulsionnelles. Nous avons choisi une combinaison des deux matrices suivantes :

$$\mathbf{D}_{1i}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{2i}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z_1^{-1} z_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

Les filtres optimisés suivant le gabarit désiré sont illustrés à la figure 6.11.

6.5.7 Conclusions

La transformation hexagonale et orientée développée dans les paragraphes précédents a mis en évidence la difficulté de synthèse d'un banc de filtres non-séparables par calcul des coefficients directement à partir des relations 2-D. Plusieurs raisons peuvent être avancées pour expliquer ces résultats mitigés :

- La synthèse de filtres séparables ne nécessite de déterminer qu'un petit nombre de coefficients : 4 pour un filtre 1-D linéaire d'ordre 8. Par contre, les filtres non-séparables d'ordre équivalent conduisent à une bonne vingtaine de coefficients à évaluer. Des algorithmes tels que la méthode "Downhill simplex" perdent une partie de leur efficacité lorsque le nombre de paramètres croît : les conditions de départ deviennent primordiales et la méthode a tendance à rester coincée

au niveau d'un optimum local. Une solution serait d'utiliser des algorithmes statistiques tels le recuit simulé ou les algorithmes génétiques. L'application du recuit simulé à la synthèse des filtres paraunitaires hexagonaux ne fut pas probante : soit l'algorithme ne convergeait pas, soit il menait à des solutions semblables à celles issues de méthodes déterministes. Ceci est rassurant quant à celles-ci.

- Les contraintes de paraunitarité en introduisant des symétries (QMF) réduisent le degré de liberté des bancs de filtres. L'optimisation des coefficients devrait être favorisée, mais cet avantage se fait au détriment de la qualité des filtres synthétisés. En effet, les contraintes de reconstruction parfaite multidimensionnelles et non-séparables sont beaucoup plus sévères que pour leur homologue unidimensionnel. Les seules structures paraunitaires constructives sont basées sur la décomposition selon la forme de Smith (6.21) qui est loin d'être le cas le plus général concernant les systèmes à reconstruction parfaite. Une solution serait d'envisager d'autres structures, mais il s'agit encore d'un problème ouvert.
- La forme des filtres désirée est plutôt biscornue. La plupart des bancs de filtres non-séparables synthétisés proposés dans la littérature se basent sur la transformation quinconce à seulement deux canaux [162, 160, 15]. La similitude avec la décomposition unidimensionnelle à deux canaux rend l'analyse et la synthèse de tels bancs de filtres plus attrayante. D'autre part, il faut se rendre compte que les structures d'échantillonnage limitent la panoplie des transformations non-séparables directes.

Dans le paragraphe suivant, nous allons tenter de résoudre une partie des défauts de l'approche directe en étudiant des transformations perceptives obtenues par la cascade de plusieurs transformations à deux canaux.

6.6 Synthèse du banc de filtres par la transformation de McClellan

6.6.1 Position du problème

Les conclusions du paragraphe 6.5.7 ont mis en évidence que la synthèse directe de bancs de filtres multidimensionnels souffre de plusieurs inconvénients. L'idée de la méthode proposée dans ce paragraphe est de réaliser la

transformation perceptive par une cascade de bancs de filtres obtenus par transformation d'un banc unidimensionnel correspondant.

McClellan a développé une transformation pour convertir un filtre FIR à phase nulle en un homologue multidimensionnel par une substitution de variables [88, 37]. Dans le cadre des transformations sous-bandes non-séparables, la question est de savoir s'il existe une telle transformation qui produit la forme désirée des filtres, mais qui assure également des conditions de reconstruction parfaite, de linéarité de phase ou de régularité de la réponse impulsionnelle des filtres.

Si une telle transformation existe, la méthode consistant à remplacer la transformation directe bidimensionnelle par une transformation issue d'un banc de filtres unidimensionnels correspondant présente plusieurs avantages.

- Nous verrons que la transformation de McClellan est limitée aux filtres à phase linéaire. Les conditions de reconstruction parfaite des bancs 1-D à phase linéaire sont largement développées dans la littérature [149, 97, 161, 98]. De plus leur synthèse est actuellement bien maîtrisée [151, 4, 49].
- Il n'est pas nécessaire d'optimiser les coefficients du banc de filtres multidimensionnel étant donné que la transformation les définit entièrement. De plus le contrôle de l'allure des filtres (réponse fréquentielle, régularité, etc) est nettement plus aisée à 1-D.
- La transformation de McClellan réduit dans certains cas la complexité d'utilisation des filtres bidimensionnels [86].

Ce paragraphe se structure de la manière suivante. La transformation de McClellan est présentée au paragraphe 6.6.2. Le paragraphe 6.6.3 analysera les conditions à imposer à cette transformation pour que le banc de filtres unidimensionnels (limité à deux canaux) assure la reconstruction parfaite. Quelques exemples de transformations de McClellan intéressantes seront ensuite présentées avec leur application à des transformations perceptives.

6.6.2 Transformation de McClellan

Une bonne description de la transformation de McClellan est faite dans [37]. La transformation de McClellan convertit un filtre unidimensionnel et à

phase nulle en un filtre bidimensionnel. Un filtre à phase nulle est un filtre à phase linéaire, symétrique et hermitien : sa réponse impulsionnelle satisfait à $h(n) = h^*(-n)$. Nous allons considérer un filtre FIR possédant un nombre impair de coefficients et d'ordre $n_h = 2N + 1$. La réponse fréquentielle $H(\Omega)$ et la transformée en $\mathcal{Z}$ $H(z)$ d'un tel filtre peuvent s'écrire de la manière suivante où $T_i[x]$ est le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Chebychev :

$$H(\Omega) = h(0) + \sum_{i=1}^N 2h(i) \cdot \cos(i\Omega) \quad (6.86)$$

$$H(\Omega) = h(0) + \sum_{i=1}^N 2h(i) \cdot T_i[\cos(\Omega)] \quad (6.87)$$

$$H(z) = h(0) + \sum_{i=1}^N 2h(i) \cdot T_i\left[\frac{z + z^{-1}}{2}\right] \quad (6.88)$$

Un filtre bidimensionnel $H(\Omega_1, \Omega_2)$ peut être obtenu en effectuant la substitution $\cos(\Omega) \leftarrow F(\Omega_1, \Omega_2)$ dans (6.87) :

$$H(\Omega_1, \Omega_2) = h(0) + \sum_{i=1}^N 2h(i) \cdot T_i[F(\Omega_1, \Omega_2)] \quad (6.89)$$

$$H(z_1, z_2) = h(0) + \sum_{i=1}^N 2h(i) \cdot T_i[F(z_1, z_2)] \quad (6.90)$$

Cette dernière expression en transformée en $\mathcal{Z}$ est obtenue en effectuant la substitution suivante dans (6.88) :

$$F(z_1, z_2) \leftarrow K(z) = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad (6.91)$$

Quelles sont les conditions pour obtenir une bonne transformation ? On peut montrer [37] que si la transformation $F(\Omega_1, \Omega_2)$ est à phase nulle et bornée entre -1 et 1 ($|F(\Omega_1, \Omega_2)| \leq 1$), chaque abscisse de $H(\Omega) = C^{\text{te}}$ correspond à une isopotentielle $F(\Omega_1, \Omega_2) = C^{\text{te}}$ de telle sorte que le domaine fréquentiel 2-D de $H(\Omega_1, \Omega_2)$ recouvre parfaitement le domaine 1-D de $H(\Omega)$. Ainsi par extension analytique, toute propriété valable pour $H(z)$ le sera également pour $H(z_1, z_2)$ étant donné que ces deux filtres sont fonction des mêmes coefficients $h(i)$.

La transformation $F(z_1, z_2)$ peut être vue comme un filtre FIR à phase nulle d'ordre $(2P + 1) \times (2P + 1)$. Ainsi le filtre 2-D synthétisé $H(z_1, z_2)$ est

6.6 Synthèse du banc de filtres par la transformation de McClellan161

également un filtre FIR à phase nulle d'ordre $(2NP + 1) \times (2NP + 1)$. Un exemple de transformation $F(\Omega_1, \Omega_2)$ FIR à phase nulle d'ordre 3×3 est la suivante :

$$F(\Omega_1, \Omega_2) = A + B \cos(\Omega_1) + C \cos(\Omega_2) + D \cos(\Omega_1 - \Omega_2) + E \cos(\Omega_1 + \Omega_2) \quad (6.92)$$

6.6.3 Conditions de reconstruction parfaite

La transformation de McClellan permet de synthétiser des filtres bidimensionnels à partir d'un prototype unidimensionnel. Nous allons analyser, à présent, les conditions à imposer à la transformation $F(z)$ pour que la conversion d'un banc de filtres 1-D en un banc de filtres 2-D conserve des propriétés telles que l'élimination du repli de spectre et la reconstruction parfaite. Cette étude se limitera aux bancs à 2 canaux étant donné que l'extension à M canaux s'avère très contraignante [17]. La littérature fournit plusieurs analyses de la reconstruction parfaite des bancs de filtres obtenus par transformation, mais elles sont essentiellement appliquées à la transformation quinconce [133, 130, 134, 140]. Nous allons les généraliser aux transformations quelconques d'un banc de filtres à 2 canaux.

6.6.3.1 Banc de filtres unidimensionnels

Commençons par rappeler rapidement les propriétés de reconstruction parfaite d'un banc de filtres 1-D à 2 canaux. Le signal reconstruit $\hat{X}(z)$ peut être exprimé de la manière suivante en fonction du signal original $X(z)$ (voir figure 5.3 pour les notations avec $M = 2$) :

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)] X(z) \\ &+ \frac{1}{2} [H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)] X(-z) \end{aligned} \quad (6.93)$$

Le terme $X(-z)$ représente l'effet du repli de spectre qui peut être éliminé en choisissant les filtres de l'étage de synthèse comme suit :

$$G_0(z) = -H_1(-z) \quad G_1(z) = H_0(-z) \quad (6.94)$$

L'expression (6.93) se réduit à $\hat{X}(z) = T(z).X(z)$ où le polynôme $T(z)$ doit se résumer à un délai pur pour assurer la reconstruction parfaite :

$$T(z) = \frac{1}{2} [-H_0(z)H_1(-z) + H_1(z)H_0(-z)] = z^d \quad (6.95)$$

Nous allons considérer un banc de filtres à phase linéaire et symétrique d'ordre impair car ces filtres serviront de prototypes pour la transformation de McClellan. On peut montrer [97] que les seuls filtres H_0 et H_1 satisfaisant à la condition de reconstruction parfaite sont ceux d'ordres n_0 et n_1 différents et dont la somme est un multiple de 4. Soient $n_0 = 2M + 1$ et $n_1 = 2N + 1$. Les filtres $H_0(z)$ et $H_1(z)$ peuvent s'exprimer comme :

$$H_0(z) = z^{-M} L_0(K(z)) \quad (6.96)$$

$$H_1(z) = z^{-N} L_1(K(z)) \quad (6.97)$$

où $L_0(K(z))$ et $L_1(K(z))$ sont des filtres à phase nulle décrits par (6.88) avec $K(z)$ défini par (6.91).

En incluant (6.96) et (6.97) dans (6.95), on obtient l'expression suivante après quelques développements, en tenant compte du fait que $K(-z) = -K(z)$ et que la somme $M + N$ est impaire par la contrainte de reconstruction parfaite énoncée ci-dessus :

$$T(z) = \frac{1}{2} (-1)^{-M} z^{-(M+N)} [L_0(K(z))L_1(K(-z)) + L_0(K(-z))L_1(K(z))] \quad (6.98)$$

$$T(z) = \frac{1}{2} (-1)^{-M} z^{-(M+N)} c(z) \quad (6.99)$$

où le polynôme $c(z)$ doit se réduire à une constante pour assurer la reconstruction parfaite :

$$c(z) = L_0(K(z))L_1(-K(z)) + L_0(-K(z))L_1(K(z)) = 2.(-1)^{-M} \quad (6.100)$$

6.6.3.2 Banc de filtres bidimensionnels

Un banc de filtres bidimensionnels à deux canaux est semblable à son homologue unidimensionnel à part le fait que le facteur de sous-échantillonnage est remplacé par une matrice D et que les filtres sont à présent fonction du vecteur z .

6.6 Synthèse du banc de filtres par la transformation de McClellan 163

On peut montrer [61] que le signal reconstruit $\hat{X}(x)$ vaut (voir figure 6.1 pour les notations) :

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)] X(z) \\ &+ \frac{1}{2} [H_0(w \odot z)G_0(z) + H_1(w \odot z)G_1(z)] X(w \odot z) \end{aligned} \quad (6.101)$$

où $\odot$ est le produit de Schur décrit dans l'annexe B. Le vecteur w est constitué des éléments $\exp(-2\pi j k^t d_i)$ pour $i = 1, 2$. Le vecteur k est le vecteur coset non-nul du réseau défini par D^t et les deux vecteurs d_1 et d_2 sont les colonnes de la matrice D^{-1} .

Le terme de repli de spectre $X(w \odot z)$ est éliminé par la combinaison suivante des filtres d'analyse et de synthèse :

$$G_0(z) = -H_1(w \odot z) \quad G_1(z) = H_0(w \odot z) \quad (6.102)$$

L'expression (6.101) se réduit à $\hat{X}(z) = T(z).X(z)$ où le polynôme $T(z)$ doit se résumer à un délai pur pour assurer la reconstruction parfaite :

$$T(z) = \frac{1}{2} [-H_0(z)H_1(w \odot z) + H_1(z)H_0(w \odot z)] = z^d \quad (6.103)$$

Les filtres $H_0(z)$ et $H_1(z)$ sont obtenus par la transformation de McClellan appliquée à leurs homologues unidimensionnels $H_0(z)$ et $H_1(z)$. Cette transformation consiste en l'application $K(z) \leftarrow F(z)$ aux filtres à phase nulle L_0 et L_1 comme expliqué au paragraphe 6.6.2. Les filtres $H_0(z)$ et $H_1(z)$ peuvent être décrits sous les formes suivantes, similaires aux expressions (6.96) et (6.97) :

$$H_0(z) = z^{-m} L_0(F(z)) \quad (6.104)$$

$$H_1(z) = z^{-(n+k)} L_1(F(z)) \quad (6.105)$$

où les vecteurs m et n valent respectivement (MP, MP) et (NP, NP) si la transformation $F(z)$ est d'ordre $P \times P$. Le vecteur supplémentaire k a été rajouté pour des raisons que nous verrons plus loin.

Nous allons déterminer les conditions à imposer à $F(z)$ pour que le banc de filtres bidimensionnels $\{H_0(z), H_1(z), G_0(z), G_1(z)\}$ soit à reconstruction

parfaite si son homologue unidimensionnel $\{H_0(z), H_1(z), G_0(z), G_1(z)\}$ l'est, c'est-à-dire si $c(z)$ qui est défini par l'expression (6.100) est égal à une constante. En incluant (6.104) et (6.105) dans (6.103), on obtient l'expression suivante après quelques développements :

$$T(z) = \frac{1}{2} z^{-(m+n+k)} \cdot \left[-w^{-(n+k)} \cdot L_0(F(z)) \cdot L_1(F(w \odot z)) + w^{-m} \cdot L_0(F(w \odot z)) \cdot L_1(F(z)) \right] \quad (6.106)$$

En fixant le vecteur k de telle sorte que :

$$w^{-m} = -w^{-(n+k)} = (-1)^{-M} \quad (6.107)$$

l'expression (6.106) devient :

$$T(z) = \frac{1}{2} (-1)^{-M} z^{-(m+n+k)} \cdot [L_0(F(z)) \cdot L_1(F(w \odot z)) + L_0(F(w \odot z)) \cdot L_1(F(z))] \quad (6.108)$$

A partir de cette expression, on peut montrer que la condition que nous recherchons est la suivante :

$$F(w \odot z) = -F(z) \quad (6.109)$$

En effet (6.108) devient :

$$T(z) = \frac{1}{2} (-1)^{-M} z^{-(m+n+k)} c(z) \quad (6.110)$$

avec

$$c(z) = L_0(F(z)) \cdot L_1(-F(z)) + L_0(-F(z)) \cdot L_1(F(z)) \quad (6.111)$$

Comme la transformation de McClellan convertit $K(z) \leftarrow F(z)$, l'expression $T(z)$ (6.99) se transforme en l'expression $T(z)$ (6.110) à un délai près de telle sorte que, si le banc de filtres 1-D est à reconstruction parfaite, le banc de filtres 2-D le sera également grâce à la conservation des propriétés des filtres L_0 et L_1 par la transformation de McClellan.

6.6 Synthèse du banc de filtres par la transformation de McClellan 165

En résumé, la condition à imposer à la transformation de McClellan $F(z_1, z_2)$ pour conserver la reconstruction parfaite est donnée par la relation (6.109). Cette condition est fonction de la matrice de sous-échantillonnage D . Ce résultat est identique à celui obtenu par Tay [140]. En ce qui concerne la condition (6.107), elle est liée à la réalisation du banc de filtres pour lesquels z^{-k} représente un simple délai introduit pour accorder correctement la phase des signaux filtrés. Il correspond à un délai z_1^{-1} dans le cas d'une transformation quinconce [134].

6.6.4 Exemples de transformations perceptives

Nous allons à présent donner quelques exemples de transformations $F(z_1, z_2)$ pour la synthèse d'un banc de filtres bidimensionnels non-séparables à partir d'un banc de filtres unidimensionnels à deux canaux de type demi-bande (un passe-bas et un passe-haut). Ces transformations serviront de blocs de base dont la mise en cascade conduira à des transformations perceptives. Pour éviter d'alourdir le texte, les schémas des transformations sous-bandes sont renvoyés dans l'annexe E.

6.6.4.1 Blocs de base

Nous allons considérer 3 bancs de filtres : les transformations *diagonale*, *quinconce* et *papillon*. Leur réponse fréquentielle idéale ainsi que les filtres synthétisés $H_0(\Omega_1, \Omega_2)$ sont illustrés à la figure 6.12. Le prototype 1-D est un banc de filtres biorthogonaux synthétisé par Daubechies [4], qui est à phase linéaire et assure la reconstruction parfaite.

1. Transformation diagonale

La transformation diagonale sépare les quadrants I et III des quadrants II et IV. La transformation de McClellan la plus simple réalisant une telle transformation est la suivante :

$$\cos(\Omega) \leftarrow \sin(\Omega_1) \cdot \sin(\Omega_2) \quad (6.112)$$

$$K(z) = \frac{z + z^{-1}}{2} \leftarrow F_d(z_1, z_2) = \frac{(z_1 - z_1^{-1}) \cdot (z_2 - z_2^{-1})}{4} \quad (6.113)$$

On peut montrer que la matrice de sous-échantillonnage D_d est compatible avec les passes-bandes admissibles illustrés à la figure 6.12 (à gauche) :

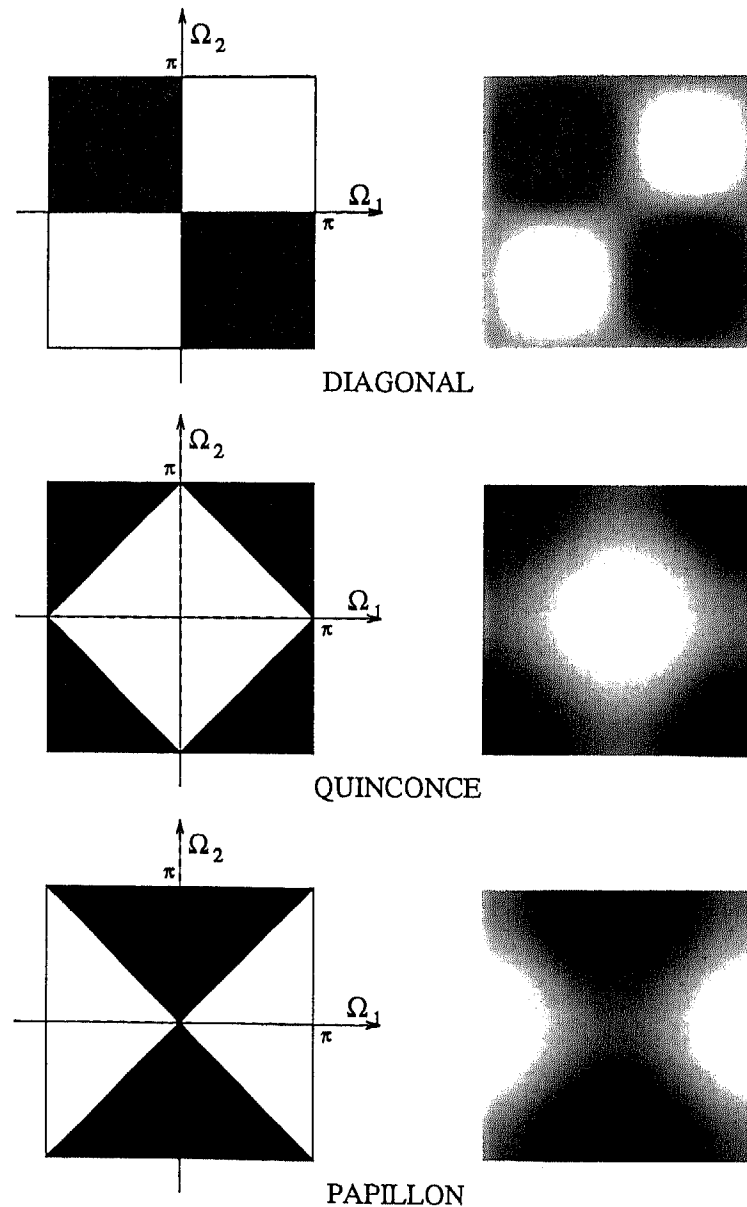


Figure 6.12 - Trois exemples de bancs de filtres bidimensionnels non-séparables obtenus par la transformation de McClellan: à gauche, les filtres idéaux (H_0 en blanc et H_1 en noir); à droite, les filtres synthétisés H_0

6.6 Synthèse du banc de filtres par la transformation de McClellan¹⁶⁷

$$D_d = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

En choisissant $k = (1, 0)$, $(w \odot z)$ vaut $(-z_1, z_2)$. On peut facilement montrer que la condition de reconstruction parfaite (6.109) est bien respectée: $F(-z_1, z_2) = -F(z_1, z_2)$.

2. Transformation quinconce

La transformation quinconce décompose le domaine spectral en deux bandes dont le passe-bas a une forme en losange. La transformation de McClellan la plus simple réalisant une telle transformation est la suivante:

$$\cos(\Omega) \leftarrow \frac{\cos(\Omega_1) + \cos(\Omega_2)}{2} \quad (6.115)$$

$$K(z) = \frac{z + z^{-1}}{2} \leftarrow F_q(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1}}{4} \quad (6.116)$$

On peut montrer que la matrice de sous-échantillonnage D_q est compatible avec les passes-bandes admissibles illustrés à la figure 6.12 (au centre):

$$D_q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.117)$$

En choisissant $k = (1, 0)$, $(w \odot z)$ vaut $(-z_1, -z_2)$. On peut facilement montrer que la condition de reconstruction parfaite (6.109) est bien respectée.

3. Transformation papillon

Il est facile de voir que le banc de filtres papillon $\{H_{p0}(\Omega_1, \Omega_2), H_{p1}(\Omega_1, \Omega_2)\}$ est relié au banc de filtres quinconce $\{H_{q0}(\Omega_1, \Omega_2), H_{q1}(\Omega_1, \Omega_2)\}$ par un décalage du vecteur $(\pi, 0)$ dans le domaine de Fourier:

$$H_{p0}(z_1, z_2) = H_{q0}(-z_1, z_2) \quad (6.118)$$

$$H_{p1}(z_1, z_2) = H_{q1}(-z_1, z_2) \quad (6.119)$$

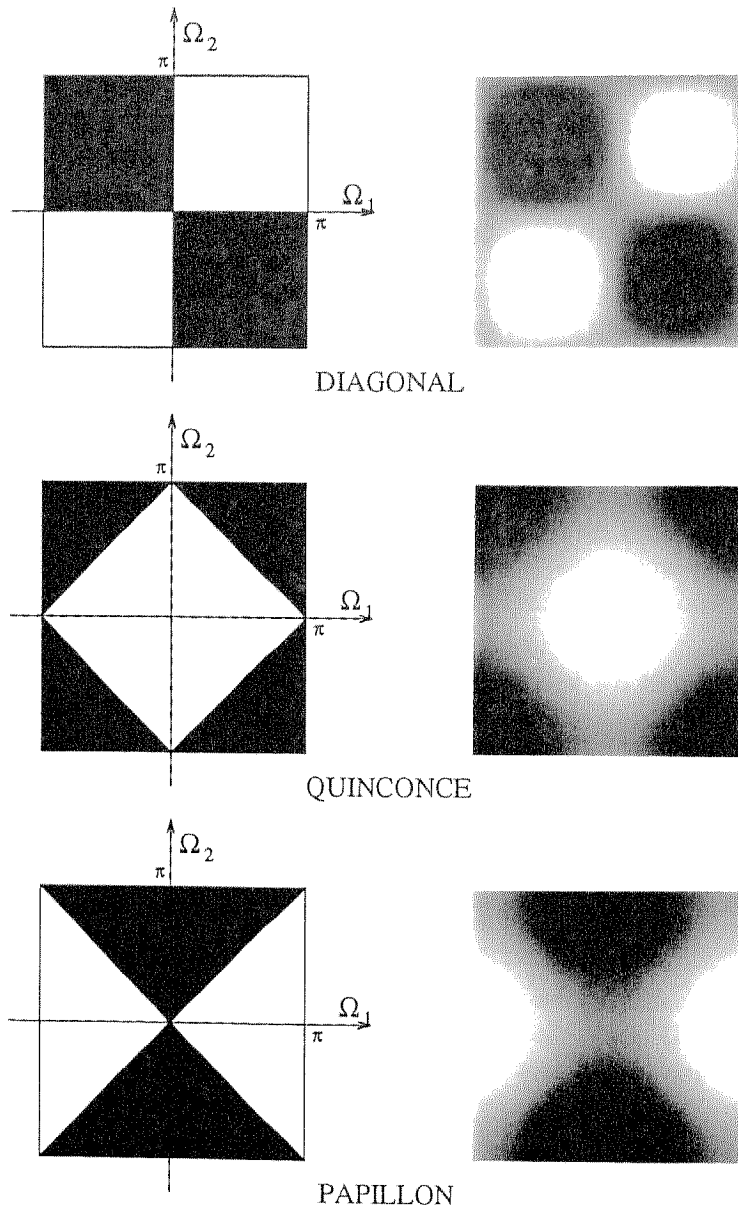


Figure 6.12 - Trois exemples de bancs de filtres bidimensionnels non-séparables obtenus par la transformation de McClellan: à gauche, les filtres idéaux (H_0 en blanc et H_1 en noir); à droite, les filtres synthétisés H_0

La matrice de sous-échantillonnage est naturellement identique à D_q .

6.6.4.2 Quelques exemples de transformations perceptives

Nous avons vu au paragraphe 5.2 que la transformation sous-bande séparable décompose le domaine fréquentiel en 4 sous-bandes dont la bande diagonale mélange les orientations à $+45^\circ$ et -45° . Le bruit de quantification résultant présente des caractéristiques dans la direction conjuguée des bords traités, ce qui est visuellement gênant car ce type de bruit n'est pas masqué. Dans ce paragraphe, nous présentons diverses décompositions hiérarchiques dont les bandes haute fréquence sont à orientations séparées comme le suggère notre modèle des composantes perceptives décrit au chapitre 3. Toutes les transformations sont basées sur une transformation séparable (sauf la transformation quinconce orientée), avec un ou plusieurs étages supplémentaires de traitement des sous-bandes haute fréquence. Ces étages sont basés sur les transformations à deux canaux diagonale, quinconce et papillon décrites au paragraphe 6.6.4.1, ainsi que les deux transformations unidimensionnelles horizontale et verticale.

La transformation séparable orientée (SEPOR) illustrée à la figure 6.13 (à gauche) sépare la bande diagonale d'une décomposition séparable à l'aide de la transformation diagonale pour fournir 4 orientations. En appliquant la même transformation diagonale aux deux autres bandes hautes-fréquences, on obtient une transformation à 6 orientations (OR6) illustrée à la figure 6.13 (au centre). La transformation quinconce orientée (QUINXOR) illustrée à la figure 6.13 (à droite) applique, dans un premier temps, une double transformation quinconce hiérarchique, puis sépare les bandes hautes-fréquences à l'aide de la transformation papillon pour fournir à nouveau 4 orientations.

Deux autres transformations sont illustrées à la figure 6.14. La première transformation (ADAPT) présente un nombre d'orientations qui varie en fonction de la résolution (de 4 à 12 orientations). Elle est suggérée par l'analyse du paragraphe 3.1.4.1 qui montre que la notion d'orientation a plus de pertinence à haute fréquence et donc qu'elle doit y être discriminée plus finement. De plus elle est mieux adaptée au spectre des images dont l'énergie est essentiellement concentrée le long des axes horizontaux et verticaux. Signalons à cet effet que les orientations horizontale et verticale sont bien préservées, ce qui n'est pas le cas des transformations OR6 et OR12. Cette dernière illustrée à la figure 6.14 décompose le signal en 12 orientations, c'est-à-dire avec une bande passante moyenne de 15° correspondant

6.6 Synthèse du banc de filtres par la transformation de McClellan [169]

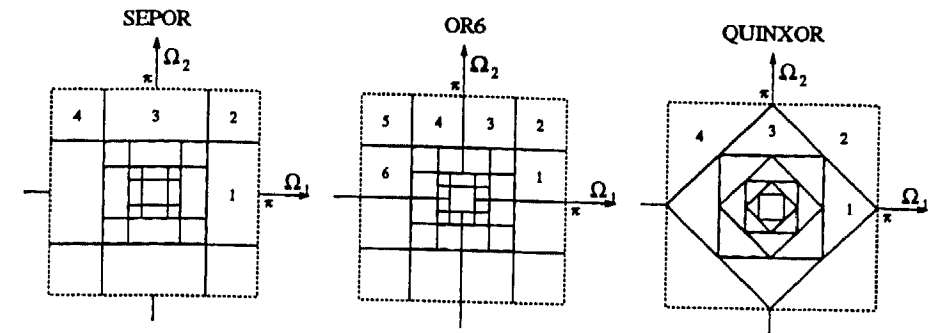


Figure 6.13 - Exemples de transformations perceptives: SEPOR, OR6, QUINXOR

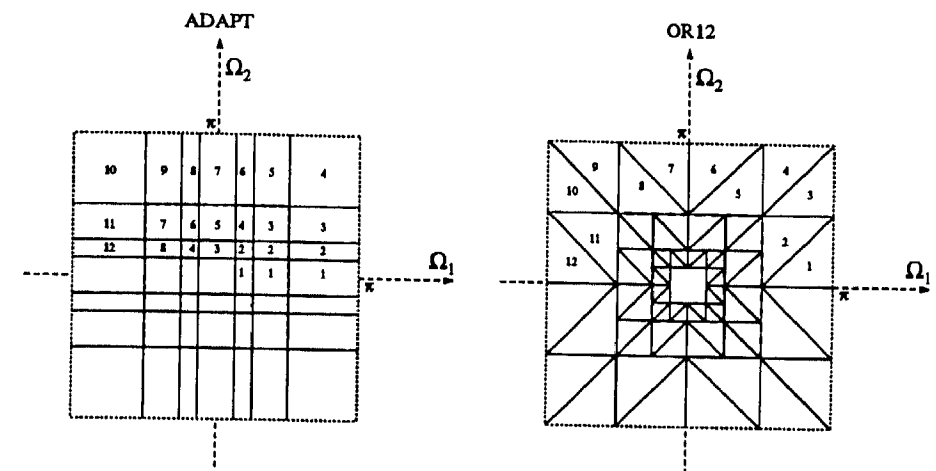


Figure 6.14 - Exemples de transformations perceptives: ADAPT, OR12

à la bande passante des cellules du cortex [28]. Elle est obtenue par une combinaison de transformations quinconces et papillons.

6.6.5 Conclusions

Nous avons présenté une alternative à la méthode de synthèse directe des bancs de filtres non-séparables. Elle se base sur une transformation de Mc-

Clellan appliquée à un banc de filtres unidimensionnels à deux canaux. Comme la méthode se limite à la synthèse de bancs de filtres non-séparables à deux canaux, une mise en cascade de telles transformations est nécessaire pour construire des transformations perceptives séparant le signal en plusieurs canaux orientés.

L'approche présente plusieurs avantages. Il suffit d'appliquer une transformation de McClellan adéquate à un banc de filtres 1-D à deux canaux dont l'étude et la synthèse sont bien maîtrisées pour construire directement le banc 2-D non-séparable. Les propriétés telles que la linéarité de phase ou le profil de la réponse fréquentielle sont conservées. Seule la reconstruction parfaite exige une condition sur la transformation de McClellan qui est toutefois remplie pour des exemples simples tels que les transformations diagonale, quinconce ou papillon. Ces propriétés prennent encore plus de valeur lors de la mise en cascade étant donné qu'elles sont conservées à travers toute la transformation perceptive.

La méthode a toutefois quelques limitations. Premièrement, il faut trouver une transformation de McClellan compatible avec la décomposition désirée. Des méthodes appliquées à des formes plus complexes que celles qui sont exposées dans ce travail sont proposées par Tay et Kingsbury [140], et Shah et Kalker [130]. Deuxièmement, la méthode est limitée à deux canaux. L'extension multi-canaux est encore à l'état d'investigation [17]. Enfin, la mise en cascade de bancs de filtres peut avoir des effets néfastes lors de la quantification des coefficients.

Chapitre 7

Quantification perceptive

La quantification est l'étape du codage d'image qui réduit la précision des coefficients résultant des transformations décorrélatives, voire perceptives comme celles développées au chapitre 6, de manière à obtenir un compromis entre le facteur de compression et la qualité visuelle désirés. Ce chapitre a deux objectifs : d'une part, étudier la notion de quantification perceptive et, d'autre part, comparer les différentes transformations perceptives développées au chapitre 6 sous l'effet de la quantification.

La quantification est habituellement optimisée selon une approche statistique. Le principe est de minimiser une fonction de distorsion éventuellement sous la contrainte de l'entropie. Les quantificateurs de Lloyd-Max utilisent la variance de l'erreur de quantification comme fonction de distorsion. Cette méthode ne prend pas en considération d'effets perceptifs comme la sensibilité masquée décrite au paragraphe 3.2.2. Deux approches ont été envisagées : premièrement, la pondération fréquentielle qui s'applique particulièrement bien aux transformations sous-bandes et qui a déjà été étudiée dans des travaux précédents; deuxièmement, l'auto-masquage qui propose une approche plus locale, mais aussi plus difficile à étudier et à appliquer.

Les différentes méthodes de quantification sont appliquées (dans la mesure du possible) aux transformations perceptives du chapitre 6 en vue de comparer ces dernières aux transformations sous-bandes séparables. Cette comparaison est particulièrement intéressante pour les transformations sous-bandes non-séparables basées sur la transformation de McClellan dont le banc de filtres prototype est identique à celui utilisé pour les transformations séparables.

7.1 Quantification de coefficients sous-bandes

L'objectif d'une transformation sous-bande -qu'elle soit perceptive ou non- est de produire des sous-bandes décorréées entre-elles. L'étape suivante consiste à quantifier, puis coder entropiquement les coefficients des sous-bandes séparément. L'objectif de la quantification est de minimiser une fonction de distorsion sous la contrainte de l'entropie.

7.1.1 Définitions

Un *quantificateur scalaire* réalise une conversion des échantillons x en des échantillons quantifiés y à l'aide d'une fonction caractéristique $Q : y = Q(x)$. La fonction caractéristique $Q(\cdot)$ est une fonction en escalier de telle sorte que $y = y_k$ si $x \in]x_k, x_{k+1}]$ où x_k sont les niveaux de décision et y_k les valeurs de reconstruction pour $1 \leq k \leq L$ où L est le nombre de niveaux de quantification. L'erreur de quantification q est définie comme : $q = y - x$. On considère souvent que la fonction de densité de probabilité de l'erreur de quantification q est uniforme, que les différents échantillons q sont statistiquement indépendants (bruit blanc) et que le bruit de quantification résultant est purement additif (non-corrélé au signal d'entrée) si le pas de quantification est suffisamment petit [154].

La *fonction de distorsion* est habituellement [54] purement statistique puisqu'il s'agit de la variance de l'erreur de quantification σ_q^2 :

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 p_q(q) dq \quad (7.1)$$

$$= \sum_{k=1}^L \int_{x_k}^{x_{k+1}} (y_k - x)^2 p_x(x) dx \quad (7.2)$$

où $p_x(x)$ est la fonction de densité de probabilité des échantillons d'entrée x , modélisée par une Laplacienne ou une Gaussienne généralisée [166]. Comme nous allons appliquer la quantification séparément à des sous-bandes i qui sont supposées décorréées, la fonction de distorsion devient :

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_{q_i}^2 \quad (7.3)$$

Enfin, l'entropie H d'une source sans mémoire (échantillons indépendants) vaut :

$$H = - \sum_{k=1}^L p_k \cdot \log_2 p_k \quad (\text{b/p}) \quad (7.4)$$

où p_k est la probabilité d'apparition des valeurs de reconstruction y_k d'ordre k . Comme chaque sous-bande est codée séparément, l'entropie H est la moyenne des entropies H_i de chaque sous-bande i :

$$H = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M H_i \quad (\text{b/p}) \quad (7.5)$$

7.1.2 Optimisation de la quantification

L'optimisation de la quantification consiste à calculer le pas de quantification Δ qui minimise la fonction de distorsion σ_q^2 sous la contrainte de l'entropie H .

La quantification *uniforme* ou *linéaire* qui est simple et facilement réalisable utilise des intervalles de décision constants avec les valeurs de reconstruction y_k au milieu de ceux-ci :

$$\Delta = y_{k+1} - y_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, L-1 \quad (7.6)$$

Les quantificateurs de Lloyd-Max optimisent les intervalles de décision en minimisant la fonction de distorsion σ_q^2 pour un nombre fixé de bits en considérant que la fonction de densité de probabilité $p_x(x)$ est connue. Il s'agit d'une quantification non-uniforme dont les intervalles de décision et les valeurs de reconstruction sont déterminés de manière itérative [54]:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\infty, \\ x_k &= \frac{1}{2}(y_k + y_{k-1}) \quad \text{pour } k = 2, \dots, L \\ x_{L+1} &= +\infty \end{aligned} \quad (7.7)$$

et les niveaux de représentation sont obtenus par :

$$y_k = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} x p_x(x) dx}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_x(x) dx} \quad \text{pour } k = 1, \dots, L \quad (7.8)$$

La quantification de Lloyd-Max ne tient pas compte de la contrainte entropique. Il apparaît que les contraintes entropique et de minimisation de la distorsion sont relativement contradictoires. En effet, la quantification

de Lloyd-Max produit des intervalles plus petits pour des zones de grande densité de probabilité, ce qui a tendance à augmenter l'entropie car leur contribution est prépondérante. Par contre, les coefficients moins probables qui contribuent de manière négligeable à l'entropie sont quantifiés plus grossièrement. A entropie constante, les défauts produits par ces coefficients sont accentués. Ainsi, Jayant et Noll [54] suggèrent que la quantification uniforme sous la contrainte entropique est optimale à faible facteur de compression.

Toutefois, le pas uniforme de quantification Δ_i peut varier en fonction des différentes sous-bandes i de telle sorte que la fonction de distorsion globale σ_q^2 soit optimale sous la contrainte d'entropie. L'optimisation des Δ_i est souvent basée sur la méthode d'optimisation de Lagrange.

7.1.3 Application d'un modèle perceptif

La quantification basée sur la fonction de distorsion décrite ci-dessus est optimale d'un point de vue statistique, mais pas du tout d'un point de vue perceptif. Le modèle des composantes perceptives décrit au chapitre 3 considère que, dans un canal perceptif caractérisé par une fréquence radiale, une orientation et une localisation spatiale, le seuil de visibilité d'un stimulus est déterminé par l'expression (3.28). Dans le domaine du codage, nous préférons parler de sensibilité S définie comme l'inverse du seuil de visibilité C_T :

$$S = \begin{cases} S_0, & \text{si } C \leq \frac{1}{S_0}, \\ S_0^{1-\epsilon} \cdot C^{-\epsilon}, & \text{si } C > \frac{1}{S_0}, \end{cases} \quad (7.9)$$

où S_0 est l'inverse du seuil de visibilité sans masquage C_{T_0} qui dépend de la fréquence radiale, C est le contraste du canal, et ϵ est indépendant du canal. La fonction de sensibilité S est illustrée à la figure 7.1 en fonction du contraste C .

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'application de cette fonction de sensibilité à la quantification des coefficients sous-bandes. La pondération fréquentielle utilisée dans de nombreuses applications ne tient pas compte du masquage ce qui facilite son application comme nous le verrons au paragraphe 7.2. Son extension au masquage est abordée au paragraphe 7.3.

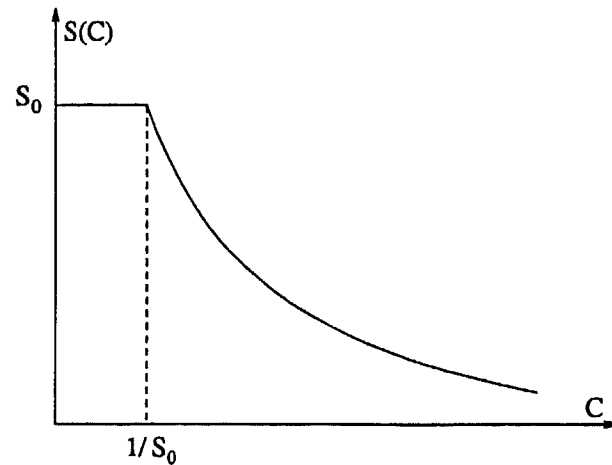


Figure 7.1 - Courbe de sensibilité S en fonction du contraste C du canal perceptif

7.2 Pondération fréquentielle

L'application la plus simple de la fonction de sensibilité (7.9) au codage sous-bande est de considérer son influence sans tenir compte du masquage : $S = S_0(f)$ qui ne dépend que de la fréquence spatiale f . En effet, comme chaque sous-bande est caractérisée par une bande de fréquence bien définie, l'expression de distorsion peut être modifiée sous forme d'une expression pondérée $\sigma_{q,w}^2$:

$$\sigma_{q,w}^2 = \sum_{i=1}^M W_i \sigma_{q_i}^2 \quad (7.10)$$

où W_i est le facteur de pondération de la sous-bande i défini comme :

$$W_i = \frac{K}{D} \int S_0^2(f) |G_i(f)|^2 df \quad (7.11)$$

avec K une constante de normalisation, D le déterminant de la matrice de sous-échantillonnage $\mathbf{D}$ et $G_i(f)$ la transmittance du filtre de synthèse de la sous-bande i . Vandendorpe [154] et Macq [74] ont respectivement appliqué cette approche à la quantification pondérée des transformations sous-bandes et DCT séparables.

L'optimisation de la fonction de distorsion pondérée $\sigma_{q,w}^2$ sous la contrainte de l'entropie H en considérant une quantification uniforme conduit à un choix des pas de quantification Δ_i inversement proportionnels au facteur de visibilité $\sqrt{D \cdot W_i}$ [74, 154] :

$$\Delta_i \sim \frac{1}{\sqrt{D \cdot W_i}} \quad (7.12)$$

En pratique, le facteur de visibilité est incorporé dans les coefficients transformés sous forme d'une préaccentuation de telle sorte que le pas de quantification soit identique pour chaque sous-bande. Au récepteur, la désaccentuation est opérée pour retrouver l'amplitude du signal original.

L'expression (3.44) définissant la courbe de sensibilité fréquentielle que nous avons optimisée par des tests psychophysiques au paragraphe 3.4.2 est un bon candidat pour la fonction $S_0(f)$, au même titre que d'autres courbes développées par Mannos et Sakrison [80] ou Nill [99]. Macq [74] et Vandendorpe [154] ont plutôt utilisé une courbe de pondération définie par la recommandation CCIR 451-2 pour le bruit aléatoire large bande affectant la qualité de la transmission TV analogique. Celle-ci a été étendue isotropiquement aux signaux 2-D sur base de la conservation de la puissance de bruit [27, 74] :

$$S_0^2(f) = 15.32 \left(1 + \frac{f^2}{(3.952 \arctan(1/2D))^2} \right)^{-3/2} \quad (7.13)$$

où $f = (f_1, f_2)$ est exprimé en cycle par hauteur d'image (c/H) et D est la distance de l'observateur à l'écran. Précisons que cette courbe de pondération est une courbe exprimée en puissance par rapport à la courbe de sensibilité perceptive qui est exprimée en amplitude. La figure 7.2 compare les courbes de pondération $S_0^2(F)$ basée sur notre modèle (voir expression (3.44)) et proposée par le CCIR, toutes deux normalisées en puissance. Ces courbes sont valables à une distance D égale à 6 fois la hauteur de l'écran, pour une image composée de 720x576 pixels sous un rapport d'aspect de 1/1 et F est la fréquence radiale normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage. Le calcul de cette dernière en fonction des paramètres d'observation est expliqué dans l'annexe F.

Enfin, le filtre de synthèse $G_i(f)$ est souvent remplacé par son passe-bande idéal étant donné que les valeurs numériques de W_i correspondantes sont fort semblables et qu'il est plus aisé de l'appliquer lors d'une cascade de bancs de filtres.

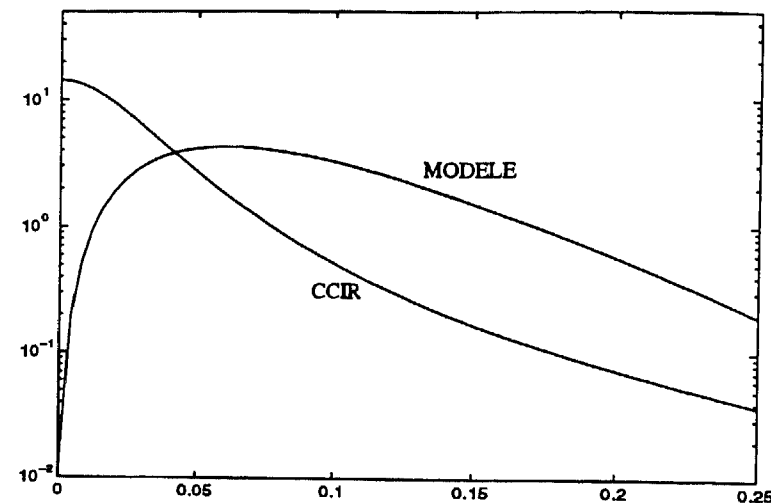


Figure 7.2 - Comparaison des courbes de sensibilité $S_0(F)$ de notre modèle et du CCIR, normalisée en puissance.

Résultats

Nous allons comparer l'effet de la pondération fréquentielle appliquée aux transformations perceptives développées au chapitre 6 dont les coefficients transformés sont quantifiés sous la contrainte entropique. Les sigles MOD et CCIR correspondent respectivement aux courbes de sensibilité de notre modèle et du CCIR, tandis que NONW considère une quantification non-pondérée. Les images LENA et COUPLE ont été codées à 0.2 b/p et 0.5 b/p respectivement. Le tableau 7.1 donne les PSNR et les MPSNR issus de notre critère de qualité décrit au chapitre 4 pour les différentes transformations hexagonales développées au paragraphe 6.5. Les tableaux 7.2 et 7.3 comparent respectivement les PSNR et les MPSNR des transformations perceptives basées sur la transformation de McClellan décrites au paragraphe 6.6. Les figures 7.3, 7.4 et 7.5 montrent quelques images codées correspondantes. La transformation hiérarchique séparable SEP servira de référence.

Les images codées à l'aide des différentes versions de la transformation hexagonale ne sont pas de bonne qualité. La quantification des coefficients annihile les conditions de reconstruction parfaite complexes en faisant apparaître des défauts très gênants tels qu'une grille hexagonale et du bruit

	QMF44	QMF44ortho	QMFF22	NONQMF	ORIENTE
COUPLE CCIR	25.15	28.27	27.30	27.55	27.50

Tableau 7.1 - Comparaison des PSNR (dB) des différentes transformations hexagonales appliquées au codage de l'image COUPLE à 0.5 b/p

	SEP	SEPOR	QUINX	QUINXOR	ADAPT	OR6	OR12
LENA NONW	30.05	30.01	29.58	29.75	30.09	29.76	29.72
LENA MOD	30.13	30.11	29.66	29.85	30.08	29.89	29.95
LENA CCIR	29.74	29.72	29.22	29.40	29.71	29.54	29.57
COUPLE CCIR	32.27	32.24	31.16	31.46	32.87	32.21	32.17

Tableau 7.2 - Comparaison des PSNR (dB) produits par les différentes transformations perceptives appliquées aux images LENA (0.2 b/p) et COUPLE (0.5 b/p)

	SEP	SEPOR	QUINX	QUINXOR	ADAPT	OR6	OR12
LENA NONW	41.68	41.59	41.36	41.36	41.99	41.34	41.26
LENA MOD	45.27	45.13	45.70	45.68	45.20	44.53	44.66
LENA CCIR	46.30	45.83	45.11	45.16	45.56	45.11	44.48
COUPLE CCIR	49.72	49.69	48.07	48.42	50.06	49.69	49.60

Tableau 7.3 - Comparaison des MPSNR (dB) produits par les différentes transformations perceptives appliquées aux images LENA (0.2 b/p) et COUPLE (0.5 b/p)



QMF44ortho CCIR



QMF22 CCIR

Figure 7.3 - Image *COUPLE* codée à 0.5 b/p à l'aide des transformations hexagonales pour la courbe de pondération fréquentielle CCIR

haute fréquence. Par contre, les contours sont bien préservés. Deux sources de bruit peuvent être citées : d'une part, l'échantillonnage quinconce préliminaire à la transformation sous-bande qui n'est pas à reconstruction parfaite et, d'autre part, les filtres synthétisés qui ne sont pas spectralement bien localisés comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe 6.5.5. De plus, il faut ajouter la non-annulation de la composante continue des filtres haute fréquence qui produit des variations de luminance localisées.

Les bancs de filtres basés sur la transformation de McClellan sont particulièrement intéressants à comparer étant donné que le banc prototype unidimensionnel est identique : il s'agit d'un banc de filtres biorthogonaux à phase linéaire (voir paragraphe 6.6). Nous pouvons premièrement constater l'efficacité de la pondération fréquentielle. Malgré une accentuation du bruit mésorienté autour des contours, la pondération lisse les effets de tache (patches) dans les zones uniformes améliorant sensiblement l'aspect global de l'image codée. Il est intéressant de constater la discordance entre les résultats du PSNR et du MPSNR, confirmant notre approche du critère de qualité. Le choix de la courbe de pondération a une influence secondaire. Les différentes transformations méritent les commentaires suivants :

- Les transformations SEPOR, OR6 et OR12 produisent des résultats semblables à la transformation séparable SEP, c'est-à-dire un effet de mésorientation autour des contours obliques et un traitement conser-



SEP NONW



SEP MOD



SEP CCIR



OR12 CCIR

Figure 7.4 - Image *LENA* codée à 0.2 b/p à l'aide des transformations perceptives basées sur la transformation de McClellan pour différentes courbes de pondération fréquentielle



QMF44ortho CCIR



QMF22 CCIR

Figure 7.3 - Image *COUPLE* codée à 0.5 b/p à l'aide des transformations hexagonales pour la courbe de pondération fréquentielle CCIR

haute fréquence. Par contre, les contours sont bien préservés. Deux sources de bruit peuvent être citées : d'une part, l'échantillonnage quinconce préliminaire à la transformation sous-bande qui n'est pas à reconstruction parfaite et, d'autre part, les filtres synthétisés qui ne sont pas spectralement bien localisés comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe 6.5.5. De plus, il faut ajouter la non-annulation de la composante continue des filtres haute fréquence qui produit des variations de luminance localisées.

Les bancs de filtres basés sur la transformation de McClellan sont particulièrement intéressants à comparer étant donné que le banc prototype unidimensionnel est identique : il s'agit d'un banc de filtres biorthogonaux à phase linéaire (voir paragraphe 6.6). Nous pouvons premièrement constater l'efficacité de la pondération fréquentielle. Malgré une accentuation du bruit mésorienté autour des contours, la pondération lisse les effets de tache (patches) dans les zones uniformes améliorant sensiblement l'aspect global de l'image codée. Il est intéressant de constater la discordance entre les résultats du PSNR et du MPSNR, confirmant notre approche du critère de qualité. Le choix de la courbe de pondération a une influence secondaire. Les différentes transformations méritent les commentaires suivants :

- Les transformations SEPOR, OR6 et OR12 produisent des résultats semblables à la transformation séparable SEP, c'est-à-dire un effet de mésorientation autour des contours obliques et un traitement conser-



SEP NONW



SEP MOD



SEP CCIR



OR12 CCIR

Figure 7.4 - Image LENA codée à 0.2 b/p à l'aide des transformations perceptives basées sur la transformation de McClellan pour différentes courbes de pondération fréquentielle



SEP CCIR



ADAPT CCIR



QUINX CCIR



QUINXOR CCIR

Figure 7.5 - Image *COUPLE* codée à 0.5 b/p à l'aide des transformations perceptives basées sur la transformation de McClellan avec la courbe de pondération fréquentielle CCIR



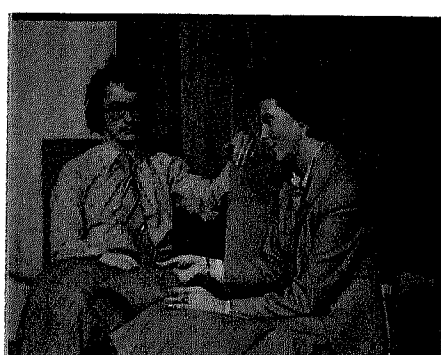
SEP CCIR



ADAPT CCIR



QUINX CCIR



QUINXOR CCIR

Figure 7.5 - Image *COUPLE* codée à 0.5 b/p à l'aide des transformations perceptives basées sur la transformation de McClellan avec la courbe de pondération fréquentielle CCIR

vateur des contours horizontaux et verticaux.

- Les transformations quinconces QUINX et QUINXOR ne sont pas de bonnes alternatives aux transformations séparables. Si les contours obliques sont un peu mieux préservés, les contours horizontaux et verticaux majoritaires dans une image sont particulièrement détériorés. Il en est de même pour les textures à caractère vertical dans l'image *COUPLE* (voir figure 7.5 et les MPSNR correspondants). La transformation quinconce orientée QUINXOR améliore légèrement les résultats, mais au prix d'un effet de Gibbs plus marqué.
- La transformation ADAPT est intéressante car elle réduit l'effet de mésorientation de la transformation SEP. Toutefois, ce gain minime est compromis par une accentuation de l'effet de Gibbs. Ce dernier est le résultat de la cascade de bancs de filtres à deux canaux utilisée en vue d'obtenir la décomposition orientée désirée. Un effet semblable apparaît pour la transformation séparable uniforme illustrée à la figure 5.4 si les sous-bandes dont les bandes-passantes sont identiques résultent d'une application récursive d'un banc de filtres à deux canaux.

7.3 Quantification masquée

7.3.1 Auto-masquage

L'application de la fonction de sensibilité incluant le masquage est nettement moins aisée dans le cadre des transformations sous-bandes. Le masquage est un phénomène local dont l'influence s'exprime à l'intérieur de chaque sous-bande et non plus seulement entre sous-bandes comme c'est le cas de la pondération fréquentielle.

Voyons, dans un premier temps, comment calculer le contraste C pour un canal perceptif donné. Le contraste est défini à l'expression (3.32) comme le module en chaque point de l'image filtrée à l'aide d'un filtre analytique centré sur la fréquence f_0 et l'orientation θ_0 du canal perceptif. Malheureusement les transformations sous-bandes ne réalisent pas de filtrage analytique et, en plus, sous-échantillonnent le résultat du filtrage. Toutefois, on peut se rendre compte assez facilement qu'une bonne approximation de l'expression 3.32 consiste à définir le contraste C comme le module de chaque échantillon sous-échantillonné x dans une sous-bande donnée : $C = |x|$. En

effet, le sous-échantillonnage ramène le signal en bande de base et le module récupère bien l'enveloppe du signal. L'approximation réside dans le fait que les deux versions opposées du spectre vont se superposer en bande de base, ce qui était évité par le filtrage analytique. Même s'il s'agit d'une approximation grossière, cette mesure du contraste pour une transformation sous-bande a l'avantage d'être très simple à réaliser. Ainsi, nous parlerons dorénavant d'*auto-masquage* car nous considérerons le masquage appliqué directement à chaque coefficient sous-bande.

Une manière élégante d'appliquer l'auto-masquage au codage sous-bande est de remplacer l'expression de la fonction de distorsion par une version masquée $\sigma_{q,m}^2$:

$$\sigma_{q,m}^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_{i,q,m}^2 \quad (7.14)$$

où la fonction de distorsion masquée $\sigma_{i,q,m}^2$ pour chaque sous-bande i vaut :

$$\sigma_{i,q,m}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} M_i(x) (y - x)^2 p_x(x) dx \quad (7.15)$$

avec la fonction de masquage $M_i(x) = S^2(x)$. $S(x)$ est défini par l'expression (7.9) pour laquelle $C = |x|$.

Etant donné que la fonction de masquage $M_i(x)$ dépend du signal x dans chaque sous-bande i , l'optimisation de la fonction de distorsion masquée $\sigma_{q,m}^2$ sous la contrainte entropique est nettement moins aisée que dans le cas de la pondération fréquentielle. Diverses voies ont été suivies pour tenter de simplifier le problème.

Une première idée est de remplacer W_i dans le facteur de visibilité de l'expression (7.12) par $M_i(x)$ en réalisant une préaccentuation adaptée à chaque coefficient sous-bande. Cette approche est totalement inadéquate pour plusieurs raisons :

1. Dans le cadre de la pondération fréquentielle, l'optimisation des pas de quantification Δ_i pour chaque sous-bande dépend du choix de la caractéristique du quantificateur (uniforme en l'occurrence). Dans le cas de la pondération masquée, le quantificateur n'est plus uniforme de telle sorte que les hypothèses à la base de l'optimisation sous la contrainte entropique ne sont plus vérifiées.

2. Le facteur $M_i(x)$ dépend de la valeur x qui n'est malheureusement plus connue au récepteur puisqu'elle est remplacée par la valeur de reconstruction y_k . On pourrait utiliser y_k à la place de x pour la préaccentuation. Toutefois, cette substitution est difficilement réalisable si le pas de quantification Δ_i est grand (à facteur de compression élevé). D'une part, la valeur de reconstruction y_k n'est connue qu'a posteriori et sa détermination serait itérative. D'autre part, une erreur de pondération viendrait s'ajouter à l'erreur de quantification car la fonction de sensibilité (7.9) ne serait pas évaluée en x , mais bien en y_k .
3. En plus de sa non-uniformité, la caractéristique de quantification incluant la préaccentuation ne serait pas monotone si $\epsilon > 0.5$, ce qui produirait une ambiguïté lors de la désaccentuation.

Une solution à ces problèmes est d'envisager une quantification non-uniforme optimisant la fonction de distorsion masquée $\sigma_{q,m}^2$ sans la contrainte entropique. On remarque qu'il s'agit d'une adaptation des quantificateurs de Lloyd-Max décrits au paragraphe 7.1.2 dont la fonction de densité de probabilité $p_x(x)$ est remplacée par $M_i(x) p_x(x)$. Malheureusement la solution du système d'équations (7.7) et (7.8) est itérative. Nous proposons dès lors une approximation plus aisée à calculer. Considérons que le dénominateur de l'expression (7.8) est une constante K :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} M_i(x) p_x(x) dx = K \quad \text{pour } k = 1, \dots, L \quad (7.16)$$

Les niveaux de décision x_k sont ainsi déterminés à partir du choix de K qui est fixé par le niveau de compression désiré, tandis que les valeurs de reconstruction y_k restent les centroïdes de la densité de probabilité masquée $M_i(x) p_x(x)$ dans l'intervalle de décision approprié.

$$y_k = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} x M_i(x) p_x(x) dx}{K} \quad \text{pour } k = 1, \dots, L \quad (7.17)$$

La détermination des x_k et y_k est bien découplée. Notons que la fonction de sensibilité $S_0(f)$ incluse dans l'expression de $M_i(x)$ est définie pour chaque sous-bande comme au paragraphe 7.2.

		Entropie (b/p)			
		0.1	0.2	0.5	1.0
FREQ	PSNR	26.52	27.92	30.10	34.90
	MPSNR	39.46	43.78	49.26	55.10
AUTO	PSNR	25.78	26.74	27.67	33.02
	MPSNR	40.13	41.95	46.97	54.07

Tableau 7.4 - Comparaison des PSNR et MPSNR en (dB) de l'image COUPLE quantifiée avec une pondération fréquentielle (FREQ) et un auto-masquage (AUTO) pour différentes entropies

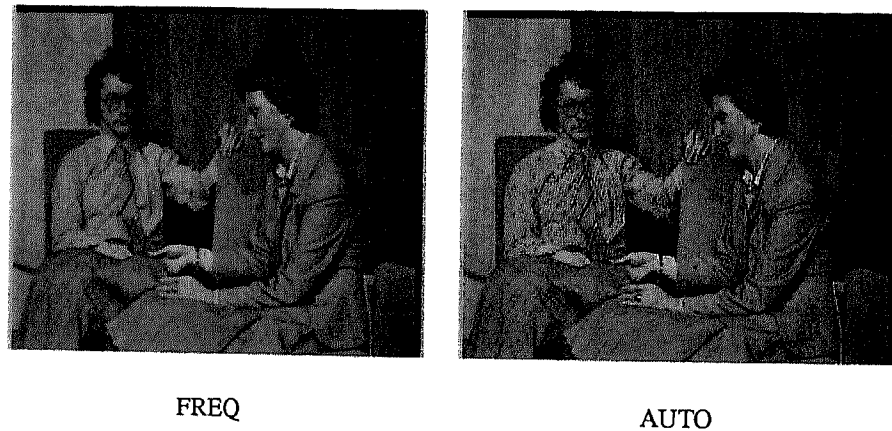


Figure 7.6 - Image COUPLE codée avec une pondération fréquentielle (FREQ) et un auto-masquage (AUTO) à 0.2 b/p

Résultats

Nous avons comparé cette proposition de quantification auto-masquée (AUTO) avec la quantification basée sur la pondération fréquentielle (FREQ) exposée au paragraphe 7.2 appliquée au codage de l'image COUPLE pour différentes entropies (voir tableau 7.4 et figure 7.6). La transformation sous-bande est séparable (SEP) et la fonction de sensibilité est celle de notre modèle perceptif (MOD).

Visuellement, l'auto-masquage fournit de moins bons résultats que la pon-

dération fréquentielle. Le contraste des zones actives est accentué ce qui rend les défauts associés à ces zones plus visibles. Cette constatation est confirmée par les valeurs de PSNR et MPSNR. Toutefois, à très faible entropie (0.1 b/p), le MPSNR de l'auto-masquage est meilleur que celui de la pondération fréquentielle. Cette dernière produit un effet de bloc fort visible contrairement à l'auto-masquage. Ceci s'explique par le transfert d'entropie vers les basses fréquences réalisé par l'auto-masquage. Mais il faut rester prudent quant aux conclusions à en tirer car la qualité des images à 0.1 b/p est tellement médiocre que leur application n'est même pas envisageable. Nous ne les avons d'ailleurs pas illustrées.

Les résultats précédents peuvent s'interpréter de manière analogue à la comparaison entre la quantification uniforme et non-uniforme de Lloyd-Max faite au paragraphe 7.1. En effet, la fonction de masquage $M_i(x)$ a une allure semblable à la fonction de densité de probabilité $p_x(x)$ (par exemple Laplacienne). L'auto-masquage conduisant à une quantification non-uniforme est moins efficace que la pondération fréquentielle à quantification uniforme sous la contrainte entropique. Deux voies pourraient être envisagées pour remédier à ce problème :

- Considérer le problème de l'auto-masquage sous contrainte entropique dans sa globalité, c'est-à-dire optimiser les pas de quantification en minimisant les relations 7.14 et 7.15 pour une entropie donnée. A priori, une solution numérique serait nécessaire car l'approche analytique du problème est loin d'être évidente.
- Imposer une contrainte perceptive sur l'image reconstruite, plutôt que sur les coefficients transformés comme c'est le cas dans l'expression 7.15. Le modèle de masquage apparaît limité sur ce point.

Précisons que Watson [164] a développé un quantificateur similaire à notre méthode d'auto-masquage pour lequel les intervalles de décision sont dépendants du seuil de visibilité masqué. Toutefois, il ne prend pas en compte l'effet de la sensibilité S_0 en fonction de la bande de fréquence allouée à la sous-bande. Saadane et al [123] proposent une méthode similaire. Les résultats qu'ils présentent sont malheureusement difficilement comparables.

7.3.2 Quantification vectorielle masquée

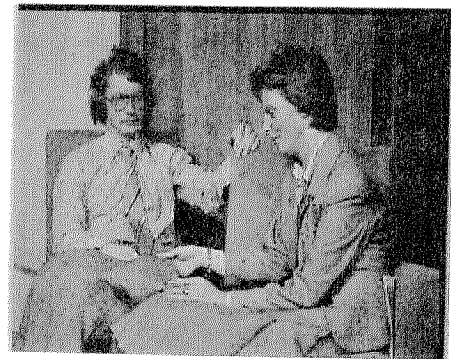
La quantification vectorielle qui rassemble plusieurs coefficients en un vecteur permet de mieux mettre à profit le phénomène de localisation spatiale

		Entropie (b/p)			
		0.1	0.2	0.5	1.0
FREQ	PSNR	26.52	27.92	30.10	34.90
	MPSNR	39.46	43.78	49.26	55.10
AUTO	PSNR	25.78	26.74	27.67	33.02
	MPSNR	40.13	41.95	46.97	54.07

Tableau 7.4 - Comparaison des PSNR et MPSNR en (dB) de l'image COUPLE quantifiée avec une pondération fréquentielle (FREQ) et un auto-masquage (AUTO) pour différentes entropies



FREQ



AUTO

Figure 7.6 - Image COUPLE codée avec une pondération fréquentielle (FREQ) et un auto-masquage (AUTO) à 0.2 b/p

Résultats

Nous avons comparé cette proposition de quantification auto-masquée (AUTO) avec la quantification basée sur la pondération fréquentielle (FREQ) exposée au paragraphe 7.2 appliquée au codage de l'image COUPLE pour différentes entropies (voir tableau 7.4 et figure 7.6). La transformation sous-bande est séparable (SEP) et la fonction de sensibilité est celle de notre modèle perceptif (MOD).

Visuellement, l'auto-masquage fournit de moins bons résultats que la pon-

du masquage. Cette approche a été appliquée à la quantification vectorielle de coefficients sous-bandes d'une décomposition *séparable* de manière à préserver l'orientation des contours (éliminer l'effet de mésoorientation décrit au paragraphe 5.2.4). Nous nous limiterons à un bref résumé. Le lecteur intéressé par une description plus complète de la méthode et des résultats peut se référer à [20].

Les 3 coefficients haute fréquence de même position à un niveau de résolution donné sont rassemblés pour former un vecteur. La quantification réside dans le remplacement de ce vecteur par un autre appelé *centroïde* choisi dans un alphabet prédéterminé. Ces centroïdes sont optimisés suivant un algorithme itératif LBG [71] adapté au masquage qui comprend deux étapes. L'étape de classification associe un vecteur à un centroïde. L'étape d'actualisation modifie ces centroïdes en fonction de la classe de vecteurs qui leur sont associés. Ce double processus itératif est réitéré jusqu'à ce que la combinaison des centroïdes se stabilise.

L'association d'un vecteur avec un centroïde se fait sur base d'un critère de minimisation d'une distance. L'algorithme LBG classique utilise la distance euclidienne entre deux vecteurs. Comme nous voulons éviter les effets de mésoorientation sur les contours, la distance euclidienne est pondérée par une fonction de masquage spatial (voir paragraphe 2.2.2.1.1) résultant d'un filtrage de Hilbert unidimensionnel suivant 4 orientations (0° , 45° , 90° et 135°). De plus cette pondération est appliquée sur l'image reconstruite et non dans le domaine transformé.

Les résultats ne furent pas à la hauteur des espérances. La préservation des contours se fait au détriment des zones uniformes pour lesquelles les effets de taches et de bruit aléatoire sont amplifiés. Les résultats numériques montrent, en effet, que la quantification vectorielle masquée effectue un transfert d'entropie des basses fréquences vers les hautes fréquences où dominent les contours. Malgré les améliorations de la méthode proposées dans [20], cette approche est trop ciblée sur la préservation des contours sans prendre en considération le reste de l'information dans une image. Des approches plus universelles comme celle décrite dans le paragraphe 7.3.1 semblent plus adéquates pour le codage perceptif d'images.

7.4 Conclusions

Ce chapitre poursuivait deux objectifs : comparer les transformations perceptives développées au chapitre 6 sous l'effet de la quantification et proposer des méthodes de quantification prenant en compte la fonction de sensibilité masquée des canaux perceptifs.

- Les transformations perceptives que nous avons développées ne présentent pas un gain suffisant en matière de qualité visuelle pour être considérée comme des alternatives efficaces à la transformation séparable. En effet, cette dernière est un bon compromis entre la qualité visuelle globale et la complexité de réalisation. Les transformations perceptives basées sur la transformation de McClellan souffrent d'un étalement de l'effet de Gibbs autour des contours qui résulte de la cascade de bancs de filtres à deux canaux pour réaliser la décomposition orientée désirée. En ce qui concerne les transformations hexagonales, les imperfections de la synthèse des bancs de filtres ont rejailli sur les résultats de codage en produisant des défauts particulièrement visibles.
- Les essais de quantification masquée n'ont pas été fructueux. La grande difficulté réside dans la localisation spatiale de ce masquage. Comparativement, la pondération fréquentielle s'applique parfaitement au codage sous-bande étant donné qu'elle n'est pas dépendante de la position des pixels dans la sous-bande. L'étude de la quantification masquée reste encore un problème ouvert et non-résolu.